10th

CLASS NOTES
2023

Mentors By IITians.
पाठशाला
Any Time...Any Where... 247

गणित
MATHEMATICS

उड़ान
Batch

विषय सूची

गणित

वास्तविक संख्या

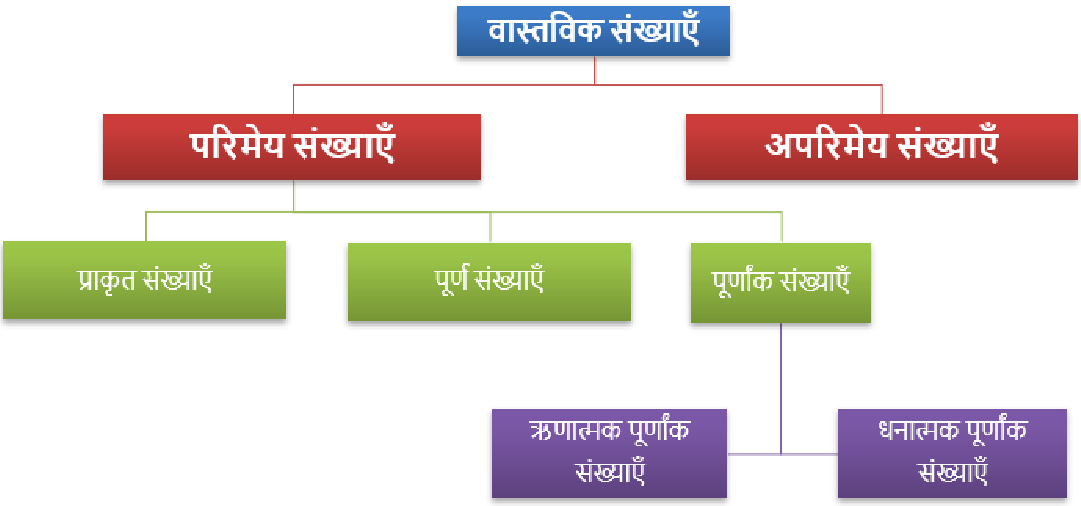
सभी परिमेय संख्या और अपरिमेय संख्याओं को सम्मलित रूप से लिखने पर वास्तविक संख्या प्राप्त होती हैं।

जैसे:- $\sqrt{3}, \frac{2}{5}, \sqrt{15}, \frac{4}{11}, \frac{7}{12}, \frac{15}{17}$

वास्तविक संख्या को R से प्रदर्शित किया जाता है।

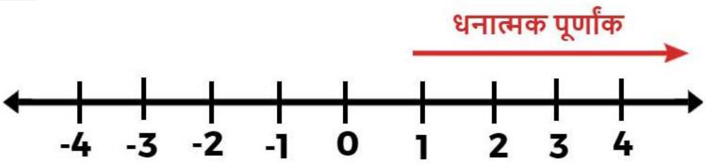
वास्तविक संख्या को अंग्रेजी में "Real Number" कहते हैं।

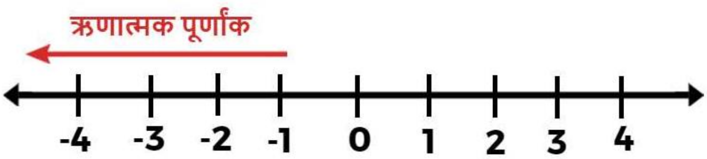
वास्तविक संख्याओं के प्रकार



वास्तविक संख्याएँ दो प्रकार की होती हैं।

- धनात्मक वास्तविक संख्या
- ऋणात्मक वास्तविक संख्या





1. **धनात्मक वास्तविक संख्याएँ**

धनात्मक वास्तविक संख्याएँ वह संख्या होती है जिसका मान धनात्मक होता हैं धनात्मक वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं। अर्थात धनात्मक वास्तविक संख्याओं के आगे धनात्मक चिन्ह लगाया जाता हैं।

जैसे:- $\frac{7}{12}, \frac{11}{13}, 124,\ 1228,\ 2456$

2. **ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ**

वह वास्तविक संख्याएँ जिनका मान ऋणात्मक होता हैं ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं। अर्थात ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के आगे ऋणात्मक चिन्ह लगाया जाता हैं।

जैसे: $\frac{-7}{12}, -\frac{17}{5},\ -128,\ -3864, \frac{23}{-19}$

वास्तविक संख्याओं के गुणधर्म

वास्तविक संख्याओं के चार गुणधर्म होते हैं।

1. संवृत गुणधर्म

जब दो वास्तविक संख्याओं को जोड़ा या गुणा किया जाता हैं तो हमें एक वास्तविक संख्याएँ प्राप्त होती हैं। वास्तविक संख्याओं के इस गुणधर्म को ही संवृत गुणधर्म कहाँ जाता हैं।

2. क्रमविनिमेय गुणधर्म

दो वास्तविक संख्याओं को किसी भी उलझे क्रम में जोड़ने या गुणा करने पर हमें एक समान वास्तविक संख्याएँ प्राप्त होगी। वास्तविक संख्याओं के इस गुणधर्म को कर्मविनिमेय गुणधर्म कहाँ जाता है।

3. साहचर्य गुणधर्म

तीन वास्तविक संख्याओं के ग्रुप को ही परिवर्तित कर जोड़ने या गुना करने पर उत्तर समान ही प्राप्त होता है। परिमेय संख्याओं के इस गुण को साहचर्य गुण कहाँ जाता है।

4. वितरण गुणधर्म

यदि वितरण गुण का प्रयोग गुणन पर योग का वितरण विधि या गुणन पर व्यवकलन (घटाव) का वितरण विधि का प्रयोग कर किसी प्रश्न का हल विभिन्न तरीको से किया जाये तो हल समान ही प्राप्त होगा। अतः इस गुण को वास्तविक संख्याओं का वितरण गुण कहा जाता है।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (कलन विधि)

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म पूर्णांकों की विभाज्यता से किसी रूप में संबंधित है। साधारण भाषा में कहा जाए, तो एल्गोरिथ्म के अनुसार, एक धनात्मक पूर्णांक a को किसी अन्य धनात्मक पूर्णांक b से इस प्रकार विभाजित किया जा सकता है कि शेषफल r प्राप्त हो, जो b से छोटा (कम) है। इसे सामान्य लंबी विभाजन प्रक्रिया के रूप में जानते हैं। यद्यपि यह परिणाम कहने और समझने में बहुत सरल है। परंतु पूर्णांकों की विभाज्यता के गुणों से संबंधित इसके अनेक अनुप्रयोग हैं। हम इनमें से कुछ पर प्रकाश डालेंगे तथा मुख्यतः इसका प्रयोग दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक परिकलित करने में करेंगे।

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r विद्यमान हैं कि a = bq + r, तथा r बड़ा हो या बराबर हो 0 के और b, 0 से बड़ा हो।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से महत्तम समापवर्तक

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक परिकलित करने की एक तकनीक है। आपको याद होगा कि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b का महत्तम समापवर्तक वह सबसे बड़ा पूर्णांक d है, जो a और b दोनों को (पूर्णतया) विभाजित करता है।

उदाहरण

मान लीजिए हमें पूर्णांकों 455 और 42 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना है। हम बड़े पूर्णांक 455 से प्रारंभ करते हैं। तब यूक्लिड प्रमेयिका से, हमें प्राप्त होता है:

$455 = 42 \times 10 + 35$

अब भाजक 42 और शेषफल 35 लेकर, यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$42 = 35 \times 1 + 7$

अब, भाजक 35 और शेषफल 7 लेकर, यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$35 = 7 \times 5 + 0$

ध्यान दीजिए कि यहाँ शेषफल शून्य आ गया है तथा हम आगे कुछ नहीं कर सकते। हम कहते हैं कि इस स्थिति वाला भाजक, अर्थात् 7 ही 455 और 42 का महत्तम समापवर्तक है।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म न केवल बड़ी संख्याओं के भ्ब्थ् परिकलित करने में उपयोगी है, अपितु यह इसलिए भी महत्वपूर्ण है कि यह उन एल्गोरिथ्मों में से एक है, जिनका कंप्यूटर में एक प्रोग्राम के रूप में सबसे पहले प्रयोग किया गया।

अंकगणित का आधारभूत प्रमेय

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखंडन अभाज्य गुणनखंडों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

उदाहरणार्थ, हम $2 \times 3 \times 5 \times 7$ को वही मानते हैं जो $3 \times 5 \times 7 \times 2$ को माना जाता है।

दो धनात्मक पूर्णांकों के HCF और LCM अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। ऐसा करते समय, इस प्रमेय के नाम का उल्लेख नहीं किया गया था। इस विधि को अभाज्य गुणनखंडन विधि भी कहते हैं।

उदाहरण

संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल

यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

जैसा कि आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, आप HCF (6, 20) = 2 तथा LCM (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण

संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

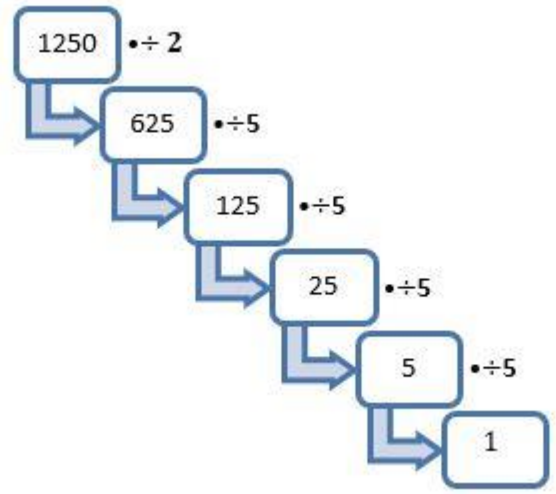
हल:

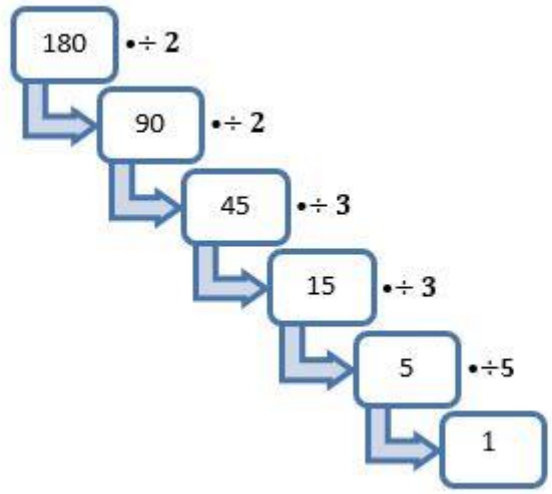
यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

जैसाकि आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, आप HCF (6, 20) = 2 तथा LCM (6, 20)

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, ज्ञात कर सकते हैं।

अंकगणित का आधारभूत प्रमेय





दो धनात्मक पूर्णांकों के HCF और LCM अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। ऐसा करते समय, इस प्रमेय के नाम का उल्लेख नहीं किया गया था। इस विधि को अभाज्य गुणनखंडन विधि भी कहते हैं।

उदाहरण

संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

इस प्रकार, HCF $(6, 20) = 2$ तथा

LCM $(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, ज्ञात कर सकते हैं।

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ज्ञात कर सकते हैं।

अपरिमेय संख्याओं का पुनर्भ्रमण

अपरिमेय संख्या

संख्या "s" अपरिमेय संख्या कहलाती है, यदि उसे p/q के रूप में नहीं लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। अपरिमेय संख्याओं के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं:

अपरिमेय संख्या

$\sqrt{2}$ $3\sqrt{5}$

π

$\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, \ldots$ आदि।

मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करती है, तो p, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

उदाहरण

$\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति

हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम दो पूर्णांक r और s ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि $\sqrt{2} = r/s$ हो तथा $s \neq 0$ हो।

मान लीजिए r और s में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड है। तब, हम इस उभयनिष्ठ गुणनखंड से r और s को विभाजित करके $\sqrt{2} = a/b$ प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ a और b सहअभाज्य हैं।

अतः $b\sqrt{2} = a$ हुआ।

दोनों पक्षों का वर्ग करने तथा पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$2b^2 = a^2$

अतः 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए प्रमेय 1.3 के अनुसार 2, a को विभाजित करेगा।

अतः हम a = 2 c लिख सकते हैं जहां c कोई पूर्णांक है।

a का मान प्रतिस्थापित करने पर $2b^2 = 4c^2$, अर्थात $b^2 = 2c^2$ प्राप्त होगा।

इसका अर्थ है कि 2, b^2 को विभाजित करता है इसलिए प्रमेय 1.3 के अनुसार 2, b को विभाजित करेगा।

अतः a, b में एक उभयनिष्ठ गुनंखंड 2 है।

परिमेय संख्या

संख्या जो $\frac{p}{q}$ के फॉर्म में हों, या संख्या जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो, जहाँ p तथा q पूर्णांक हों तथा $q \neq 0$ हो, परिमेय संख्यां कहलाती हैं। परिमेय संख्या को अंग्रेजी में रेशनल नम्बर कहा जाता है।

उदाहरण

$\frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{-4}$ आदि परिमेय संख्या के कुछ उदाहरण हैं।

अंश तथा हर

एक परिमेय संख्या जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप में होता है, में p को अंश तथा q को हर कहते हैं।

p ← अंश

हर → q

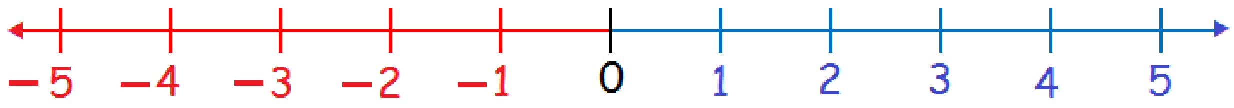
परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ में 2 अंश तथा 3 हर है।

उसी प्रकार $-\frac{5}{6}$, जो कि एक परिमेय संख्या है, में –5 अंश तथा 6 हर है।

उसी प्रकार $\frac{12}{-13}$ जो कि एक परिमेय संख्या है में 12 अंश तथा –13 हर है।

परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

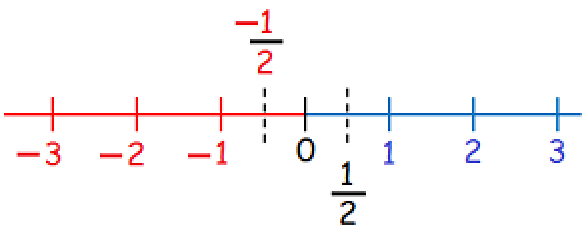
संख्या रेखा पर शून्य के दायीं ओर धनात्मक पूर्णांक तथा शून्य के बायीं ओर ऋणात्मक पूर्णांक होता है।



अत: ऋणात्मक परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर बायीं ओर तथा धनात्मक परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर दायीं ओर निरूपित किया जाता है।

उदाहरण

$\frac{1}{2}$ तथा $-\frac{1}{2}$ का संख्या रेखा पर निरूपण



परिमेय संख्याओं और उनके दशमलव प्रसारों का पुनर्भ्रमण

परिमेय संख्याओं के या तो सांत दशमलव प्रसार होते हैं या फिर असांत आवर्ती दशमलव प्रसार होते हैं। हम एक परिमेय संख्या, मान लीजिए p/q (q ≠ 0), पर विचार करेंगे तथा यथार्थ रूप से इसकी खोज करेंगे कि p/q का दशमलव प्रसार कब सांत होगा और कब असांत आवर्ती होगा।

आइए निम्नलिखित परिमेय संख्याओं पर विचार रें◌:

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

अब

(i) $0.\ 375=\frac{375}{1000}=\frac{375}{10^3}$

(ii) $0.104=\frac{104}{1000}=\frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875=\frac{875}{10000}=\frac{875}{10^4}$

(iv) $23.3408=\frac{233408}{10000}=\frac{233408}{10^4}$

इनको और सरल करने पर हमें प्राप्त होता है:

(i) $0.375=\frac{375}{1000}=\frac{375}{10^3}=3\times\frac{5^3}{2^3}\times5^3=\frac{3}{2^3}$

(ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3} = 13 \times \frac{2^3}{2^3} \times 5^3 = 13/5^3$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4} = 5^3 \times \frac{7}{2^4} \times 5^4 = \frac{7}{2^4} \times 5$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4} = 2^6 \times 7 \times \frac{521}{2^4} \times 5^4 = 2^2 \times 7 \times \frac{521}{5^4}$

प्राप्त सभी संख्याएं p/q के परिमेय संख्या के रूप में हैं।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 1.1 (पृष्ठ संख्या 8)

प्रश्न 1 युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से HCF ज्ञात कीजिये:

(i) 135 और 225
(ii) 196 और 38220
(iii) 867 और 255

उत्तर-

(i) a = 225, b = 135 {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते है}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

a = bq + r (तब(

225 = 135 × 1 + 90

135 = 90 × 1 + 45

90 = 45 × 2 + 0 {जब हमें r = 0 प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है}

b = 45 {फिर उसमे से b का मान HCF होता है;}

HCF = 45

(ii) a = 38220, b = 196 {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते है}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$a = bq + r$ (तब(

$38220 = 196 \times 195 + 0$ {जब हमें $r = 0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है}

$b = 196$ {फिर उसमे से b का मान HCF होता है;}

HCF = 196

(iii) $a = 867, b = 255$ {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते है}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$a = bq + r$ (तब(

$38220 = 196 \times 195 + 0$ {जब हमें $r = 0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है}

$b = 196$ {फिर उसमे से b का मान HCF होता है;}

HCF = 196

प्रश्न 2 दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$, या $6q + 3$, या $6q + 5$, के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णांक है।

उत्तर- दर्शाना है: $a = 6q + 1, 6q + 3$ या $6q + 5$

माना कि a कोई धनात्मक विषम पूर्णांक है;

जहाँ $b = 6$ होगा,

जब हम 6 से a को विभाजित करते है जो शेषफल क्रमश :0, 1, 2, 3, 4 और 5 पाते है;

जहाँ $0 \leq r < b$

यहाँ a एक विषम संख्या है इसलिए शेषफल भी विषम संख्या प्राप्त होता है |

शेषफल होगा 1 या 3 या 5

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से हम पाते है;

$a = 6q + 1, 6q + 3$ या $6q + 5$

प्रश्न 3 किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते है?

उत्तर- स्तंभों की अधिकतम संख्या = HCF (616, 32)

a = 616, b = 32 {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते है}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$a = bq + r$ (तब(

$616 = 32 \times 19 + 8$ {जब हमें $r = 0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है}

$32 = 8 \times 4 + 0$

$b = 8$ {b का मान HCF होता है}

HCF = 8

इसलिए स्तंभों की अधिकतम संख्या= 8

प्रश्न 4 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए 3m या 3m + 1 के रूप का होता है।

उत्तर- दर्शाना है :$a^2 = 3m$ और $3m + 1$

$a = bq + r$

माना कि a कोई धनात्मक पूर्णांक है जहाँ $b = 3$ और $r = 0, 1, 2$ क्योंकि $0 \le r < 3$

तब $a = 3q + r$ कुछ पूर्णांक के लिए $q \ge 0$

इसलिए, $a = 3q + 0$ और $3q + 1$ और $3q + 2$

अब हम पाते है;

$\Rightarrow a^2 = (3q + 0)^2$ और) $3q + 1)^2$ और) $3q + 2)^2$

$\Rightarrow a^2 = 9q^2$ और $9q^2 + 6q + 1$ और $9q^2 + 12q + 4$

$\Rightarrow a^2 = 9q^2$ और $9q^2 + 6q + 1$ और $9q^2 + 12q + 3 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 3(3q^2)$ और $3(3q^2 + 2q) + 1$ और $3(3q^2 + 4q + 1) + 1$

यदि $m = (3q^2)$ और) $3q^2 + 2q)$ और) $3q^2 + 4q + 1)$ हो तो

हम पाते है कि;

$a^2 = 3m$ और $3m + 1$ और $3m + 1$

प्रश्न 5 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप का होता है।

उत्तर- माना, a कोई धनात्मक पूर्णांक है;

युकिल्ड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से;

$a = bq + r$ जहाँ; $0 \le r < b$

$b = 9$ रखने पर

$a = 9q + r$ जहाँ; $0 \le r < 9$

जब $r = 0$ हो;

$a = 9q + 0 = 9q$

$a^3 = (9q)^3 = 9(81q^3)$ या 9m जहाँ $m = 81q^3$

जब $r = 1$ हो

$a = 9q + 1$

$a^3 = (9q + 1)^3 = 9(81q^3 + 27q^2 + 3q) + 1$

$= 9m + 1$ जहाँ $m = 81q^3 + 27q^2 + 3q$

जब $r = 2$ हो तो

$a = 9q + 2$

$a^3 = (9q + 2)^3 = 9(81q^3 + 54q^2 + 12q) + 8$

$= 9m + 2$ जहाँ $m = 81q^3 + 54q^2 + 12q$

अत: किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप का होता है।

प्रश्नावली 1.2 (पृष्ठ संख्या 13)

प्रश्न 1 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंड के रूप में व्यक्त कीजिये:

(i) 140
(ii) 156
(iii) 3825
(iv) 5005
(v) 7429

उत्तर-

(i)

7	140
5	20
2	4
2	2
	1

का मुख्य कारक 140 = 2 × 2 × 5 × 7

140 का अभाज्य गुणनखंड

$= 2^2 \times 5 \times 7$

(ii)

13	156
3	12
2	4
2	2
	1

का मुख्य कारक 156 = 2 × 2 × 3 × 13

156 का अभाज्य गुणनखंड

$= 2^2 \times 3 \times 13$

(iii)

17	3825
5	225
5	45
3	9
3	3
	1

का मुख्य कारक 3825 = 3 × 3 × 5 × 5 × 17

3825 का अभाज्य गुणनखंड

$= 3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv)

13	5005
11	385
7	35
5	5
	1

का मुख्य कारक 5005 = 5 × 7 × 11 × 13

5005 का अभाज्य गुणनखंड

= 5 × 7 × 11 × 13

(v)

23	7429
19	323
17	17
	1

का मुख्य कारक 7429 = 17 × 19 × 23

7429 का अभाज्य गुणनखंड

= 17 × 19 × 23

प्रश्न 2 पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के LCM और HCF ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = LCM × HCF है:

(i) 26 और 91
(ii) 510 और 92
(iii) 336 और 54

उत्तर-

(i) 26 = 2 × 13

91 = 7 × 13

सार्व गुणनखंड = 13

$\therefore$ HCF = 13

LCM = 2 × 7 × 13 = 182

अब, जाँच,

दो संख्याओं का गुणनफल = LCM × HCF

$N_1 \times N_2$ = LCM × HCF

26 × 91 = 13 × 182

2366 = 2366

इति सिद्धम्

(ii) 510 = 2 × 3 × 5 × 17

92 = 2 × 2 × 23

सार्व गुणनखंड = 2

$\therefore$ HCF = 2

LCM = 2 × 2 × 3 × 5 × 17 × 23 = 23460

अब, जाँच,

दो संख्याओं का गुणनखंड = LCM × HCF

$N_1 \times N_2$ = LCM × HCF

510 × 92 = 2 × 23460

46920 = 46920

इति सिद्धम्

(iii) 336 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 7

54 = 2 × 3 × 3 × 3

सार्व गुणनखंड = 2 × 3

$\therefore$ HCF = 6

LCM = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 3024$

जाँच,

दो संख्याओं का गुणनफल = LCM × HCF

$N_1 \times N_2$ = LCM × HCF

$336 \times 54 = 6 \times 3024$

$18144 = 18144$

इति सिद्धम्

प्रश्न 3 अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के LCM और HCF ज्ञात कीजिए:

(i) 12, 15 और 21
(ii) 17, 23 और 29
(iii) 8, 9 और 25

उत्तर-

(i) $12 = 2 \times 2 \times 3$

$15 = 5 \times 3$

$21 = 7 \times 3$

सार्व गुणनखंड = 3

HCF = 3

LCM = $3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 420$

(ii) $17 = 1 \times 17$

$23 = 1 \times 23$

$29 = 1 \times 29$

HCF = 1

LCM = 17 × 23 × 29 = 11339

(iii) 8 = 2 × 2 × 2

9 = 3 × 3

25 = 5 × 5

यहाँ 1 को छोड़कर अन्य कोई सार्व गुणनखंड नहीं है:

∴ HCF = 1

LCM = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 5

= 8 × 9 × 25

= 1800

प्रश्न 4 HCF (306, 657) = 9, दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

HCF (306, 657) = 9

$LCM \times HCF = N_1 \times N_2$

$$LCM = \frac{N_1 \times N_2}{HCF}$$

$$LCM = \frac{306 \times 657}{9}$$

$$LCM = 22338$$

प्रश्न 5 जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

उत्तर- 6^n का अभाज्य गुणनखंड) = 2 × 3)^n

जबकि, कोई प्राकृत संख्या जो शून्य पर समाप्त होती है उसके अभाज्य गुणनखंड $(2 \times 5)^n$ के रूप का होता है।

अत:, 6^n शून्य पर समाप्त नहीं होगी।

प्रश्न 6 व्याख्या कीजिए 7 × 11 × 13 + 13 और 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 + 5 भाज्य संख्या क्यों है?

उत्तर- माना A = 7 × 11 × 13 + 13

= 13(7 × 11 + 1)

= 13(77 + 1)

= 13 × 78

अत :यह एक भाज्य संख्या है क्योंकि इसके अभाज्य गुणनखंड में 1 को छोड़कर अन्य दो गुणनखंड हैं।

इसी प्रकार,

माना B = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 + 5

= 5(7 × 6 × 4 × 3 × 2 × 1 + 1)

= 5 × (1008 + 1)

= 5 × 1009

अत :यह भी एक भाज्य संख्या है क्योंकि इसके भी अभाज्य गुणनखंड में 1 को छोड़कर अन्य दो गुणनखंड हैं।

प्रश्न 7 किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारंभ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रांरभिक स्थान पर मिलेंगे?

उत्तर- एक चक्कर में सोनिया 18 मिनट लेती हैं।

रवि एक चक्कर में 12 लगाता है।

वे दोनों एक ही स्थान पर LCM(18, 12) मिनट के बाद मिलेंगे।

अत:

18 = 2 × 3 × 3

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$HCF = 2 \times 3 = 6$

$LCM = \dfrac{18 \times 12}{6}$

= 36 मिनट

प्रश्नावली 1.3 (पृष्ठ संख्या 17)

प्रश्न 1 सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर-

इसके विपरीत मान लीजिए कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है

इसलिए,

$\frac{p}{q} = \sqrt{5}$

यदि p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित करके $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहाँ a और b सहअभाज्य है।

अतः $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

या $\sqrt{5}b = a$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$5b^2 = a^2$

या $b^2 = \frac{a^2}{5}$

यहाँ $5a^2$ को विभाजित करता है अत :5a को भी विभाजित करेगा... (i)

[प्रमेय 1.3 द्वारा[

अत: a = 5c माना [क्योंकि a^5 द्वारा विभाजित होता है अर्थात a का 5 कोई गुनाखंड है]

$5b^2 = a^2$ में $a = 5c$ रखने पर

$\Rightarrow 5b^2 = (5c)^2$

$\Rightarrow 5b^2 = 25c^2$

$\Rightarrow b^2 = 5c^2$

$\Rightarrow c^2 = \frac{b^2}{5}$

यहाँ 5 b^2 को विभाजित करता है अत :5 b को भी विभाजित करेगा)... ii)

[प्रमेय 1.3 द्वारा[

समीकरण) i) तथा) ii) से हम पाते है कि 5 a तथा b दोनों को विभाजित करता है जिसमें 5 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है।

इससे हमारी इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a तथा b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

यह विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि

अत: $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2 सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर-

इसके विपरीत मान लीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

इसलिए,

$$\frac{p}{q} = 3 + 2\sqrt{5}$$

और p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित कर एक सह-अभाज्य संख्या a तथा b प्राप्त कर सकते हैं।

अतः $3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}$

या $2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3$

या $2\sqrt{5}=\frac{a-3b}{b}$

या $\sqrt{5}=\frac{a-3b}{2b}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 2 तथा 3 भी पूर्णांक है।

इसलिए $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि बायां पक्ष $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इससे एक विरोधाभासी परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है।

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अत: $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 3 सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय है:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(ii) $7\sqrt{5}$
(iii) $6+\sqrt{2}$

उत्तर-

(i)

इसके विपरीत मान लजिए कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

इसलिए,

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित करके $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहॉ a और b सहअभाज्य है।

अतः $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$

या $b = a\sqrt{2}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$b^2 = 2a^2$

या $a^2 = \frac{b^2}{2}$

यहाँ 2 b^2 को विभाजित करता है अत: 2, b को भी विभाजित करेगा ...(i)

[प्रमेय 1.3 द्वारा]

अत: b = 2c माना [क्योंकि a 5 द्वारा विभाजित होता है]

$b^2 = 2a^2$ में $b = 2c$ रखने पर,

$\Rightarrow (2c^2) = 2a^2$

$\Rightarrow 4c^2 = 2a^2$

$\Rightarrow 2c^2 = a^2$

$\Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{2}$

यहाँ $2a^2$ को विभाजित करता है अत :2a को भी विभाजित करेगा।)... ii)

[प्रमेय 1.3 द्वारा[

समीकरण) i) तथा) ii) से हम पाते है कि 2a तथा b दोनों को विभाजित करता है जिसमें 2 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है।

इससे हमारी इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a तथा b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है, क्योंकि हमने a तथा b को सह-अभाज्य प्राप्त किया था।

यह विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि

अतः $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii)

इसके विपरीत मान लीजिए कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

इसलिए,

$\frac{p}{q} = 7\sqrt{5}$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से विभाजित करके $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहा a और b सह-अभाज्य है।

अतः $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

या $7\sqrt{5}b = a$

या $\frac{a}{7b} = \sqrt{5}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 7 भी पूर्णांक है।

इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि दाया पक्ष $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इससे एक विरोधाभास परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है।

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii)

इसके विपरीत मान लीजिए कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

इसलिए,

$$\frac{p}{q}=6+\sqrt{2}$$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से विभाजित कर एक सह-अभाज्य संख्या a और b प्राप्त कर सकते है।

अतः $6+\sqrt{2}=\frac{a}{b}$

या $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-6$

या $\sqrt{2}=\frac{a-6b}{b}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 6 भी पूर्णांक है।

इसलिए $\frac{a-6b}{b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि दाया पक्ष $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इससे एक विरोधाभास परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है।

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 1.4 (पृष्ठ संख्या 17)

प्रश्न 1 बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं:

(i) $\frac{13}{3125}$

(ii) $\frac{17}{8}$

(iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$

(viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$

(x) $\frac{77}{210}$

उत्तर-

(i)

$$= \frac{13}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$= \frac{13}{5^5}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 5^5 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अत: यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

(ii)

$$= \frac{17}{2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{17}{2^3}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 2^3 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अत: यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

(iii)

$$= \frac{64}{5 \times 7 \times 13}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 2^3 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अत: यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

(iv)

$$= \frac{15}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times5}$$

$$= \frac{15}{2^6\times5^2}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 2^3 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अत: यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

(v)

7	343
7	49
	1

का मुख्य करक है:

343 = 7 × 7 × 7

343 का अभाज्य गुणनखंड 7 × 7 × 7 है।

$\Rightarrow \frac{29}{7^3}$

7^3 को $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है इसलिए $\frac{29}{343}$ यह एक सांत दशमलव प्रसार नहीं है।

(vi) हर $2^3\ 5^2$ का अभाज्य गणनखंड को $2^n \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है इसलिए $\frac{23}{2^3 5^2}$ एक शांत दशमलव प्रसार है।

(vii) $2^2\ 5^7\ 7^5$ को $2^n \times 5^n$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है इसलिए $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ एक शांत दशमलव प्रसार नहीं है।

(viii) हर 5 को $2^n \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है इसलिए $\frac{6}{15}$ या $\frac{2}{5}$ एक शांत दशमलव प्रसार है।

(ix)

5	50
5	10
2	2
	1

50 का अभाज्य गुणनखण्ड = 5 × 5 × 2 है।

अतः $\frac{35}{50} = \frac{5\times7}{5\times5\times2} = \frac{7}{5\times2}$

हर 5 × 2 पहले ही $2^n \times 5^n$ के रूप में है अतः यह शांत दशमलव प्रसार है।

(x) $\frac{11}{2\times5\times3}$ में हर 2 × 5 × 3 को $2^n \times 5^n$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है इसलिए $\frac{77}{210}$ एक शांत दशमलव प्रसार नहीं है।

प्रश्न 2 ऊपर दिए गए प्रश्न में उन परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारों को लिखिए जो शांत हैं:

(i) $\frac{13}{3125}$

(ii) $\frac{17}{8}$

(iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$

(viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$

(x) $\frac{77}{210}$

उत्तर-

(i)

$$\frac{13}{3125}=\frac{13}{5\times5\times5\times5\times5}=\frac{13}{5^5}\times\frac{2^5}{2^5}$$

$$=\frac{13\times32}{(5\times2)^5}=\frac{416}{10^5}=0.00416$$

(ii)

$$\frac{17}{8}=\frac{17}{2\times2\times2}=\frac{17}{2^3}\times\frac{5^3}{5^3}$$

$$=\frac{17\times125}{(2\times5)^3}=\frac{2125}{10^3}=2.125$$

(iii) इसका दशमलव प्रसार सशांत आवर्ती होगा।

(iv)

$$\frac{15}{1600}=\frac{3\times5}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times5}=\frac{3}{2^6\times5}\times\frac{5^5}{5^5}$$

$$=\frac{3\times3125}{(2\times5)^6}=\frac{9375}{10^6}=0.009375$$

(v) इसका दशमलव प्रसार अशांत आवर्ती होगा।

(vi)

$$\frac{23}{2^35^2}=\frac{23}{2^3\times5^2}\times\frac{5}{5}$$

$$=\frac{23\times5}{(2\times5)^3}=\frac{115}{10^3}=0.115$$

(vii) इसका दशमलव प्रसार अशांत आवर्ती होगा।

(viii)

$$\frac{6}{15} = \frac{2\times3}{3\times5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2}$$

$$= \frac{2\times2}{2\times5} = \frac{4}{10} = 0.4$$

(ix)

$$\frac{35}{50} = \frac{5\times7}{2\times5\times5} = \frac{7}{2\times5} = \frac{7}{10} = 0.7$$

(x) इसका दशमलव प्रसार आवर्ती होगी।

प्रश्न 3 कुछ वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार निचे दर्शाए गए है। प्रत्येक स्तिथि के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है तो q के अभाज्य गुणनखंड के बारे क्या कह सकते है?

(i) 43.123456789
(ii) 0.120120012000120000....
(iii) $43.\overline{123456789}$

उत्तर-

(i) क्योंकि इसका दशमलव प्रसार शांत है, इसलिए, यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है। q का अभाज्य गुणनखंड $2^m\ 5^n$ के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक है।
(ii) क्योंकि इसका दशमलव प्रसार असांत तथा अनावर्ती है, इसलिए, यह अपरिमेय संख्या है।
(iii) क्योंकि इसका दशमलव प्रसार अशांत तथा आवर्ती है इसलिए, यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है। q का अभाज्य गुणनखंड $2^m\ 5^n$ के अतिरिक्त कोई और भी अभाज्य संख्या है।

बहुपद क्या है?

चर, अचर, चर के गुणांक तथा ऋणेतर घातांक के जोड़, घटाव या गुणन की क्रिया वाले बीजगणितीय व्यंजक को बहुपद कहा जाता हैं।

उदाहरण

$x^2 + 2x + 1$, एक बहुपद बीजगणितीय व्यंजक है।

- $2x^5 + 4xy^3 + 6x^2$
- $4y^3 + y^2 + yz$
- $3x + x^2 - x^4$
- $5x^6y + 6px^2yx^2 - 8ax$

घात n वाले एक चर x वाले बहुपद को निम्न रूप में व्यक्त किया जाता हैं।

$P(x) = anx^n + an\text{-}1\ x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1x + a_0$

जहाँ an ≠ 0 और an, a n -1, a_1, a_0 = अचर

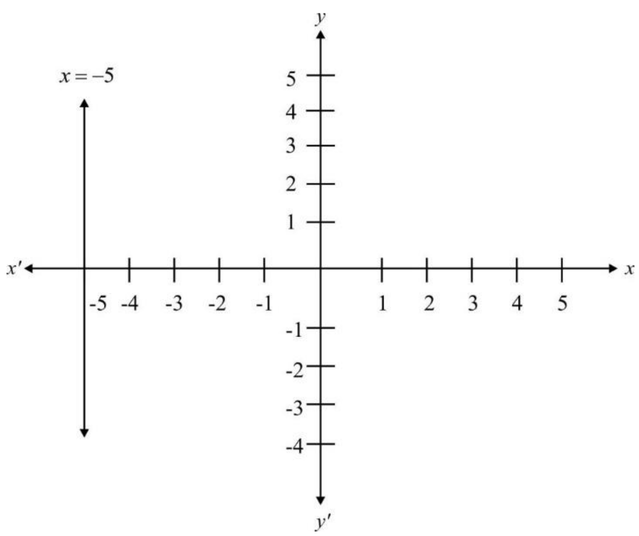
बहुपद का घात

पदों के घातों में से महत्तम को बहुपद का घात (डिग्री) कहते हैं। यदि एक से अधिक चर राशियाँ हों, तो विभिन्न पदों में चर राशियों के घातों के योगफलों में से महत्तम को बहुपद का घात कहते हैं।

उदाहरण

$2y^2 - 3y + 4$, बहुपद बीजगणितीय व्यंजक में चर y की अधिकतम घात 2 है इसलिए बहुपद का घात 2 है।

रैखिक बहुपद



घात 1 के बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं। उदाहरण के लिए, $2x - 3$, $\sqrt{3}\,x + 5$, $y + \sqrt{2}$ आदि।

द्विघात बहुपद

घात 2 के बहुपद को द्विघात बहुपद कहते हैं। द्विघात शब्द क्वाडरेट शब्द से बना है, जिसका अर्थ है 'वर्ग'।

उदाहरण के लिए $2x^2 + 3x - 2/5$, $y^2 - 2$ आदि।

अधिक व्यापक रूप में, x में कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याये हैं और $a \neq 0$ है, के प्रकार का होता है।

त्रिघात बहुपद

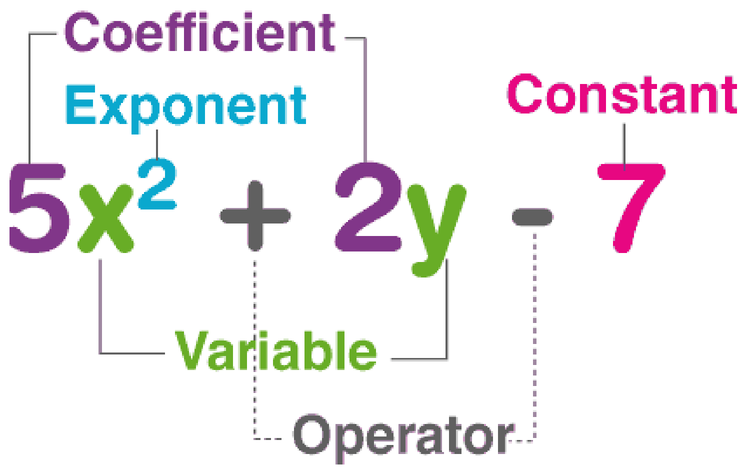
घात 3 का बहुपद त्रिघात बहुपद कहलाता है। त्रिघात बहुपद के कुछ उदाहरण निम्न हैं:

$2 - x^3$, x^3, $x^3 - x^2 + 3$ आदि

वास्तव में, त्रिघात बहुपद का सबसे व्यापक रूप है: $ax^3 + bx^2 + cx + d$, जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्याये हैं और $a \neq 0$ है।

बीजीय बहुपद (Algebraic Polynomial)

चर एवं अचर बहुपद को शामिल करने से जो पद प्राप्त होता हैं उसे बीजीय बहुपद कहा जाता हैं।



जैसे :-

- x + 2
- x + 6
- y – 4
- 64 + a

बीजीय बहुपद दो प्रकार के होते हैं।

1. अचर बहुपद

बहुपद का ऐसा पद जिसका मान हमेशा स्थिर रहता हैं वह अचर बहुपद कहलाता हैं।

जैसे :-

- 4x + 5,

- $2x - 2$,
- $8y - 5$,
- 2 और 5 अचर बहुपद है क्योंकि इनका मान सदैव स्थिर रहता हैं।

Note :-

- अचर बहुपद वास्तविक या काल्पनिक दोनों संख्या हो सकते हैं।
- अचर बहुपद का घात शून्य होता हैं।

2. चर बहुपद

बहुपद का ऐसा पद जिसका मान हमेशा बदलता रहता हैं वह चर बहुपद कहलाता हैं।

जैसे :-

- $x^2 + 4x + 2$
- $2x^2 + 4x + 8$

Note :-

- चर बहुपद कभी भी काल्पनिक नही होता हैं।

बहुपद का शून्यक

एक वास्तविक संख्या k बहुपद p(x) का शून्यक कहलाती है, यदि $P(k) = 0$ है।

व्यापक रूप में यदि $p(x) = ax + b$ का एक शून्यक k है तो $p(k) = ak + b = 0$, अर्थात $k = -b/a$ होगा। अतः रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक $-b/a = -$ (आचार पद)/ x का गुणांक है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. घातों 1, 2 और 3 के बहुपद क्रमशः रैखिक बहुपद, द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।

2. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है, के रूप का होता है।

3. एक बहुपद p(x) के शून्यक उन बिदुओं के x-निर्देशांक होते हैं जहाँ $y = p(x)$ का ग्राफ x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध को एक उदाहरण के माध्यम से समझने की कोशिश करते हैं।

इसके लिए एक द्विघात बहुपद माना $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ लीजिए। यहाँ हमें मध्य पद "- 8x" को दो ऐसे पदों के योग के रूप में विभक्त करना है जिनका गुणनफल $6x \times 2x = 12x^2$ हो।

अतः, हम इसको लिख सकते हैंः

$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 2x - 6x + 6$

$= 2x(x - 1) - 6(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$

$= 2(x - 1)(x - 3)$

इसलिए, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ का मान $x = 1$ और $x = 3$ के लिए शून्य होगा।

अतः कह सकते हैं कि द्विघात बहुपद $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ के शून्यंक 1 और 3 हैं।

शून्यंकों का योग

$= 1 + 3 = 4 = -(-8)/2$

$= -$ (x का गुणांक)/(x^2 का गुणांक)

शून्यंकों का गुणनफल

शून्यंकों का गुणनफल $= 1 \times 3 = 3 = 6/2 =$ (अचर पद)/(x^2 का गुणांक)

व्यापक रूप में यदि α, β द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हों तो इसके अनुसार $x - \alpha$ और $x - \beta$, $p(x)$ के गुणनखण्ड होंगे।

अतः $ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$, जहाँ k अचर है।

$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$

दोनों ओर के x^2, x के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना करने पर, हम पाते हैं:

$a = k$, $b = -k(\alpha + \beta)$ और $c = k\alpha\beta$

इससे प्राप्त होता है $\alpha + \beta = -b/a$

और $\alpha\beta = c/a$

अर्थात शून्यको का योग $\alpha + \beta = -b/a = -$ (x का गुणांक)/ (x^2 का गुणांक)

शून्यंकों का गुणनफल $\alpha\beta = c/a =$ (अचर पद)/(x^2 का गुणांक)

शून्यको के योग और गुणनफल से द्विघात बहुपद ज्ञात करना

इस विधि को एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं:

उदाहरण

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः –3 और 2 हैं।

हल:

माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α, β हैं।

हम पाते हैं $\alpha + \beta = -b/a = -3$

$\alpha\beta = c/a = 2$

यदि a = 1 है तो b = 3 और c = 2 होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद, जिसमें दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + 3x + 2$ है।

1. एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं और एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं।

2. यदि α, β द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हों तो

$\alpha + \beta = -b/a$

और $\alpha\beta = c/a$

बहुपदों का जोड़

जब हम दो या दो से अधिक बहुपदो को जोड़ते हैं तो केवल समान पद जोड़े जाते हैं इसका अर्थ है कि समान चर और समान घात वाले पद जोड़े जाते हैं। असमान पदों को नहीं जोड़ा जाएगा, वो अपरिवर्तित रहेंगे। जोड़ में, परिणामी बहुपद की घात समान रहती हैं।

Q.1 बहुपद $5x^2 + 4x + 2$ और $8x^2 + 2x + 5$ को जोड़िए?

हलः- $5x^2 + 4x + 2 + 8x^2 + 2x + 5$

$(5x^2 + 8x^2) + (4x + 2x) + (2 + 5)$

$13x^2 + 6x + 7$

Ans. $13x^2 + 6x + 7$

Q.2 बहुपद $3a^2 + 5ab + 2$ और $7a^2 + 6 + 9ab$ को जोड़िए?

हलः- $3a^2 + 5ab + 2 + 7a^2 + 6 + 9ab$

$(3a^2 + 7a^2) + (5ab + 9ab) + (2 + 6)$

$10a^2 + 14ab + 8$

Ans. $10a^2 + 14ab + 8$

Q.3 बहुपद $3ab^3 + 6xy^4 + 4x^2$ और $8x^2 + 12ab^3 + 2xy^4$ को जोड़िए?

हलः- $3ab^3 + 6xy^4 + 4x^2 + 8x^2 + 12ab^3 + 2xy^4$

$(6xy^4 + 2xy^4) + (3ab^3 + 12ab^3) + (4x^2 + 8x^2)$

$8xy^4 + 15ab^3 + 12x^2$

Ans. $8xy^4 + 15ab^3 + 12x^2$

Q.4 बहुपदो $4x^2 + 8xy + 5y^2$ और $8y^2 - 3xy + 3x^2$ को जोड़िए

हलः- $4x^2 + 8xy + 5y^2 + 8y^2 - 3xy + 3x^2$

$(4x^2 + 3x^2) + (8xy - 3xy) + (6y^2 + 8y^2)$

$7x^2 + 5xy + 14y^2$

Ans. $7x^2 + 5xy + 14y^2$

बहुपदो का घटाना

बहुपदों का घटाव बहुपदों के योग के समान ही होता है। इसमें समान पदों को घटाया जाता है और असमान पदों में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इसमें भी परिणामी बहुपद की घात वही रहेगी।

Q.1 बहुपद $5xy + 8xy^2 + 6x^2y + 8y^3$ को $3xy + 2xy^2 + x^2y + 2Y^3$ में से घटाएं।

हल:- $(5xy + 8xy^2 + 6x^2y + 8y^3) - (3xy^2 + 2xy^2 + x^2y + 2Y^3)$

$(8y^3 - 2Y^3) + (6x^2y - x^2y) + (8xy^2 - 2xy^2) + (5xy - 3xy)$

$5y^3 + 5x^2y + 6xy^2 + 2xy$

Ans. $5y^3 + 5x^2y + 6xy^2 + 2xy$

बहुपदों का गुणा

जब दो या दो से अधिक बहुपदों को गुणा किया जाता है तो परिणाम हमेशा उच्च घात वाला बहुपद होता है। लेकिन दो बहुपदों में, यदि एक या दोनों बहुपद अचर बहुपद हों तो घात वही रहेगी। बहुपदों के गुणा में, समान चरों की घातो को घातांक के नियमों द्वारा जोड़ा जाता है।

Q.1 बहुपद $2x \times 4y$ का गुणा कीजिए?

हल:-$2x \times 4y$

$= (2 \times 4) \times (x \times y)$

$= 8xy$

Ans. $8xy$

Q.2 बहुपद $5a \times 8b$ का गुणा कीजिए?

हल:- $5a \times 8b$

$= (5 \times 8) \times (a \times b)$

$= 40ab$

Ans. $40ab$

Q.1 बहुपद $7t \times 2s \times 3r$ का गुणा कीजिए?

हल:- $5a \times 2b \times 7c$

$= (5 \times 2 \times 7)\times(a \times b \times c)$

$= 70\ abc$

Ans. 70 abc

Q.4 बहुपद $3p^2q^2 \times 12p^3q^3$ का गुणा कीजिए?

हल:- $3p^2q^2 \times 12p^3q^3$

$(3 \times 12) \times (p^2 \times p^3 \times q^2 \times q^3)$

$= 36\ p^5q^5$

Ans. $36\ p^5q^5$

बहुपदों का भाग

बहुपद के विभाजन में, परिणाम कम घात वाला बहुपद होता है और यदि बहुपदों में से एक अचर बहुपद है तो घात वही रहेगी।

Q.1 बहुपद $6a^2 \div 3a$ से भाग कीजिए?

हल:- $6a^2 \div 3a$

$3 \times 2 \times a \times a/3 \times a$

2a

Ans. 2a

Q.2 बहुपद $(2xy + 6x) \div 2x$ से भाग दीजिए?

हल:- $(2xy + 6x) \div 2x$

$= (2xy + 6x)/2x$

$= 2x(y + 3)/2x$

$= y + 3$

Ans. $y + 3$

त्रिघात बहुपद के शून्यक

यदि किसी त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक α, β, γ हों तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$\alpha + \beta + \gamma = -b/a$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = c/a$

और $\alpha\beta\gamma = -d/a$

त्रिघात बहुपद का उदाहरण

जांच कीजिए कि त्रिघात बहुपद $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$, के शून्यक 3,-1 और -1/3 हैं। इसके पश्चात् शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

उदाहरण का हल

दिए हुए बहुपद कि तुलना $ax^3 + bx^2 + cx + d$ से करने पर हम पाते हैं कि

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$

एक-एक करके शून्यकों के मान रखने पर

$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$

$p(-1/3) = 3 \times (-1/3)^3 - 5 \times (-1/3)^2 - 11 \times (-1/3) - 3 = -1/9 + 5/9 + 11/3 - 3 = -2/3 + 2/3 = 0$

अतः $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक 3,-1 और -1/3 हैं।

इसलिए हम $\alpha = 3$, $\beta = -1$ और $\gamma = -1/3$ लेते हैं अब

$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + (-1/3) = 2 - 1/3 = 5/3 = -b/a$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times (-1/3) + (-1/3) \times 3 = -3 + 1/3 - 1 = -4 + 1/3 = -11/3 = c/a$

और $\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times (-1/3) = 1 = -(-3)/3 = -d/a$ है।

स्मरणीय तथ्य

यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों तो

बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म

आप जानते हैं कि एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं। परंतु, यदि आपको केवल एक शून्यक दिया हो, तो क्या आप अन्य दो शून्यक ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरण के लिए, त्रिघात बहुपद $x^3 - 3x^2 - x + 3$ को लेते हैं। माना इसका एक शून्यक 1 है तो $x^3 - 3x^2 - x + 3$ का एक गुणनखंड $x - 1$ है। इसलिए $x^3 - 3x^2 - x + 3$ को $x - 1$ से भाग देकर $x^2 - 2x - 3$ प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्राप्त द्विघात बहुपद के गुणनखंड करने के लिए मध्य भाग को विभक्त करके किया जा सकता है।

$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 3x + x - 3$

$= x(x - 3) + 1(x - 3) = (x - 3)(x + 1)$

इसलिए, त्रिघात बहुपद के सभी शून्यक 1, -1 और 3 हैं।

बहुपद को भाग देने की एल्गोरिथ्म (कलन विधि)

एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग देने के एल्गोरिथ्म (कलन विधि) के विधिवत चरण निम्न प्रकार से हैं। इसको समझाने के लिए एक उदाहरण पर विचार करते हैं।

यदि p(x) और g(x) कोई दो बहुपद हैं जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद q(x) और r(x) ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

यह निष्कर्ष बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म कहलाता है।

उदाहरण

$2x^2 + 3x + 1$ को $x + 2$ से भाग दीजिये।

हल:

ध्यान दीजिए कि जब शेषफल या तो शून्य हो जाए या इसकी घात भाजक की घात से कम हो जाए, तो हम भाग देने की प्रक्रिया को रोक देते हैं।

भाजक	भाज्य	भागफल	शेषफल
$x + 2$	$2x^2 + 3x + 1$	$2x - 1$	3

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$2x^2 + 3x + 1 = (x + 2) \times (2x - 1) + 3$

याद रखने योग्य बातें

1. यह प्रक्रिया किसी बहुपद को एक द्विघात बहुपद से भाग देने के लिए भी भी प्रयोग में लाई जा सकती है।

2. विभाजन एल्गोरिथ्म के अनुसार दिए गए बहुपद p(x) और शून्येतर बहुपद g(x) के लिए दो ऐसे बहुपदों q(x) तथा r(x) का अस्तित्व है कि

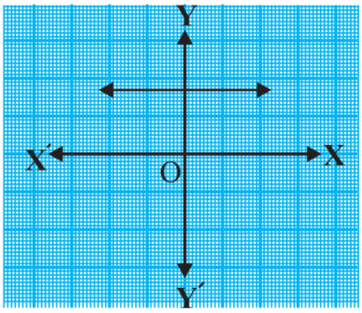
$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

जहाँ, $r(x) = 0$ है या घात $r(x) <$ घात g(x) है।

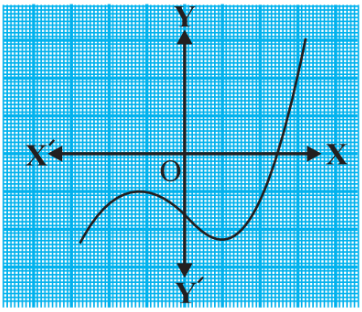
NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 2.1 (पृष्ठ संख्या 31)

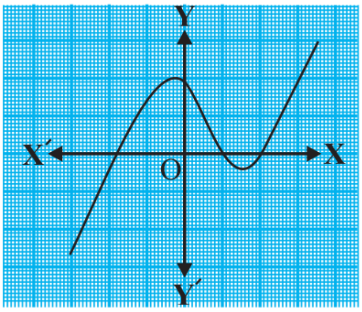
प्रश्न 1 किसी बहुपद p(x) के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति 2.10 में दिया गया है। प्रत्येक स्थिति में, p(x) के शुन्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए:



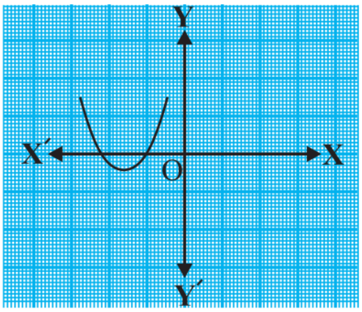
(i)



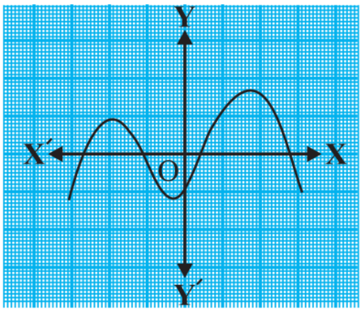
(ii)



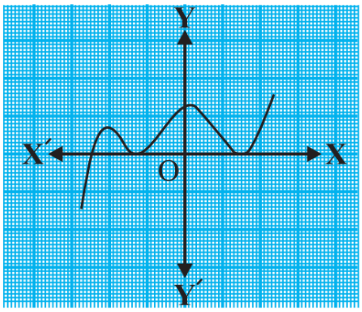
(iii)



(iv)



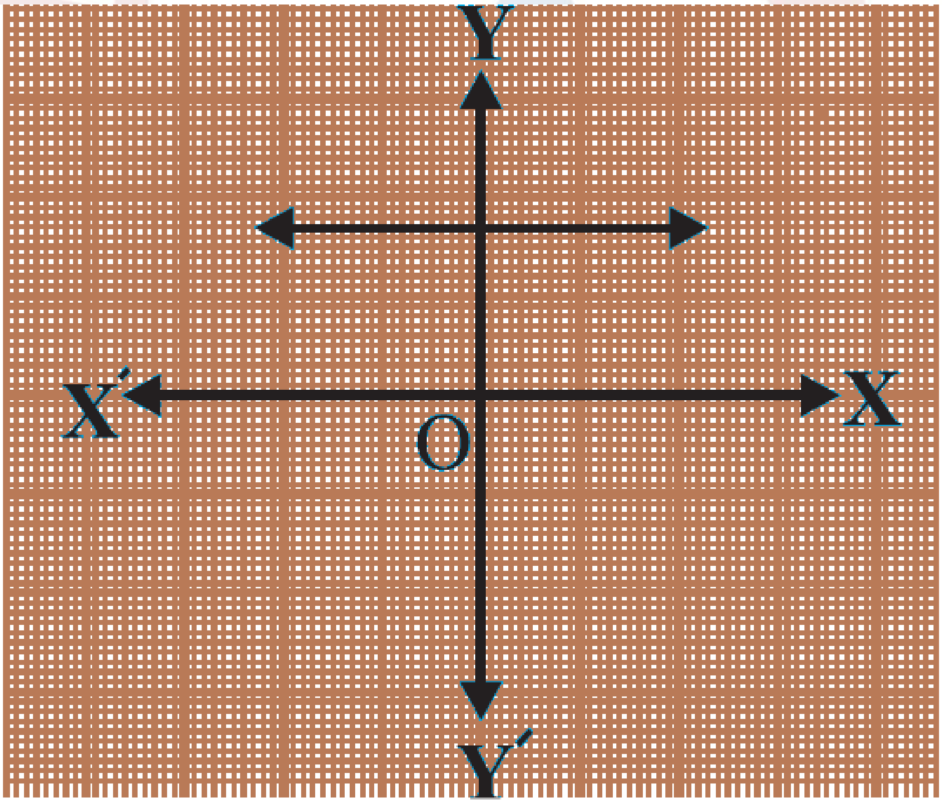
(v)



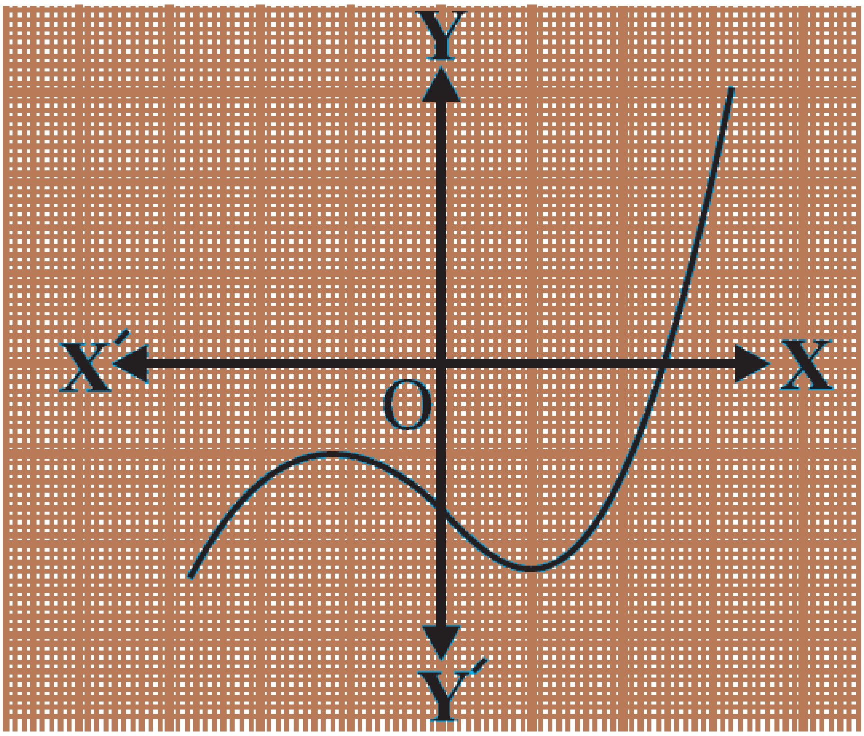
(vi)

उत्तर-

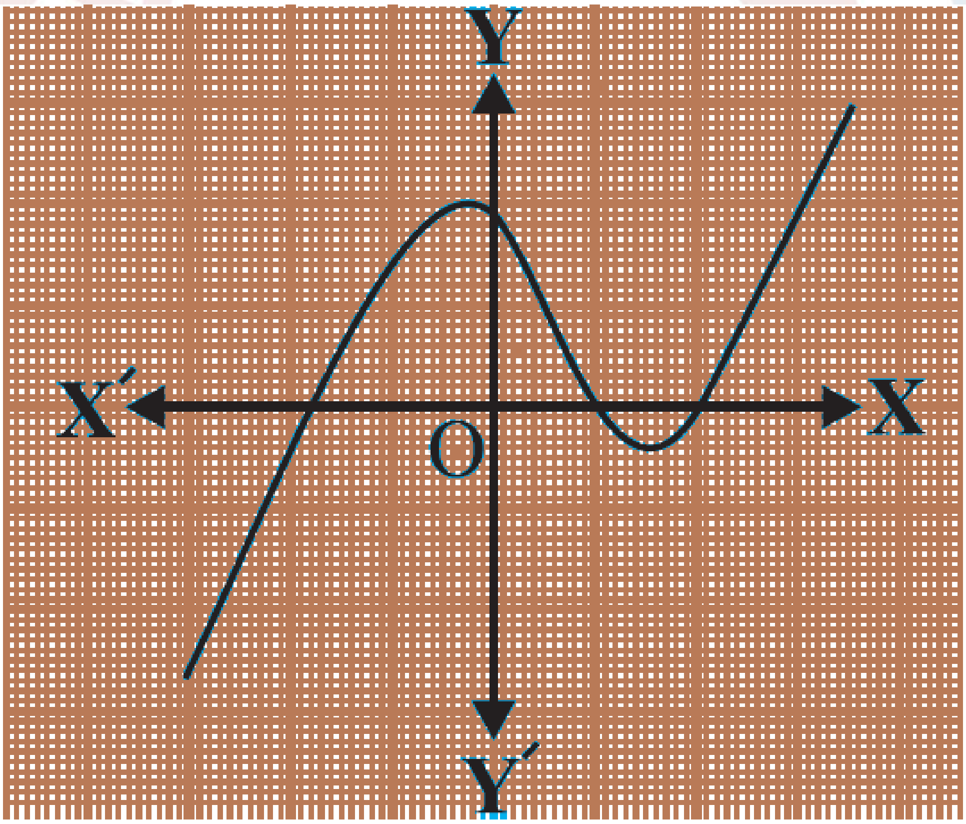
(i) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 0 (क्योंकि ग्राफ रेखा x अक्ष को नहीं काटती है)



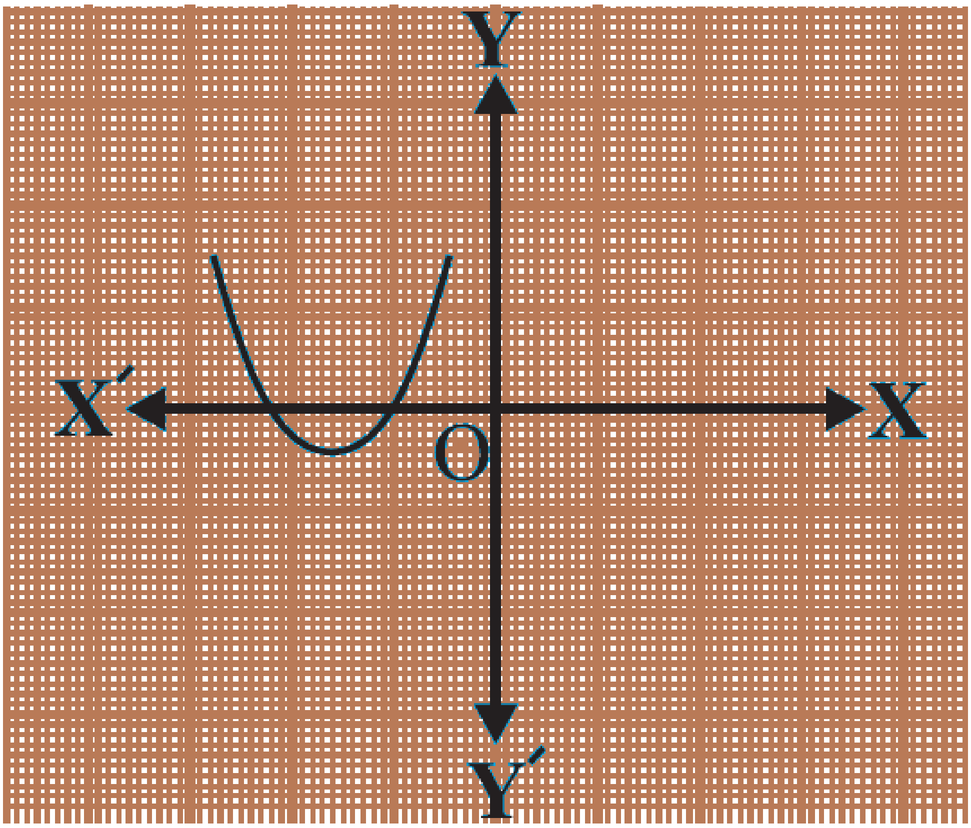
(ii) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 1 (क्योंकि ग्राफ x अक्ष को 1 बार काटती है)



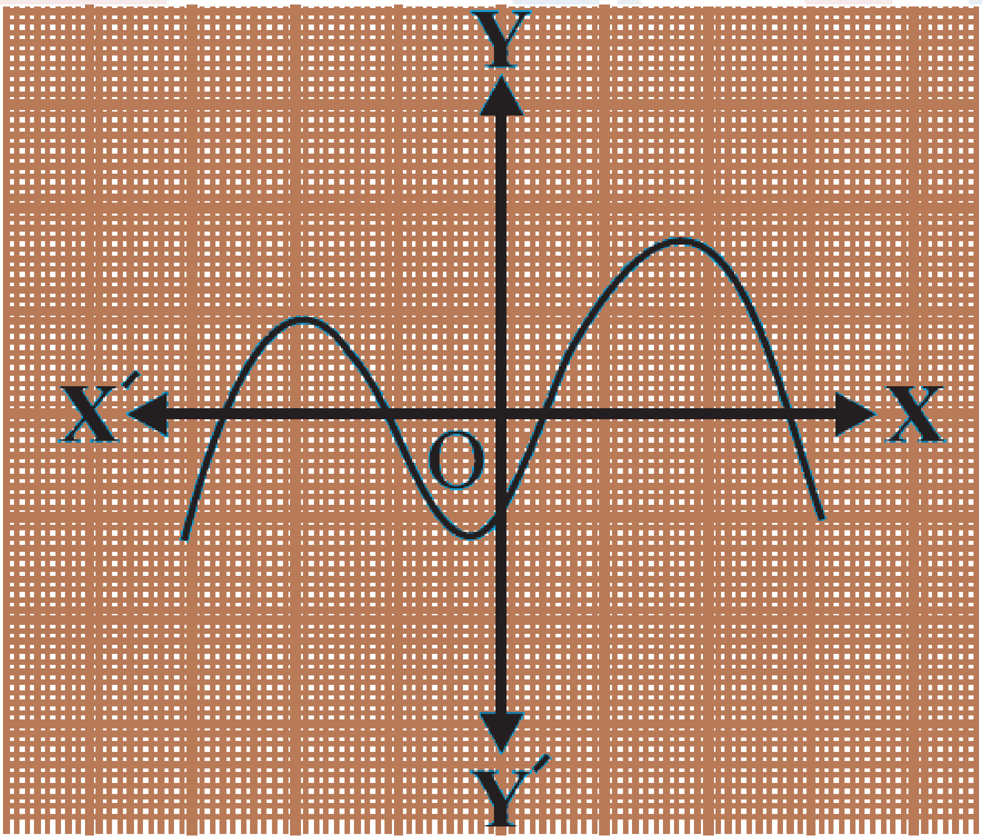
(iii) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 3



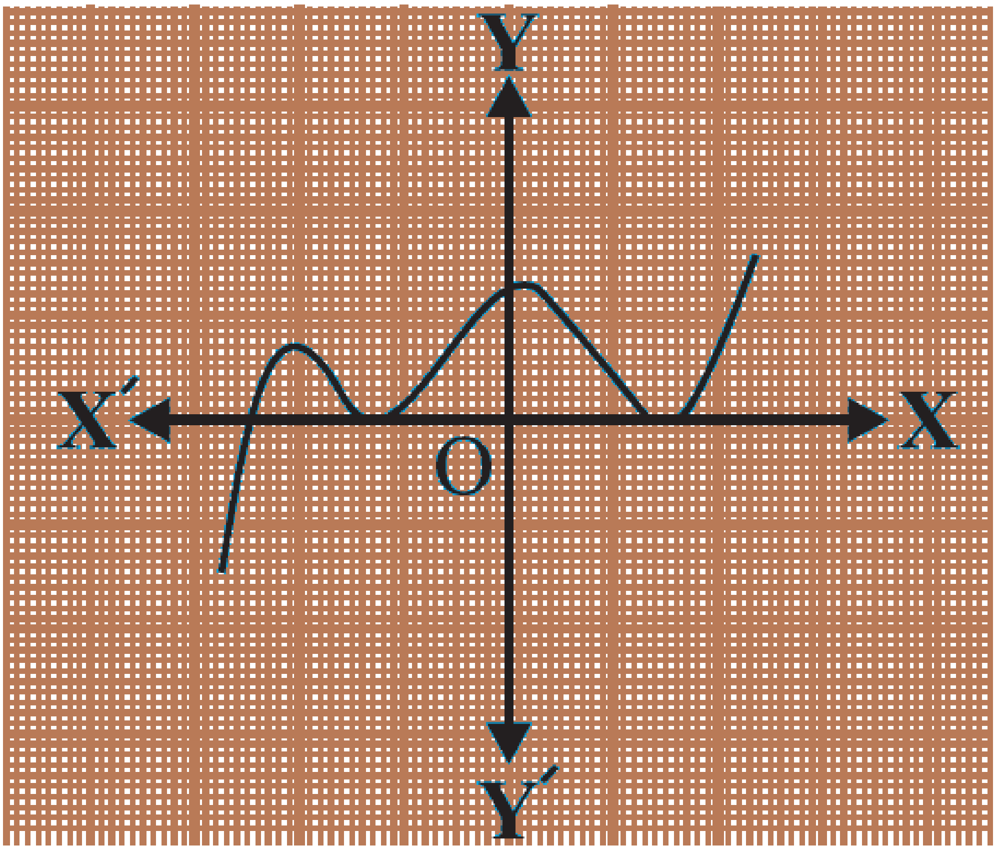
(iv) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 2



(v) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 4



(vi) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 3



प्रश्नावली 2.2 (पृष्ठ संख्या 36)

प्रश्न 1 निम्न द्विघात बहुपदों के शुन्यक ज्ञात कीजिए और शुन्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $x^2 - 2x - 8$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$

(v) $t^2 - 15$

(vi) $3x^2 - x - 4$

उत्तर-

(i) गुणनखंड विधि से:

$x^2 - 2x - 8$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x(x - 4) + 2(x - 4)$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0, x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = 4, x = -2$

शून्यक; $\alpha = 4, \beta = -2$

शून्यको तथा गुणांक के बिच संबंध की सत्यता की जाँच:

a = 1, b = -2 और c = -8

शुन्यंको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$$[4 + (-2)] = \frac{-(-2)}{1}$$

$$2 = 2 \ldots \text{(i)}$$

शुन्यंको का गुणनखंड $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$$[4 + (-2)] = \frac{(-8)}{1}$$

$$-8 = -8 \ldots \text{(ii)}$$

दोनों स्तिथतियों में संबंध सत्य है।

(ii) गुणनखंड विधि से:

$4s^2 - 4s + 1$

$\Rightarrow 4s^2 - 2s - 2s + 1 = 0$

$\Rightarrow 2s(2s - 1) - 1(2s - 1) = 0$

$\Rightarrow (2s - 1)(2s - 1) = 0$

$\Rightarrow 2s - 1 = 0, 2s - 1 = 0$

$\Rightarrow 2s = 1, 2s = 1$

$\Rightarrow s = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{1}{2}$ और $\beta = \frac{1}{2}$

गुणांक a = 4, b = -4 और c =

शुन्यंको तथा गुणांकों के बिच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच:

शुन्यंको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-(-4)}{4}$

$\Rightarrow \frac{1+1}{2} = \frac{4}{4}$

$\Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$

$\Rightarrow 1 = 1 \ldots (\text{i})$

शुन्यंको का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \ldots (\text{ii})$

अतः दोनों (i) और (ii) स्तिथतियों म संबंध सत्य है।

(iii) $6x^2 - 3 - 7x = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 7x - 3 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 9x + 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow 3x(2x - 3) + 1(2x - 3) = 0$

$\Rightarrow (2x - 3)(3x + 1) = 0$

$\Rightarrow 2x - 3 = 0, 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x = 3, 3x = -1$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = \frac{-1}{3}$

अतः $\alpha = \frac{3}{2}$ और $\beta = \frac{-1}{3}$

गुणांक a = 6, b = -7 और c = -3

शून्यांको तथा गुणांकों के बिच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच:

शून्यांको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{-1}{3}\right) = \frac{-(-7)}{6}$

$\Rightarrow \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6}$

$\Rightarrow \frac{7}{6} = \frac{7}{6} \ldots (i)$

शून्यांको का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{-3}{6}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{-1}{3} = \frac{-3}{6}$

(iv) $4u^2 + 8u = 0$

$4u(u + 2) = 0$

$4u = 0$, और $u + 2 = 0$

$u = 0, u = -2$

अतः a = 0 और b = -2

गुणांक a = 4, b = 8 और c = 0

शून्यांको तथा गुणांकों के बिच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच;

शून्यांको का योग $(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a}$

$\Rightarrow 0+(-2)=\frac{-8}{4}$

$\Rightarrow -2=-2\ldots(\text{i})$

शून्यांको का गुणनफल $(\alpha\beta)=\frac{0}{4}$

$\Rightarrow 0\times -2=\frac{0}{4}$

$\Rightarrow 0=0\ldots(\text{ii})$

अतः दोनों (i) और (ii) स्तिथतियों में सम्बन्ध सत्य है।

(v)

$t^2 - 15 = 0$

$\Rightarrow t^2 = 15$

$\Rightarrow t=\sqrt{15}=\pm\sqrt{15}$

$\Rightarrow t=\sqrt{15}, t=-\sqrt{15}$

अतः $\alpha=\sqrt{15}$ और $\beta=-\sqrt{15}$

गुणांक a = 1, b = 0, और c = -15

शून्यांको तथा गुणांकों के बिच संबंध की सत्यता की जाँच:

शुन्यंको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow \sqrt{15} + (-\sqrt{15}) = \frac{-(0)}{1}$

$\Rightarrow 0 = 0 \ldots (i)$

शुन्यांको का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \sqrt{15}(-\sqrt{15}) = \frac{-15}{1}$

$\Rightarrow -15 = -15 \ldots (ii)$

अतः दोनों (i) और (ii) स्तिथतियों सम्बन्ध सत्य है।

(vi) $\Rightarrow$ $3x^2 - 4x + 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow x(3x - 4) + 1(3x - 4) = 0$

$\Rightarrow (3x - 4)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow$ (3x - 4) = 0, और) x + 1) = 0

$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$, और $x = -1$

अतः $\alpha = \frac{4}{3}$ और $\beta = -1$

गुणांक a = 3, b = -1 और c = -1

शून्यांको तथा गुणांकों के बिच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच:

शून्यांको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + (-1) = \frac{-(-1)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \ldots (\text{i})$$

शून्यांको का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times (-1) = \frac{(-4)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} = \frac{-4}{3} \ldots (2)$$

अतः दोनों (i) और (ii) स्थितियों में संबंध सत्य है।

प्रश्न 2 एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शुन्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं:

(i) $\frac{1}{4}, -1$

(ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$

(iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1,1$

(v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

(vi) $4,1$

उत्तर-

(i)

दिया है: $\alpha+\beta=\frac{1}{4}, \alpha\beta=-1$

चूँकि $ax^2+bx+c=kx^2-k(\alpha+\beta)x+k\alpha\beta$

तुलना करने पर,

$a=k, b=-k(\alpha+\beta)$ और $c=k\alpha\beta$

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{1}{4}$ और $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$

$\Rightarrow a=4$

$\Rightarrow b=-4(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow c=k\alpha\beta=4(-1)$

अतः ax^2+bx+c के रूप में लिखने पर,

$\Rightarrow 4x^2-4(\alpha+\beta)x+4(\alpha\beta)$

$4x^2-4\left(\frac{1}{4}\right)x+4(-1)$

$\Rightarrow 4x^2-x-4$

द्विघात बहुपद है: $4x^2-x-4$

(ii)

दूसरी विधि से:

दिया है: $\alpha+\beta=\sqrt{2}, \alpha\beta=\frac{1}{3}$

चूँकि $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=\mathrm{kx}^2-\mathrm{k}(\alpha+\beta)\mathrm{x}+\mathrm{k}\alpha\beta$

या $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{x}=\mathrm{k}[\mathrm{x}^2-(\alpha+\beta)\mathrm{x}+\alpha\beta]$

या $\frac{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}{\mathrm{k}}=\left(\mathrm{x}^2-\sqrt{2}\mathrm{x}+\frac{1}{3}\right)$

या $\frac{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\backslash\mathrm{text}\{\mathrm{c}\}}{\mathrm{k}}=\frac{3\mathrm{x}^2-3\sqrt{2}\mathrm{x}+1}{3}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर k = 3

अतः $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=3\mathrm{x}^2-3\sqrt{2}+1$

द्विघात बहुपत है: $3\mathrm{x}^2-3\sqrt{2}\mathrm{x}+1$

(iii)

दिया है: $\alpha+\beta=0, \alpha\beta=\sqrt{5}$

चूँकि $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=\mathrm{k}[\mathrm{x}^2-(\alpha+\beta)\mathrm{x}+\alpha\beta]$

या $\frac{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}{\mathrm{k}}=\frac{\mathrm{x}^2+\sqrt{5}}{1}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर k = 1

अतः $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=\mathrm{x}^2+\sqrt{5}$

द्विघात बहुपत है: $\mathrm{x}^2+\sqrt{5}$

(iv)

दिया है: $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$

चूँकि $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

या $\frac{ax^2+bx+c}{c} = \frac{x^2-x+1}{1}$

यहाँ k अचर पद है, तुलना करने पर, k = 1

अतः $ax^2 + bx + c = x^2 - x + 1$

द्विघात बहुपद है: $x^2 - x + 1$

(v)

दिया है: $\alpha = \beta = -\frac{1}{4}, \alpha\beta = \frac{1}{4}$

चूँकि $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

या $\frac{ax^2+bx+c}{k} = \frac{4x^2+x+1}{4}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर k = 4

अतः $ax^2 + bx + c = 4x^2 + 4x + 1$

द्विघात बहुपद है: $4x^2 + 4x + 1$

(vi)

तीसरी विधि:

दिया है: $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 1$

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{4}{1}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1}$

तुलना करने पर, a = 1, b = -4 और c = 4

अतः $ax^2 + bx + c$ में मान रखने पर

$ax^2 + bx + c = (1)x^2 = (-4)x + 4$

$= x^2 - 4x + 4$

अतः द्विघात बहुपत है: $x^2 - 4x + 4$

प्रश्नावली 2.3 (पृष्ठ संख्या 39-40)

प्रश्न 1 विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके, निम्न में p(x) को g(x) से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए:

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$
(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, g(x) = x^2 + 1 - x$
(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6, g(x) = 2 - x^2$

उत्तर-

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$

$X - 3$

$x^2 - 2 \overline{)\, x^2 - 3x^2 + 5x - 3}$

$(-y)^3 \quad \overset{-}{(+)} 2x$

$-3x^2 + 7x - 3$

$-3x^2 \quad +6$

$(+) \quad (-)$

$7x - 9$

भागफल $q(x) = x - 3$ और शेषफल $= 7x - 9$ है।

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 3 \\
\hline
x^2 - x + 1 & x^4 \qquad - 3x^2 + 4x + 5 \\
 & x^4 - x^3 + x^2 \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
 & x^3 - x^2 + x \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & -3x^2 + 3x + 5 \\
 & -3x^2 + 3x - 5 \\
 & (+) \quad (-) \quad (+) \\
\hline
 & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

भागफल $q(x) = x^2 + x - 3$ और शेषफल $= 8$ है।

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x^2 - 2 \\
\hline
-x^2 + 2 & x^4 - 5x + 6 \\
 & x^4 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & 2x^2 - 5x + 6 \\
 & 2x^2 \qquad - 4 \\
 & (-) \qquad (+) \\
\hline
 & -5x + 10 \\
\hline
\end{array}
$$

भागफल $q(x) = -x^2 - 2$ और शेषफल $= -5x + 10$ है।

प्रश्न 2 पहले बहुपद से दुसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि क्या प्रथम बहुपद द्वितीय का एक गुणनखंड है:

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

उत्तर-

(i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t – 12$

$$2t^2 + 2t + 4$$
$$t^2 - 3 \overline{) 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12}$$
$$2t^4 \quad - 6t^2$$
$$(-) \quad (+)$$
$$\overline{3t^3 + 4t^2 - 9t - 12}$$
$$3t^3 \quad - 9t$$
$$(-) \quad (+)$$
$$\overline{4t^2 \quad - 12}$$
$$4t^2 \quad - 12$$
$$(-) \quad (+)$$
$$\overline{\underline{0}}$$

चूँकि शेषफल $r(x) = 0$ है।

अत :$t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ का एक गुणनखंड है।

(ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

$$3x^2 - 4x + 2$$
$$x^2 + 3x + 1 \overline{) 3x^2 + 5x^3 - 7x^2 + 2x} + 2$$
$$3x^4 + 9x^3 + 3x^2$$
$$(-) \quad (-) \quad (-)$$
$$\overline{- 4x^3 - 10x^2 + 2x + 2}$$
$$- 4x^3 - 12x^2 - 4x$$
$$(+) \quad (+) \quad (+)$$
$$\overline{2x^2 + 6x + 2}$$
$$2x^2 + 6x + 2$$
$$(-) \quad (-) \quad (-)$$
$$\overline{\underline{0}}$$

चूँकि शेषफल $r(x) = 0$ है।

अत :$x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ का एक गुणनखंड है।

(iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 1 \\
\hline
x^3 - 3x + 1 & x^3 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
 & x^3 - 3x^2 + x^2 \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & -x^3 \qquad + 3x + 1 \\
 & -x^3 \qquad + 3x - 1 \\
 & (+) \qquad (-) \quad (+) \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 2 \\
\hline
\end{array}
$$

चूँकि शेषफल r(x) = 2 है।

अत :$x^3 - 3x + 1$, $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ का एक गुणनखंड नहीं है।

प्रश्न 3 $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ है।

उत्तर-

दिया है: $p(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

और दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ है।

या $\mathbf{x} - \sqrt{\frac{5}{3}} = 0, \mathbf{x} + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$

या $\left(\mathbf{x} - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(\mathbf{x} + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 0$

या $\mathbf{x}^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = 0$

या $x^2 - \frac{5}{3} = 0$

या $3x^2 - 5 = 0$

इसलिए, $3x^2 - 5 = 0$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

अब $3x^2 - 5$ से $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ में भाग देने पर

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
3x^2 - 5 & 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 \\
 & 3x^4 \qquad\quad - 5x^2 \\
 & (-) \qquad\quad (+) \\
\hline
 & \quad 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 & \quad 6x^3 \qquad\quad - 10x \\
 & \quad (-) \qquad\quad (+) \\
\hline
 & \qquad 3x^2 - 5 \\
 & \qquad 3x^2 - 5 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

अत :$p(x) = (3x^2 - 5)\,(x^2 + 2x + 1)$

अब, $x^2 + 2x + 1$ को गुणनखंड कर शुन्यक ज्ञात करने पर

$= x^2 + x + x + 1 = 0$

$= x(x + 1) + 1(x + 1) = 0$

$= (x + 1)(x + 1) = 0$

या $x + 1 = 0, x + 1 = 0$

या $x = -1, x = -1$

अतः दो अन्य शून्यक- 1 और- 1 है।

प्रश्न 4 यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमश: $x - 2$ और $-2x + 4$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है : भाज्य $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

भागफल $q(x) = x - 2$,

शेषफल $r(x) = -2x + 4$

भाजक $g(x) = ?$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x)\,(x - 2) + (-2x + 4)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 = g(x)(x - 2)$

$g(x)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-)\quad (+) \\
\hline
 & -x^2 + 3x - 2 \\
 & -x^2 + 2x \\
 & (+)\quad (-) \\
\hline
 & x - 2 \\
 & x - 2 \\
 & (-)\quad (+) \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

अत: भाजक $g(x) = x^2 - x + 1$ है।

प्रश्न 5 बहुपदों $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ और $r(x)$ के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन एल्गोरिथम को संतुष्ट करते हों तथा

(i) घात $p(x)$ = घात $q(x)$ हो

(ii) घात $q(x)$ = घात $r(x)$ हो

(iii) घात $r(x) = 0$ हो

उत्तर-

(i) युक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ जहाँ $q(x) = 0$ हो

घात $p(x)$ = घात $q(x)$ हो

भाज्य $p(x)$ और भागफल $q(x)$ की घात सामान तभी हो सकता है जब भाजक $g(x)$की घात 0 अर्थात कोई संख्या हो।

उदाहरण :माना $p(x) = 2x^2 - 6x + 3$

और माना $g(x) = 2$

भाग देने पर,

$p(x) = 2x^2 - 6x + 2 + 1$

$= 2(x^2 - 3x + 1) + 1$

अब $2(x^2 - 3x + 1) + 1$ को $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ से तुलना करने पर हम पाते हैं।

अत :$q(x) = x^2 - 3x + 1$ और $r(x) = 1$

इससे घात $p(x)$ = घात $q(x)$ प्राप्त होता है।

(ii) युक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ जहाँ $q(x) = 0$ हो,

घात $q(x)$ = घात $r(x)$ हो,

यह स्थिति तब आती है जब $p(x)$ और $g(x)$ का घात सामान हो जैसे-

माना $p(x) = 2x^2 + 6x + 7$ और $g(x) = x^2 + 3x + 2$

भाग देने पर, $q(x) = 2$ और $r(x) = 3$

अत :घात $q(x)$ = घात $r(x)$ है।

(iii) युक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ जहाँ $q(x) = 0$ हो,

घात $r(x) = 0$ हो,

$r(x) = 0$ तब होता है जब $p(x)$, $g(x)$ से पूर्णत :विभाजित हो,

माना, $p(x) = x^2 - 1$ और $g(x) = x + 1$

विभाजित करने पर

$q(x) = x - 1$ और $r(x) = 0$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 2.4 (पृष्ठ संख्या 40)

प्रश्न 1 सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं। प्रत्येक स्थिति में शून्यकों और गुणांकों के बीच के संबंध् को भी सत्यापित कीजिए:

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2; \frac{1}{2}, 1, -2;$

(ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2; 2, 1, 1$

उत्तर-

(i) $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

$$\therefore p\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + \frac{2}{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{+}\frac{2}{1}\right) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$, बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक है।

पुनः $p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2$

$= 2 + 1 - 5 + 2$

$= (2 + 2 + 1) - 5 = 5 - 5 = 0$

$\Rightarrow 1$, बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक है।

अब, $p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2$

$= 2(-8) + (4) + 10 + 2$

$= -16 + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 16 = 0$

$\Rightarrow$ -2, बहुपद p(x) का एक शून्यक है।

शुन्यंको और गुणांकों के संबंद

$$\because p(x) = 2x^3 + x^2 - 5 + 2$$

$\therefore$ इसकी तुलना ax3 + bx2 + cx + d से करने पर,

a = 2, b = 1, c = -5 और d = 2

तथा p(x) के लिए दीए गये शून्यक $\frac{1}{2}, -2$ और 1 है।

इसलिए $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ और $\gamma = -2$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} + 1 + (-2) = -\frac{1}{2}$$

शून्यको का योगफल $= \frac{-b}{a} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

दो शून्यको को क्रमानुसार एक साथ लेकर उनके गुणनफल का योगफल:

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{2}(1) + 1(-2) + (-2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{-5}{2} = \frac{c}{a}$$

तीनो शून्यको का गुणनफल

$$= \alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \times 1 \times (-2) = -1$$

अर्थात्

$$\frac{-d}{a} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

इस प्रकार, p(x) के शून्यको और गुणांकों के संबंध सत्यापित होते है।

(ii) यहाँ,

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2$

$= 8 - 16 + 10 - 2 = 18 - 18 = 0$

$\Rightarrow$ 2, बहुपद p(x) का शून्यक है।

पुनः $p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2$

$= 1 - 4 + 5 - 2 = 6 - 6 = 0$

$\Rightarrow$ 1 बहुपद p(x) का शून्यक है।

$\therefore$ 2, 1 और 1 बहुपद p(x) शून्यक है।

अब, $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ की तुलना $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के साथ करने पर,

a = 1, b = -4, c = 5 और d = -2

$\because$ 2, 1 और 1 बहुपद p(x) के शून्यक है।

माना $\alpha = 2;\ \beta = 1;\ \gamma = 1$

संबंध: $\alpha + \beta + \gamma = 2 + 1 + 1 = 4$

शून्यको लका योगफल $= \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

दो शून्यको का क्रमानुसार एक साथ लेकर उनके गुणनफल का योगफल

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2(1) + 1(1) + 1(2)$$

$$= 2 + 1 + 2 = 5$$

तथा $\frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = \frac{c}{a}$$

शुन्यंको का गुणनफल $\alpha\beta\gamma = (2)(1)(1) = 2$

$$\frac{-d}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

इस प्रकार बहुपद p(x) के शून्यको व गुणांकों के संबंध सत्यापित होते है।

प्रश्न 2 एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्यकों का योग, दो शून्यकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग तथा तीनों शून्यकों के गुणनफल क्रमशः 2, -7, -14 हों।

उत्तर- माना अभीष्ठ तरीघाट बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ है और α, β तथा γ इसके शून्यक है।

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-\text{ अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-d}{a}$$

अब, $\alpha+\beta+\gamma=2=\frac{-d}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-14=\frac{-d}{a}$

यदि a = 1 हो, तो $\frac{-b}{a}=2\Rightarrow b=-2$

$\frac{c}{d}=-7\Rightarrow c=-7$

$\frac{d}{a}=-14\Rightarrow d=14$

$\therefore$ अभीष्ठ त्रिघातिय बहुपद

$1x^3+(-2)x^2+(-7)x+14$

$=x^3-2x^2-7x+14$

प्रश्न 3 यदि बहुपव x^3 - $3x^2$ + x + 1 के शून्यक a - b, a, a + b हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया गया है कि :p(x) = x^3 - $3x^2$ + x + 1

इसकी तुलना Ax^3 + Bx^2 + Cx + D से करने पर,

चूँकि p(x) के शुन्यंक) a - b), a और) a + b) है।

$\therefore$ माना $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{B}{A}=-\frac{(-3)}{1}=3$

$\Rightarrow (a-b)+a(a+b)=3$

$\Rightarrow 3a=3$

$\Rightarrow a=\frac{3}{3}=1$

पुनः $\alpha\beta\gamma=\frac{-D}{A}=-1$

$\Rightarrow (a - b) \times a \times (a + b) = -1$

$\Rightarrow (1 - b) \times 1 \times 1(1 + b) = -1$

$[\because a = 1,$ ऊपर सिद्ध किया गया है।$]$

$\Rightarrow 1 - b^2 = -1$

$\Rightarrow b^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

अतः a = 1 और $b = \pm\sqrt{2}$

प्रश्न 4 यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

चूँकि $p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$

चूँकि p(x) के दो शून्यक $= 2 \pm \sqrt{3}$ है।

$\therefore [x - (2 + \sqrt{3})][x - (2 - \sqrt{3})]$ या $[(x - 2) - \sqrt{3}][(x - 2) + \sqrt{3}]$

या $(x - 2)^2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow$ या $(x^2 + 4 - 4x) - 3$

या $x^2 - 4x + 1 \therefore (x^2 - 4x + 1)$ बहुपद p(x)का एक गुणनखंड है।

अब, x2 - 4x + 1 से p(x) को विभाजित करने पर,

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 35 \\ x^2 - 4x + 1 \overline{\smash{)}\, x^4 - 6x^2 - 26x^2 + 138x - 35} \\ x^4 - 4x^2 + x^2 \\ (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline - 2x^3 - 27x^3 + 138x - 35 \\ - 2x^3 + 8x^2 + 140x - 35 \\ (+) \quad (-) \quad (+) \\ \hline - 35x^2 + 140x - 35 \\ - 35x^2 + 140x - 35 \\ (+) \quad (-) \quad (+) \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35) = p(x)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 1)(x - 7)(x + 5) = p(x)$$

अर्थात् (x - 7) और (x + 5) बहुपद p(x) के गुणनखण्ड है।

$\therefore$ 7 और -5, बहुपद p(x) के अन्य शून्यक है।

प्रश्न 5 यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए और शेषफल x + a आता हो, तो k तथा a ज्ञात कीजिए।

उत्तर- बहुपद x4 - 6x3 + 16x2 - 25x + 10 और x2 - 2x + k पर विभाजन एल्गोरिथ्म से हमे प्राप्त होता है:

$$x^2 - 4x + (8 - k)$$

$$x^2 - 2x + k \overline{)\, x^4 - 6x^3 + 16x^3 - 25x + 10}$$

$$x^4 - 2x^3 + kx^2$$

$$(-) \quad (+) \quad (-)$$

$$- 4x^2 + (16 - k)x^2 - 25x + 10$$

$$- 4x^3 + 8x^2 \qquad - 4kx$$

$$(+) \quad (-) \quad (+)$$

$$[(16 - k) - 8]x^2 + (-25 + 4k)\ x + 10$$

या

$$(8 - k)x^2 + (4k - 25)x + 10$$

$$(8 - k)x^2 - 2\ (8 - k)x + k(8 - k)$$

$$(-) \quad (+) \quad (-)$$

$$[(-25 + 16)+(4k - 2k)]x - k(8-k)+ 10$$

या

$$(-9 + 2k)\ x - k(8-k) + 10$$

$\Rightarrow$ शेषफल = $(2k - 9)x - k(8 - k) + 10$ ...(i)

परन्तु शेषफल = $x + a$ ...(ii)

अतः (i) और (ii) से, $2k - 9 = 1$

$$\Rightarrow 2k = 11 + 9 = 10 \Rightarrow k = \frac{10}{2} = 5$$

और $\alpha = -k(8 - k) + 10 = -5(8 - 5) + 10$

$$= -5(3) + 10 = -15 + 10 = -5$$

अतः $k = 5$ और $\alpha = -5$

युग्म समीकरण, जिसको ax + by + c = 0 के रूप में रखा जा सकता है, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों x और y में एक रैखिक समीकरण कहलाता है। (प्रतिबंध जैसे a और b दोनों शून्य नहीं हैं, हम प्रायः $a^2 + b^2 \neq 0$ से प्रदर्शित करते हैं।)

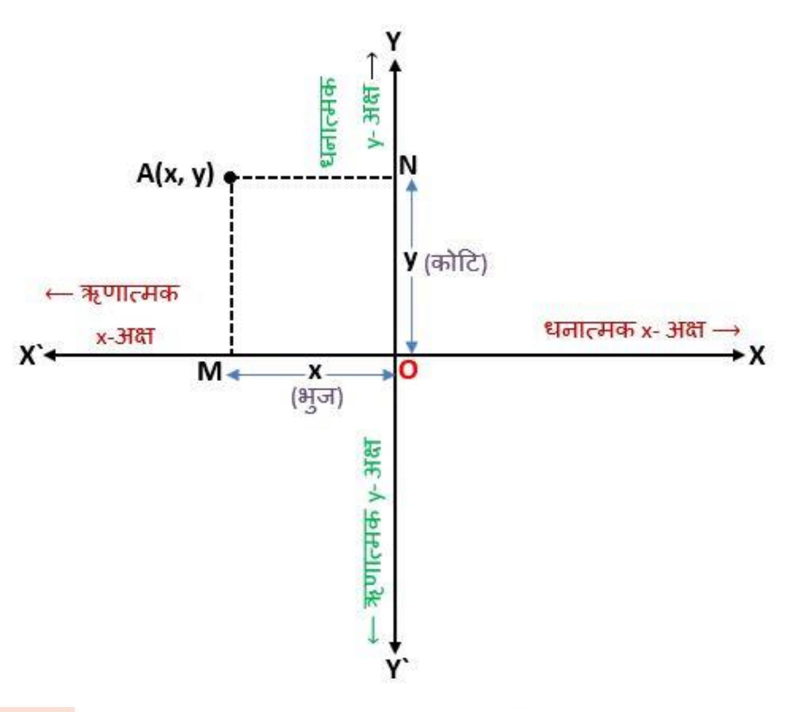
दो चरों वाले रैखिक समीकरण ax + by + c = 0 का प्रत्येक हल (x, y) इस समीकरण को निरूपित करने वाली रेखा के एक बिदु के संगत होता है और विलोमतः भी ऐसा होता है।

उदाहरण

समीकरण 2x + 3y = 5 के बाएं पक्ष में x = 1 और y = 1 रखने पर

बायाँ पक्ष 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5, जो कि दायें पक्ष के बराबर है। अतः x = 1 और y = 1 समीकरण 2x + 3y = 5 का एक हल है।

ज्यामितीय दृष्टिकोण



ज्यामितीय दृष्टि से इसका अर्थ है कि बिदु (1, 1) समीकरण 2x + 3y = 5 द्वारा निरूपित रेखा पर स्थित है। इसलिए, समीकरण का प्रत्येक हल उसको निरूपित करने वाली रेखा पर स्थित एक बिदु होता है।

रैखिक समीकरण युग्म

ये दो रैखिक समीकरण उन्हीं दो चरों x और y में हैं। इस प्रकार के समीकरणों को दो चरों में रैखिक समीकरणों का एक युग्म (या रैखिक समीकरण युग्म) कहते हैं।

उदाहरण

- x – 2y = 0 (1)
- 3x + 4y = 20 (2)

हम इन समीकरणों के माध्यम से x और y के मान ज्ञात कर सकते हैं।

ज्यामितीय दृष्टि से रैखिक समीकरण युग्म

एक तल में यदि दो रेखाएँ दी हों, तो निम्न में से केवल एक ही संभावना हो सकती है:

(i) दोनों रेखाएँ एक बिदु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(ii) दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, अर्थात् वे समांतर हैं।

(iii) दोनों रेखाएँ संपाती हैं।

स्मरणीय तथ्य

1. दो चरों में दो रैखिक समीकरण एक रैखिक समीकरणों का युग्म कहलाता है। रैखिक समीकरण युग्म का सबसे व्यापक रूप है:

- $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$
- $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ऐसी वास्विक संख्याएं हैं कि $a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0$

2. एक रैखिक समीकरण युग्म को ग्राफीय रूप में निरूपित किया जा सकता है और हल किया जा सकता है।

(i) ग्राफीय विधि द्वारा

(ii) बीजगणितीय विधि द्वारा

रैखिक समीकरण युग्म के प्रकार (Types Pair of Linear Equations)

(i) रैखिक समीकरणों का संगत युग्म

(ii) रैखिक समीकरणों का असंगत युग्म

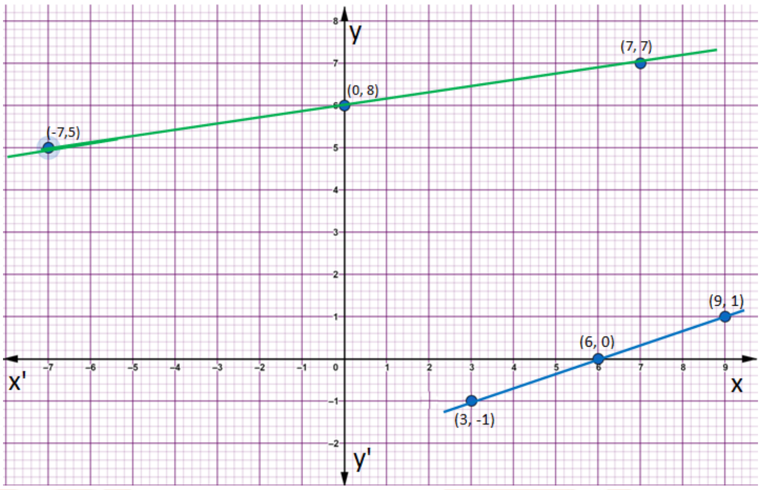
(iii) रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म

Sl	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय (Unique))
2	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से अनेक हल
3	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेखाएँ	कोई हल नहीं

रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफीय विधि से हल

एक रैखिक समीकरण युग्म को कैसे ग्राफीय रूप में दो रेखाओं में व्यक्त किया जाता है। आपने यह भी देखा है कि ये रेखाएँ प्रतिच्छेद कर सकती हैं या समांतर हो सकती हैं या संपाती हो सकती हैं। इस

स्थिति को निरूपित करने वाले समीकरण ज्यामितीय रूप से बिंदु (4, 2) पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं को निरूपित करते हैं। इसलिए, बिंदु (4, 2) दोनों समीकरणों $x - 2y = 0$ और $3x + 4y = 20$ को निरूपित करने वाली रेखाओं पर स्थित है और केवल यही उभयनिष्ठ बिंदु है।



रैखिक समीकरण युग्म का बीजगणितीय विधि से सत्यापन

हम बीजगणितीय रूप से यह सत्यापित करेंगे कि $x = 4, y = 2$ दिए हुए समीकरण युग्म का एक हल है। प्रत्येक समीकरण में x और y के मान रखने पर,

हम प्राप्त करते हैं $4 - 2 \times 2 = 0$ और $3 \times 4 + 4 \times 2 = 20$ है।

अतः, हमने सत्यापित किया है कि $x = 4, y = 2$ दोनों समीकरणों का एक हल है।

चूँकि (4, 2) दोनों रेखाओं का केवल एक उभयनिष्ठ बिंदु है, इसलिए दो चरों में रैखिक समीकरण युग्म का एक और केवल एक हल है।

रैखिक समीकरणों का असंगत युग्म

एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका कोई हल नहीं होता, रैखिक समीकरणों का असंगत युग्म कहलाता है।

रैखिक समीकरणों का संगत युग्म

एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका हल होता है, रैखिक समीकरणों का संगत युग्म कहलाता है।

दो चरों के रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म

तुल्य रैखिक समीकरणों के एक युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। इस युग्म को दो चरों के रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म कहते हैं। ध्यान दीजिए कि रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म सदैव संगत होता है।

अब हम दो चरों में एक रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाओं के व्यवहार को तथा हल के अस्तित्व होने को निम्न प्रकार से एक सारांश के रूप में व्यक्त कर सकते हैंः

(i) रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरण युग्म का अद्वितीय हल होता है (अविरोधी समीकरण युग्म)।

(ii) रेखाएँ समांतर हो सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरणों का कोई हल नहीं होता है (असंगत समीकरण युग्म)।

(iii) रेखाएँ संपाती हो सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरणों के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं [आश्रित (संगत) समीकरण युग्म]

रैखिक समीकरण युग्म के ज्यामितीय रूप

उदाहरण के लिए नीचे दिए गए रैखिक समीकरण युग्म के गुणांको के सम्बंध से युग्म रेखाओं के निम्नलिखित ज्यामितीय रूप का निरूपण निम्न प्रकार से है:

- $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ .... (1)
- $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ .... (2)

Sl	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय (Unique))
2	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से अनेक हल
3	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेखाएँ	कोई हल नहीं

एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधि

एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए कई बीजगणितीय (बीजीय) विधियाँ हैं। जो निम्न प्रकार से हैं:

प्रतिस्थापन विधि

$3X - y = 3$ _ _ _ _ _ समी० (i.)

$9X - 3y = 9$ _ _ _ _ _ समी० (ii.)

प्रतिस्थापन विधि को कुछ उदाहरण लेकर समझाएँगे।

उदाहरण

प्रतिस्थापना विधि द्वारा निम्न रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए:

- $7x – 15y = 2$ (1)
- $x + 2y = 3$ (2)

हल:

चरण 1: हम किसी एक समीकरण को लेते हैं और किसी एक चर को दूसरे के पदों में लिखते हैं। आइए समीकरण (2) को लेते हैं:

x + 2y = 3

इस समीकरण को x = 3 – 2y के रूप में लिख सकते हैं।

x = 3 – 2y (3)

चरण 1: अब x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करते हैं। इससे हम पाते हैं:

7(3 – 2y) – 15y = 2

अर्थात 201 – 14y – 15y = 2

अर्थात् – 29y = –19

इसलिए $y = \frac{19}{29}$

चरण 1: अब y का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करते हैं। इससे हम पाते हैं**:**

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{87 - 38}{29} = \frac{49}{29}$$

अतः x = 49/29, y = 19/29 दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का प्रतिस्थापना विधि द्वारा बीजगणितीय हल है।

उत्तर के सत्यापन्न के लिए x और y के मान को अलग-अलग समीकरण 1 और 2 में रखकर जांच कर सकते हैं।

प्रतिस्थापन विधि क्या है?

हमने एक चर का मान दूसरे चर के पद में व्यक्त करके, रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए प्रतिस्थापित किया है। इसलिए इस विधि को प्रतिस्थापन विधि कहते हैं।

विलोपन विधि

रैखिक युग्म समीकरण को बीजगणितीय विधि से हल करने के लिए प्रतिस्थापन विधि के अतिरिक्त अन्य विधि विलोपन की है। जिसमें एक चर को विलुप्त करके एक चर में रैखिक समीकरण प्राप्त करते हैं इससे एक चर का मान निकाल आता है। उसकी सहायता से दुसरे चर का मान भी प्राप्त कर सकते हैं।

इसे एक उदाहरण के माध्यम से समझाते हैं:

उदाहरण

दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके खर्चों का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रति महीने में 2000 रु बचा लेता है, तो उनकी मासिक आय ज्ञात कीजिए।

हल

आइए दोनों व्यक्तियों की मासिक आय को क्रमशः 9x रु तथा 7x रु से निरूपित करें और उनके खर्चों को क्रमशः 4y रु और 3y रु से निरूपित करें। तब, उस स्थिति में बने समीकरण हैंः

$9x - 4y = 2000$ (1)

और $7x - 3y = 2000$ (2)

चरण 1:

y के गुणकों को समान करने के लिए समीकरण (1) को 3 से तथा समीकरण (2) को 4 से गुणा कीजिए। तब हम निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करते हैंः

$27x - 12y = 6000$ (3)

$28x - 12y = 8000$ (4)

चरण 2:

y को विलुप्त करने के लिए समीकरण (3) को समीकरण (4) में से घटाइए, क्योंकि y के गुणांक समान हैं, इसलिए हम पाते हैंः

$(28x - 12y) - (27x - 12y) = 8000 - 6000$

अर्थात् $x = 2000$

चरण 3:

x का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैंः

$9(2000) - 4y = 2000$

अर्थात $y = 4000$

अतः समीकरणों के युग्म का हल $x = 2000$, $y = 4000$ है। इसलिए, व्यक्तियों की मासिक आय क्रमशः रु 18000 तथा रु 14000 हैं।

सत्यापन:

उनकी आय का अनुपात 18000 : 14000 = 9 : 7 है। साथ ही, उनके खर्च का अनुपात

18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3 है।

वज्र-गुणन विधि

वज्र गुणन विधि सूत्र (Cross multiplication method formula,formula of cross multiplication method)-

माना दिए गए समीकरण हैं:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.........(2)$$

समीकरण (1) को b2 से तथा समीकरण (2) को b1 से गुणा करने पर-

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0...........(3)$$

$$a_2b_1x + b_2b_1y + b_1c_2 = 0...........(4)$$

समीकरण (3) में से (4) घटाने पर-

$$a_1b_2 - a_2b_2x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

$$a_1b_2 - a_2b_2x + b_2c_1 - b_1c_2 \ldots\ldots\ldots (5)$$

इसी प्रकार समीकरण (1) को a_2 से तथा समीकरण (2) को b_1 से गुणा करने पर-

$a_1a_2x + a_2b_1y + c_1a_2 = 0$...........(6)

$a_1a_2x + a_1b_2y + c_2a_1 = 0$...........(7)

समीकरण (6) में से समीकरण (7) को घटाने पर-

$(a_2b_1 - a_1b_2)y = c_2a_1 - c_1a_2$

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

समीकरण (5) से $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

उपर्युक्त समीकरणों को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

इस परिणाम को निम्न रचना के माध्यम से दर्शा सकते हैं जिससे समीकरणों के हल को सुगमता से स्मरण रख सके।

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}$$

रचना में तीर के निशान का अर्थ दो संख्याओं के गुणा को दर्शाना है।पहले नीचे की ओर गुणा करना है फिर इसमें से ऊपर की ओर गुणा कर गुणनफल घटाना है। वज्र गुणा के कारण यह वज्र गुणन विधि कहलाती है।इस विधि का प्रयोग से पूर्व समीकरणों के सभी पदों को पहले वाम पक्ष में लेकर दक्षिण पक्ष को शून्य बना देते हैं।प्रथम समीकरण एवं द्वितीय समीकरण में प्रथम चर के गुणांक द्वितीय चर के गुणांक तथा स्वतन्त्र चर से प्रदर्शित करते हैं।

साधनीयता के लिए प्रतिबन्ध (Condition for Solvability)

यदि समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2y + c_2 = 0$ *हो तो संगत चरों के गुणांकों का अनुपात देखने पर निम्न स्थिति के अनुसार निर्णय किया जाता है।*

(1.)प्रथम स्थिति $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
निकाय संगत तथा हल अद्वितीय होते हैं।
(2.) द्वितीय स्थिति $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
निकाय असंगत है तथा इसके कोई हल नहीं होते हैं।
(3.) तृतीय स्थिति $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
समीकरण निकाय संगत तथा इसके अनन्त हल होते हैं।

गुणन विधि के उदाहरण

निम्नलिखित समीकरणों के बारे में जांच कीजिए कि समीकरण निकाय के अद्वितीय हल है, कोई हल नहीं है या अपरिमित हल हैं।यदि किसी निकाय के अद्वितीय हल हैं तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

Example-1

2x + y = 35, 3x + 4y = 65

Solution: 2x + y = 35

3x + 4y = 65

समीकरण के सभी पदो को वाम पक्ष में लेने पर-

2x + y – 35 = 0

3x + 4y -65=0

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{4}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ निकाय संगत है तथा अद्वितीय हल हैं अतः

2x+y-35=0

3x+4y-65=0

$$\frac{x}{(1)(-65)-4(-35)} = \frac{y}{3(-35)-2(-65)} = \frac{1}{2(4)-3(1)}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{-65+140} = \frac{y}{-105+130} = \frac{1}{8-3}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{75} = \frac{y}{25} = \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{75} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{75}{5} = 15$$
$$\Rightarrow \frac{y}{25} = \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow y = \frac{25}{5} = 5$$
$$x = 15, y = 5$$

Example-2

2x – y = 6

x - y = 2

Solution: 2x – y = 6

x - y = 2

समीकरण के सभी पदों को वाम पक्ष में लेने पर-

2x – y – 6 = 0

x - y - 2 = 0

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ निकाय संगत है तथा इसके अद्वितीय हल हैं अतः

2x-y-6=0

x-y-2=0

$$\frac{x}{\begin{matrix} -1 & -6 \\ -1 & 2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}$$

$\Rightarrow \frac{x}{(-1)(-2)-(-1)(-6)} = \frac{y}{(1)(-6)-2(-2)} = \frac{1}{2(-1)-1(-1)}$

$\Rightarrow \frac{x}{2-6} = \frac{y}{-6+4} = \frac{1}{-2+1}$

$\Rightarrow \frac{x}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{1}{-1}$

$\Rightarrow \frac{x}{-4} = \frac{1}{-1} \Rightarrow x = 4$

$\Rightarrow \frac{y}{-2} = \frac{1}{-1}$

$\Rightarrow y = 2$

$x = 4, y = 2$

Example-3. 3x+2y+25=0

2x+y+10=0

Solution- 3x+2y+25=0

2x+y+10=0

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{1}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ निकाय संगत है तथा इसके अद्वितीय हल हैं।

3x+2y+25=0

2x+y+10=0

$$\frac{x}{\begin{matrix} 2 & 25 \\ 1 & 10 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} 3 & 25 \\ 2 & 10 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}}$$

$\Rightarrow \frac{x}{(2)(10)-(1)(25)} = \frac{y}{(2)(25)-3(10)} = \frac{1}{3(1)-2(2)}$

$\Rightarrow \frac{x}{20-25} = \frac{y}{50-30} = \frac{1}{3-4}$

$\Rightarrow \frac{x}{-5} = \frac{y}{20} = \frac{1}{-1}$

$\Rightarrow \frac{x}{-5} = \frac{y}{20} = \frac{1}{-1}$

$x = 5, y = -20$

Example-4. k का मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

2x + ky = 1

3x - 5y = 7

Solution: 2x + ky = 1

3x - 5y = 7

समीकरण के सभी पदों को वाम पक्ष में लेने पर-

2x + ky – 1 = 0

$3x - 5y - 7 = 0$

समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है अतः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{k}{-5} \neq \frac{-1}{-7}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{k}{-5}$$
$$\Rightarrow k = \frac{-10}{3}$$

Example-5. समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए

$$mx + ny = m^2 + n^2$$
$$x + y = 2m$$

Solution-

$$mx + ny = m^2 + n^2$$
$$x + y = 2m$$

समीकरण के सभी पदों को वाम पक्ष में लेने पर-

$$mx + ny - (m^2 + n^2) = 0$$
$$x + y - 2m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\begin{matrix} n & -(m^2+n^2) \\ 1 & -2m \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} m & -(m^2+n^2) \\ 1 & -2m \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} m & n \\ 1 & 1 \end{matrix}}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{-2mn+m^2+n^2} = \frac{y}{-(m^2+n^2)+2m^2} = \frac{1}{m-n}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{(m-n)^2} = \frac{y}{(m^2-n^2)} = \frac{1}{m-n}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{(m-n)^2} = \frac{y}{(m-n)(m+n)} = \frac{1}{m-n}$$
$$\Rightarrow x = \frac{(m-n)^2}{m-n} = m - n$$
$$\Rightarrow y = \frac{(m-n)(m+n)}{m-n} = m + n$$

वज्र गुणन विधि की समस्याएं

निम्नलिखित समीकरणों के बारे में जांच कीजिए कि समीकरण निकाय के अद्वितीय हल है, कोई हल नहीं है या अपरिमित हल हैं।यदि किसी निकाय के अद्वितीय हल हैं तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(1.)x+2y+1=0,2x-3y-12=0

(2.)2x+3y-17=0,3x-2y-6=0

k का मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है-

(3.)kx+2y=5,3x+y=1

का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निकाय के

(i) अद्वितीय हल (ii) कोई हल नहीं है।

(4.) $3x + \lambda y - 1 = 0, 2x + y - 9 = 0$

उत्तर-(1.)x=3,y=-2

(2.)x=4,y=3

(3.)k=6

(4.)(i) अद्वितीय हल के लिए $\lambda \neq \frac{3}{2}$

(ii) कोई हल नहीं के लिए $\lambda = \frac{3}{2}$

उदाहरण

बैंगलोर के एक बस स्टैंड से यदि हम दो टिकट मल्लेश्वरम के तथा 3 टिकट यशवंतपुर के खरीदें, तो कुल लागत रू 46 है। परंतु यदि हम 3 टिकट मल्लेश्वरम के और 5 टिकट यशवंतपुर के खरीदें, तो कुल लागत रू 74 है। बस स्टैंड से मल्लेश्वरम का किराया तथा बस स्टैंड यशवंतपुर का किराया ज्ञात कीजिए।

उदाहरण का हल:

माना बैंगलोर के बस स्टैंड से, मल्लेश्वरम का किराया रू x तथा यशवंतपुर का किराया रू y है। दी गई सूचनाओं से, हम पाते हैंः

2x + 3y = 46, अर्थात् 2x + 3y – 46 = 0 .... (1)

3x + 5y = 74, अर्थात् 3x + 5y – 74 = 0 .... (2)

यहाँ पर $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 =- 46$, $a_2 = 3$, $b_2 = 5$, $c_2 = -74$

वज्र-गुणन विधि से इन समीकरणों को हल करने के लिए, हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैंः

x/{ (3) (-74) – (5) (-46)} = y/{(-46)(3) – (-74)(2)} = 1/{(2)(5) – (3)(3)}

- अर्थात् x/(-222 + 230) = y/(-138 + 148) = 1/(10 – 9)
- अर्थात् x/8 = y/10 = 1/1

- अर्थात् x/8 = 1/1
- अर्थात् y/10 = 1/1
- अर्थात् x = 8 और y = 10

अतः, बैंगलोर के बस स्टैंड से, मल्लेश्वरम का किराया रू 8 तथा यशवंतपुर का किराया रू 10 है।

नोट:

अपने उत्तर के सत्यापन्न के लिए हम x और y का मान समीकरण (1) और (2) में रखकर कर सकते हैं।

दो चरों के रैखिक समीकरणों के युग्म में बदले जा सकने वाले समीकरण

हम ऐसे समीकरणों के युग्मों के बारे में चर्चा करेंगे जो रैखिक नहीं है, परंतु कुछ उपयुक्त प्रतिस्थापनों द्वारा इन्हें रैखिक समीकरणों के रूप में बदला जा सकता है।

उदाहरण

समीकरणों के निम्न युग्म को हल कीजिए:

- 2/x + 3/y = 13
- 5/x – 4/y = -2

उदाहरण का हल:

दिए गए समीकरणों के युग्म को इस प्रकार से लिखते हैं:

- 2(1/x) + 3(1/y) = 13 (1)
- 5(1/x) – 4(1/y) = -2 (2)

ये समीकरण ax + by + c= 0 के रूप में नहीं हैं। परंतु, यदि हम समीकरण (1) और (2) में, 1/x = p आयर 1/y = q प्रतिस्थापित करें, तो हम पाते हैं:

- 2p + 3q = 13 (3)
- 5p – 4q = -2 (4)

अतः, समीकरणों को रैखिक समीकरणों के युग्म के रूप में व्यक्त कर दिया है। अब इन्हें किसी भी विधि से हल करके p = 2, q = 3 प्राप्त कर सकते हैं।

यहाँ p = 1/x और q = 1/y है

इसलिए, 1/x = 2 और 1/y = 3

अर्थात् x = ½ और y = 1/3

सत्यापन:

दोनों समीकरणों में x = ½ तथा y = 1/3 रखने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं।

इसे एक और व्यवहारिक उदाहरण से समझने कि कोशिश करते हैं:

उदाहरण

एक नाव 10 घंटे में धारा के प्रतिकूल 30 km तथा धारा के अनुकूल 44 km जाती है। 13 घंटे में वह 40 km धारा के प्रतिकूल एवं 55 km धारा के अनुकूल जाती है। धारा की चाल तथा नाव की स्थिर पानी में चाल ज्ञात कीजिए।

उदाहरण का हल

माना नाव की स्थिर जल में चाल x km/h है तथा धारा की चाल y km/h है। साथ ही, नाव की धारा के अनुकूल चाल = (x + y) km/h तथा नाव की धारा के प्रतिकूल चाल = (x – y) km/h होगी।

साथ ही, समय = दूरी/चाल

प्रथम स्थिति में, जब नाव 30 km धारा के प्रतिकूल चलती है, माना घंटों में लिया गया समय

ज1 है। तबचाल

प्रथम स्थिति में, जब नाव 30 शउ धारा के प्रतिकूल चलती है, माना घंटों में लिया गया समय t_1 है। तब

$t_1 = 30/(x - y)$

माना t_2 घंटों में वह समय है जिसमें नाव 44 km धारा के अनुकूल चलती है। तब, $t_2 = 44/(x + y)$ है। कुल लगा समय $t_1 + t_2$, 10 घंटा है। अतः, हमें समीकरण मिलता है:

- $30/(x - y) + 44/(x + y) = 10$ (1)

दूसरी स्थिति में, 13 घंटों में वह 40 km धारा के प्रतिकूल और 55 km धारा के अनुकूल चलती है। हम इससे समीकरण प्राप्त करते हैं:

- $40/(x - y) + 55/(x + y) = 13$ (2)

उपरोक्त समीकरणों को रैखिक समीकरणों के युग्म के रूप में व्यक्त करने के लिए

- $1/(x - y) = u$ और $1/(x + y) = v$ (3)
- $30u + 44v = 10$ या $30u + 44v - 10 = 0$ (4)
- $40u + 55v = 13$ या $40u + 55v - 13 = 0$ (5)

समीकरण 3 और 4 को हल करने पर $u = 1/5, v = 1/11$

अब u, v के इन मानों को समीकरणों (3) में रखने पर, हम पाते हैं:

$1/(x - y) = 1/5$

और $1/(x + y) = 1/11$

अर्थात् $x - y = 5$ और $x + y = 11$ (6)

x और y के सापेक्ष समीकरण को हल करने पर

$x = 8, y = 3$

उत्तर के सत्यापन्न के लिए x और y के मान समीकरण 1 और 2 में रखकर जांच कर सकते हैं।

समान्तर रेखाएं

समानांतर रेखाएँ किसी समतल में बनी ऐसी रेखाएँ होती हैं जो कभी नहीं मिलती। यह तभी सम्भव है जब इन रेखाओं के बीच की दूरी (अंतर) एक समान ही रहता है, यानि कभी नहीं बदलता।

उदाहरण के लिए रेखाएं $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ और $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ समान्तर होगीं यदि $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$

प्रतिच्छेदी रेखाएँ

किसी एक तल की दो भिन्न रेखाएँ, जिनमें एक बिंदु उभयनिष्ठ हो, प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं; तथा उभयनिष्ठ बिंदु को प्रतिच्छेद बिंदु कहते हैं।

उदाहरण के लिए रेखाएं $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ और $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ प्रतिच्छेदी होगीं यदि $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$

संपाती रेखाएं

जब एक ही रेखा पर अन्य एक या एक से अधिक रेखाएं होती है, तो वह संपाती रेखाएं कहलाती है।

उदाहरण के लिए रेखाएं $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ और $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ सम्पाती होगीं यदि $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$

उदाहरण

एक कक्षा के विद्यार्थियों को पंक्तियों में खड़ा होना है। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियाँ अधिक बनतीं। कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल

माना एक पंक्ति में विद्यार्थियों कि संख्या x है और पंक्तियों की संख्या y है।

तो कुल विद्यार्थियों की संख्या $= x \times y = xy$

उदाहरण

प्रथम स्थिति के अनुसार अगर एक पंक्ति में 3 विद्यार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती।

अर्थात् एक पंक्ति में विद्यार्थियों संख्या $= x + 3$

तो पंक्तियों की संख्या $= y - 1$

विद्यार्थियों की कुल संख्या $(x + 3)(y - 1) = xy$

या $x = 3y - 3$ (1)

द्वितीय स्थिति के अनुसार अगर एक पंक्ति में 3 विद्यार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियां बढ़ जाती हैं।

अर्थात् एक पंक्ति में विद्यार्थियों संख्या $= x - 3$

तो पंक्तियों की संख्या $= y + 2$

विद्यार्थियों की कुल संख्या $(x - 3)(y + 1) = xy$

या $2x = 3y + 6$ (2)

समीकरण 1 और 2 को हाल करने पर

$x = 9$ और $y = 4$ प्राप्त होते हैं।

अतः कुल विद्यार्थियों की संख्या = xy

$= 9 \times 4 = 36$

यदि समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2 x + b_2y + c_2 = 0$ *हो तो संगत चरों के गुणांकों का अनुपात देखने पर निम्न स्थिति के अनुसार निर्णय किया जाता है।*

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 3.1 (पृष्ठ संख्या 49)

प्रश्न 1 आफ़ताब अपनी पुत्री से कहता है, 'सात वर्ष पूर्व मैं तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद मैं तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊँगा (क्या यह मनोरंजक है?) इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर- माना आफ़ताब की वर्त्तमान आयु = x वर्ष

और उसकी पुत्री की वर्त्तमान आयु = y वर्ष

7 वर्ष पूर्व आफ़ताब की आयु = x - 7 वर्ष

और उसकी पुत्री की आयु = y - 7 वर्ष

स्थित - I

$x - 7 = 7(y - 7)$

$x - 7 = 7y - 49$

$x - 7y = 7 - 49$

$x - 7y = -42$ ...(1)

3 वर्ष बाद आफ़ताब की आयु = x + 3 वर्ष

और उसकी पुत्री की आयु = y + 3 वर्ष

स्थित - II

$x + 3 = 3(y + 3)$

$x + 3 = 3y + 9$

$x - 3y = 9 - 3$

$x - 3y = 6$ ...(2)

बीजगणितीय रूप में

$x - 7y = -42$ ...(1)

$x - 3y = 6$ ... (2)

ग्राफीय रूप में प्रदर्शन:

$x - 7y = -42$

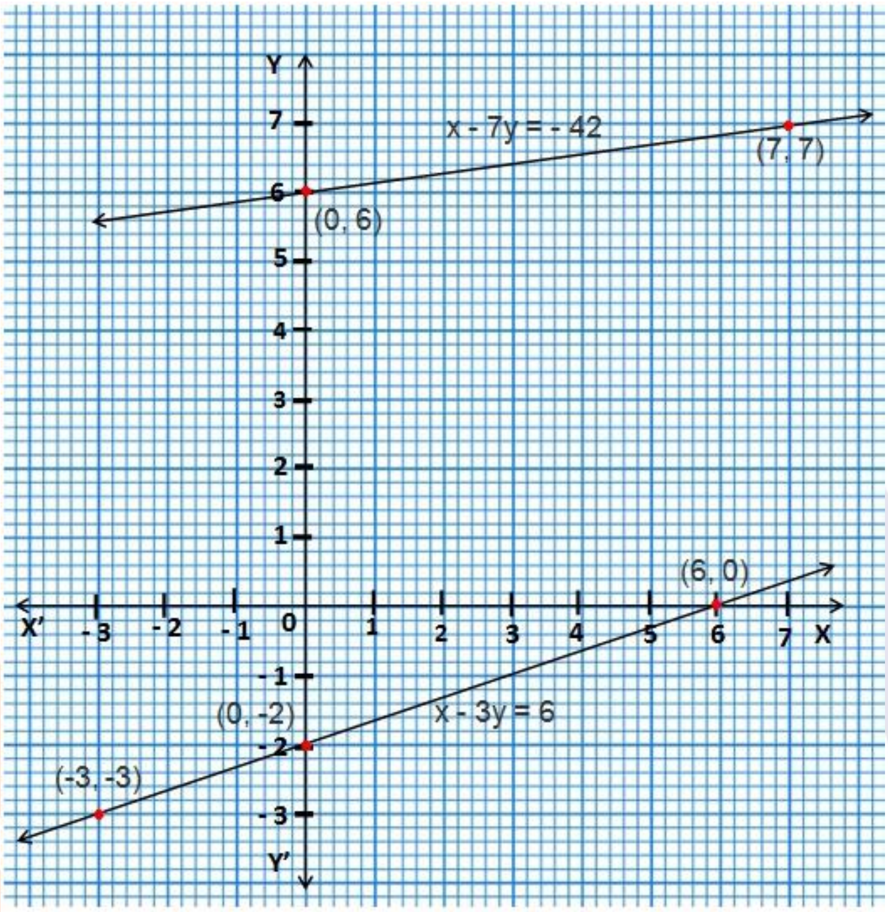
$x = -42 + 7y$

x	-7	0	7
y	5	6	7

$x - 3y = 6$

$x = 6 + 3y$

x	0	-3	6
y	-2	-3	0



प्रश्न 2 क्रिकेट टीम के एक कोच ने 3900 रुपये में 3 बल्ले तथा 6 गेंदे खरीदी। बाद में उसने एक और बल्ला तथा उसी प्रकार की 2 गेंदे 1300 रुपये में खरीदीं। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर- माना एक बल्ले का मूल्य = x रुपये

और एक गेंद का मूल्य = y रुपये

अत :बीजगणितीय निरूपण

$3x + 6y = 3900$ ...(1) और

$x + 2y = 1300$ ...(2)

समी. (1) से

$3x + 6y = 3900$

$3(x + 2y) = 3990$

या $x + 2y = 1300$

x = 1300 - 2y

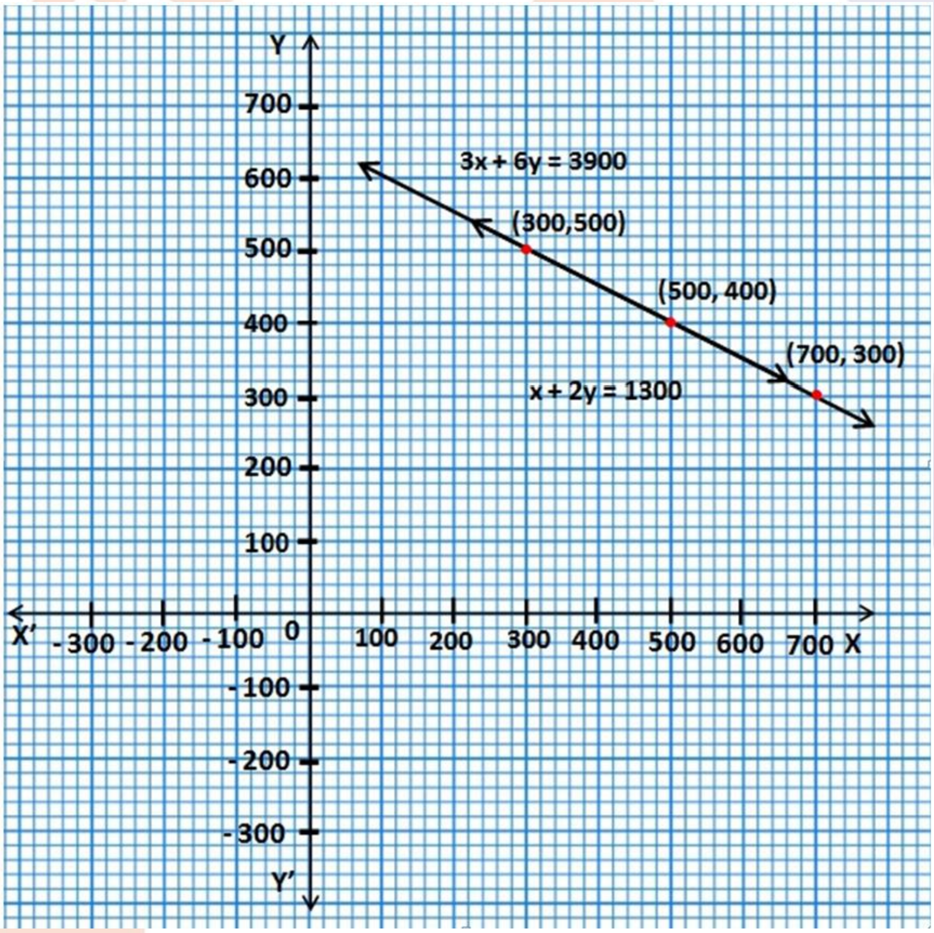
x	700	500	300
y	300	400	500

इसी प्रकार समी. (2) से

x + 2y = 1300

x = 1300 - 2y

x	700	500	300
y	300	400	500



प्रश्न 3 2 किलोग्राम सेब और 1 किलोग्राम अंगूर का मूल्य किसी दिन 160 रुपये था। एक महीने बाद 4 किलोग्राम सेब और 2 किलोग्राम अंगूर का मूल्य 300 रुपये हो जाता है। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर- माना एक किलों सेब का मूल्य = x रुपया

और एक किलो अंगूर का मूल्य = y रुपया

अत :बीजगणितीय निरूपण

$2x + y = 160$ ...(1)

$4x + 2y = 300$ ...(2)

ग्राफीय निरूपण

समी) .1) से

$2x + y = 160$

$y = 160 - 2x$

x	40	50	60
y	80	60	40

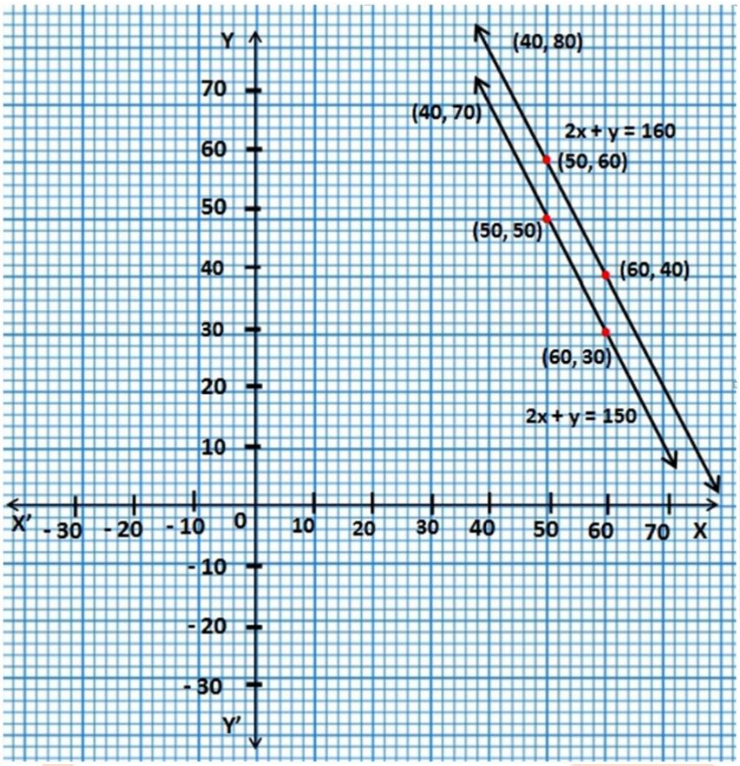
अब समी. (2) से

$4x + 2y = 300$

या $2x + y = 150$

$y = 150 - 2x$

x	40	50	60
y	70	50	30



प्रश्नावली 3.2 (पृष्ठ संख्या 55-56)

प्रश्न 1 निम्न समस्या में रैखिक समीकरण के युग्म बनाइए और उनके ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

(i) कक्षा x के 10 विधार्थियों ने एक गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लिए लडको और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) 5 पेंसिल तथा 7 कलमों का कुल मूल्य 50 रुपये है, जबकि 7 पेंसिल तथा 5 कलमों का कुल मूल्य 46 रुपये है। एक पेंसिल का मूल्य तथा एक कलम का मूल्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) माना लड़कियों की संख्या = x

तथा लड़कों की संख्या = y

प्रश्नानुसार लड़के और लडकियाँ की कुल संख्या 10 है।

इसलिए, x + y = 10 ...(1)

लड़कों से लड़कियाँ 4 अधिक हैं।

इसलिए, x - y = 4 ...(2)

समी. (1) के लिए तालिका x + y = 10

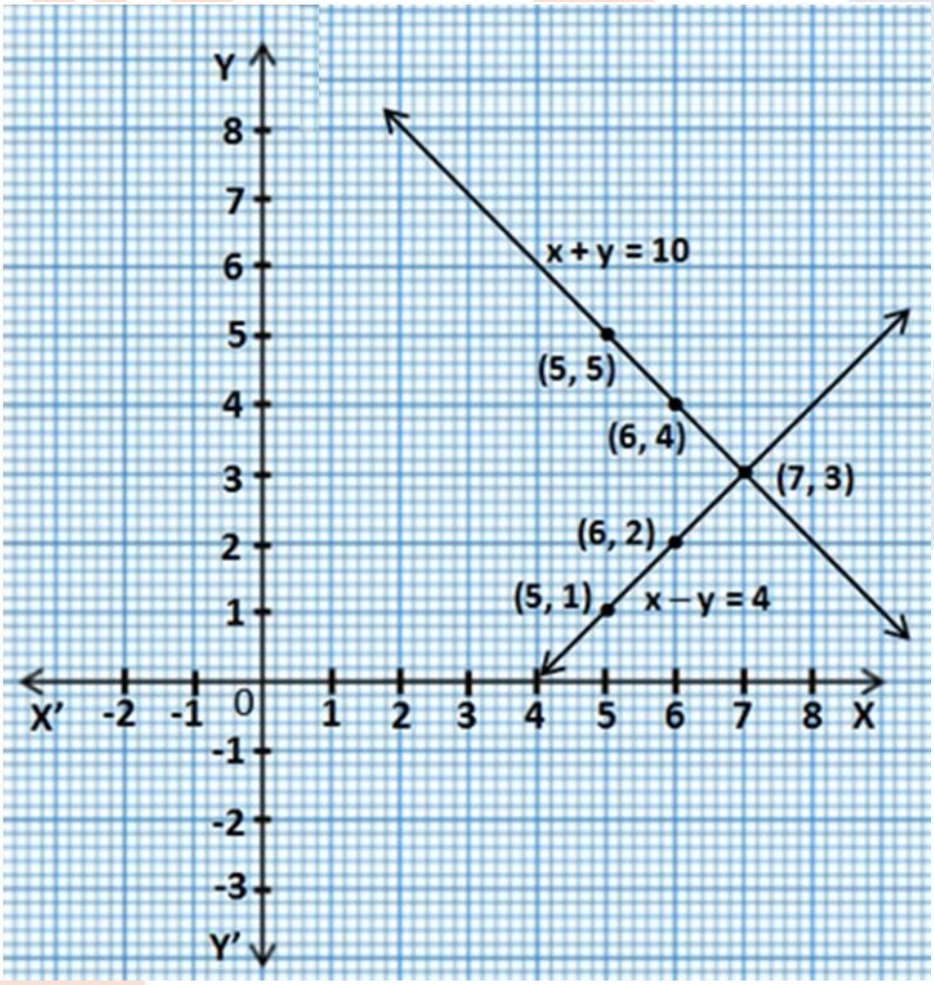
⇒ x = 10 - y

x	5	6	7
y	5	4	3

समी) .2) के लिए तालिका x - y = 4

⇒ x = 4 + y

x	5	6	7
y	1	2	3



ग्राफीय विधि से हल के लिए हम जब बने ग्राफ को देखते हैं तो पाते हैं कि बिंदु) 7, 3) दिए गए समीकरण के लिए प्रतिच्छेदन बिंदु है जो कि रैखिक समीकरण युग्म का उभयनिष्ठ हल है।

इसलिए, लड़कियों कि संख्या = 7 और लड़कों की संख्या = 3 है।

(ii) माना एक पेन्सिल का मूल्य = x रुपये

और एक कलम का मूल्य = y रुपये

प्रश्नानुसार,

5x + 7y = 50 ...(1) और

7x + 5y = 46 ...(2)

समी) .1) से

5x + 7y = 50

⇒ 5x = 50 - 7y

$\Rightarrow x = \frac{50-7y}{5}$

x	3	10	-4
y	5	0	10

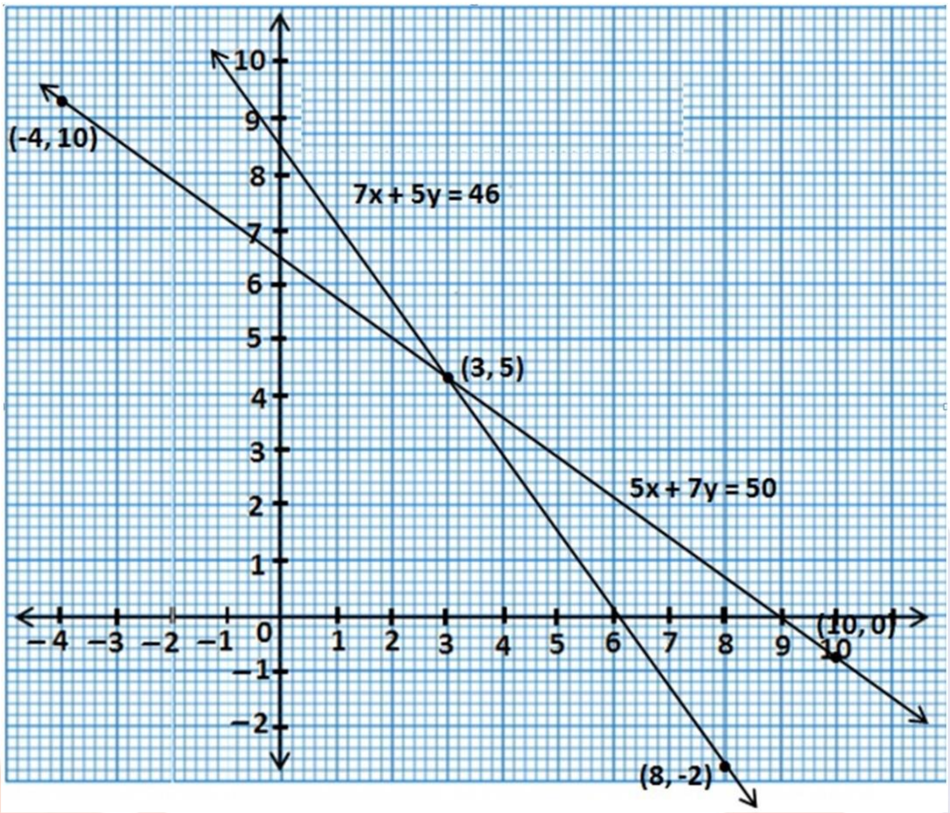
समी) .2) से

7x + 5y = 46

⇒ 7x = 46 − 5y

$\Rightarrow x = \frac{46-5y}{7}$

x	8	3	-2
y	-2	5	-12



ग्राफीय विधि से हल के लिए हम जब बने ग्राफ को देखते हैं तो पाते हैं कि बिंदु) 3, 5) दिए गए समीकरण के लिए प्रतिच्छेदन बिंदु है जो कि रैखिक समीकरण युग्म का उभयनिष्ठ हल है।

इसलिए, पेन्सिल का मूल्य = 3 और कलम का मूल्य = 5 है।

प्रश्न 2 अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म द्वारा निरुपित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, समांतर है अथवा संपाती है।

(i) $5x - 4y + 8 = 0$

$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$

$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$

$2x - y + 9 = 0$

उत्तर-

(i) $5x - 4y + 8 = 0$

$7x + 6y - 9 = 0$

$a_1 = 5, b_1 = -4, c_1 = 8$

$a_2 = 7, b_2 = 6, c_2 = -9$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{6}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{-9}$

यहाँ $\frac{5}{7} \neq \frac{-4}{6}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः जब $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो तो दिए गए समीकरण युग्म के लिए रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$

$18x + 6y + 24 = 0$

$a_1 = 9, b_1 = 3, c_1 = 12$

$a_2 = 18, b_2 = 6, c_2 = 24$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{24}$

यहाँ $\frac{9}{18} = \frac{3}{6} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो तो दिए गए समीकरण युग्म के लिए रेखाएँ संपाती होती है। अतः संपाती है।

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$

$2x - y + 9 = 0$

$a_1 = 6, b_1 = -3, c_1 = 10$

$a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = 9$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{6}{2}=\frac{3}{1},\frac{b_1}{b_2}=\frac{-3}{-1}=\frac{3}{1},\frac{c_1}{c_2}=\frac{10}{9}$$

यहाँ $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}\neq\frac{10}{9}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

अतः जब $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ हो तो दिए गए समीकरण युग्म के लिए रेखाएँ समान्तर होती है। अतः समान्तर है।

प्रश्न 3 अनुपातों $\frac{a_1}{a_2},\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखीक समीकरण के युग्म संगत है या असंगत।

(i) $3x + 2y = 5; 2x - 3y = 7$
(ii) $2x - 3y = 8; 4x - 6y = 9$
(iii) $\frac{3}{2}x+\frac{5}{3}y=7; 9x-10y=14$
(iv) $5x + 3y = 11; 10x + 6y = -22$
(v) $\frac{4}{3}x+2y-8;\ 2x+3y=12$

उत्तर-

(i)

$3x + 2y = 5; 2x - 3y = 7$

$a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 5$

$a_2 = 2, b_2 = -3, c_2 = 7$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{2},\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{-3},\frac{c_1}{c_2}=\frac{5}{7}$$

यहाँ $\frac{3}{2}\neq\frac{2}{-3}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ है इसलिए ये रेखाएँ प्रतिच्छेदी है अत: रैखिक समीकरण का युग्म संगत हैं।

(ii)

$2x - 3y = 8; 4x - 6y = 9$

$a_1 = 2, b_1 = -3, c_1 = 8$

$a_2 = 4, b_2 = -6, c_2 = 9$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{9}$

यहाँ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{8}{9}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ है इसलिए ये रेखाएँ समान्तर है अतः रैखीक समीकरण का युग्म असंगत है।

(iii)

$\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7; 9x - 10y = 14$

समी. (1) से

$\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$

$\Rightarrow 9x - 10y = 42 \ldots (2)$

$a_1 = 9, b_1 = 10, c_1 = 42$

$a_2 = 9, b_2 = -10, c_2 = 14$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{9} = \frac{1}{1}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{10}{-10} = \frac{-1}{1}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{42}{14}$

यहाँ $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ है इसलिए ये रेखाएँ परिच्छेदी है अतः रैखीक समीकरण का युग्म संगत है।

(iv)

5x + 3y = 11; 10x + 6y = -22

तुलना समीकरण

$5x - 3y = 11$

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

और $-10x + 6y = -22$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$

$a_1 = 5, b_1 = -3, c_1 = -11, a_2 = -10, b_2 = 6, c_2 = 22$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-11}{22} = \frac{-1}{2}$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

इसलिए, लाइनों में अनंत कई समाधान हैं। इसलिए, वे सुसंगत हैं।

(v)

$\frac{4}{3}x + 2y - 8;\ 2x + 3y = 12$

तुलना समीकरण

$\frac{4}{3}x + 2y = 8$

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

और $2x + 3y = 12$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$

हमें मिला $\left(a_1 = \frac{4}{3}, b_1 = 2, c_1 = -8, a_2 = 2, b_2 = 3, c_2 = -12\right)$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

इसलिए, लाइनों में अनंत कई समाधान हैं। इसलिए, वे सुसंगत हैं।

प्रश्न 4 निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों में से कौन से युग्म संगत/ असंगत है, यदि संगत है तो ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

(i) x + y = 5, 2x + 2y = 10
(ii) x - y = 8, 3x - 3y = 16
(iii) 2x + y -6 = 0, 4x - 2y -4 = 0
(iv) 2x - 2y -2 = 0, 4x - 4y -5 = 0

उत्तर-

(i) x + y = 5 ...(1)

2x + 2y = 10 ...(2)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अत :ये संपाती है इसलिए ये संगत है।

ग्राफ के लिए

समीकरण) 1) से

x + y = 5

या x = 5 - y

y का मान 0, 1, 2 रखने पर x का मान क्रमश :5, 4 और 3 प्राप्त होता है।

x	5	4	3
y	0	1	2

समीकरण) 2) से

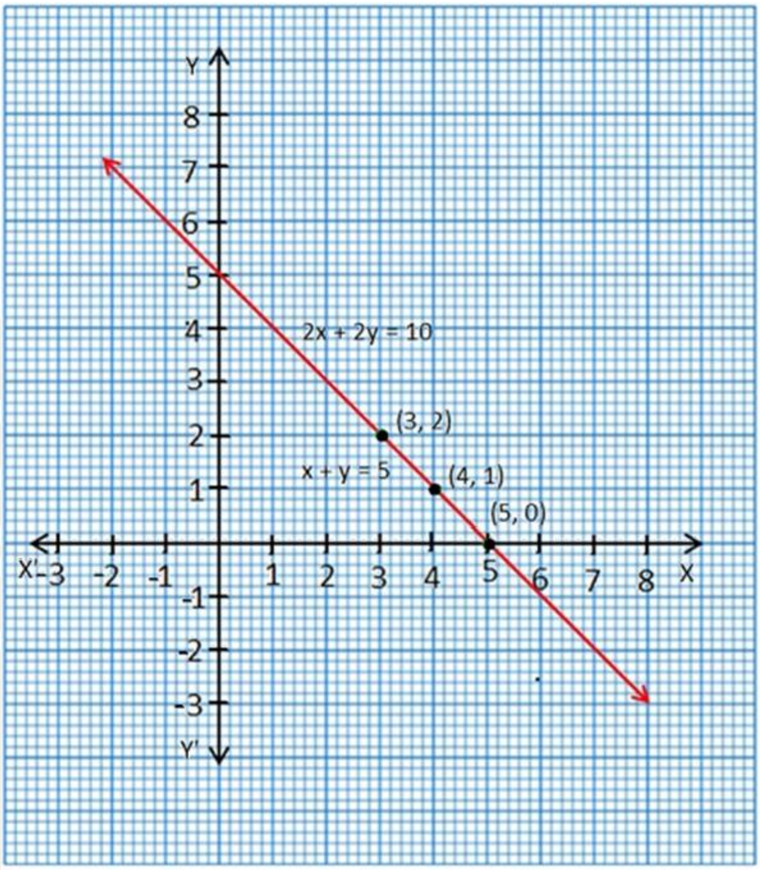
2x + 2y = 10

⇒ x + y = 5

y का मान 0, 1, 2 रखने पर x का मान क्रमश :5, 4 और 3 प्राप्त होता है।

x	5	4	3
y	0	1	2

समीकरण x + y = 5 और 2x + 2y = 10 के लिए ग्राफ



(ii) x - y = 8 ...(1)

3x - 3y = 16 ...(2)

संगत /असंगत के लिए जाँच

$$\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{8}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अत: ये समान्तर है इसलिए ये असंगत है।

(iii) 2x + y -6 = 0 ...(1)

4x - 2y -4 = 0 ...(2)

संगत /असंगत के लिए जाँच

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

अत :ये प्रतिच्छेद करती है इसलिए ये संगत है।

अब ग्राफ के लिए समीकरण) 1) से

2x + y -6 = 0

y = 6 - 2x

x का मान 0, 1, और 2 रखने पर y का मान क्रमशः 6, 4, और 2 प्राप्त होता है।

x	0	1	2
y	6	4	2

समीकरण) 2) से

4x - 2y -4 = 0

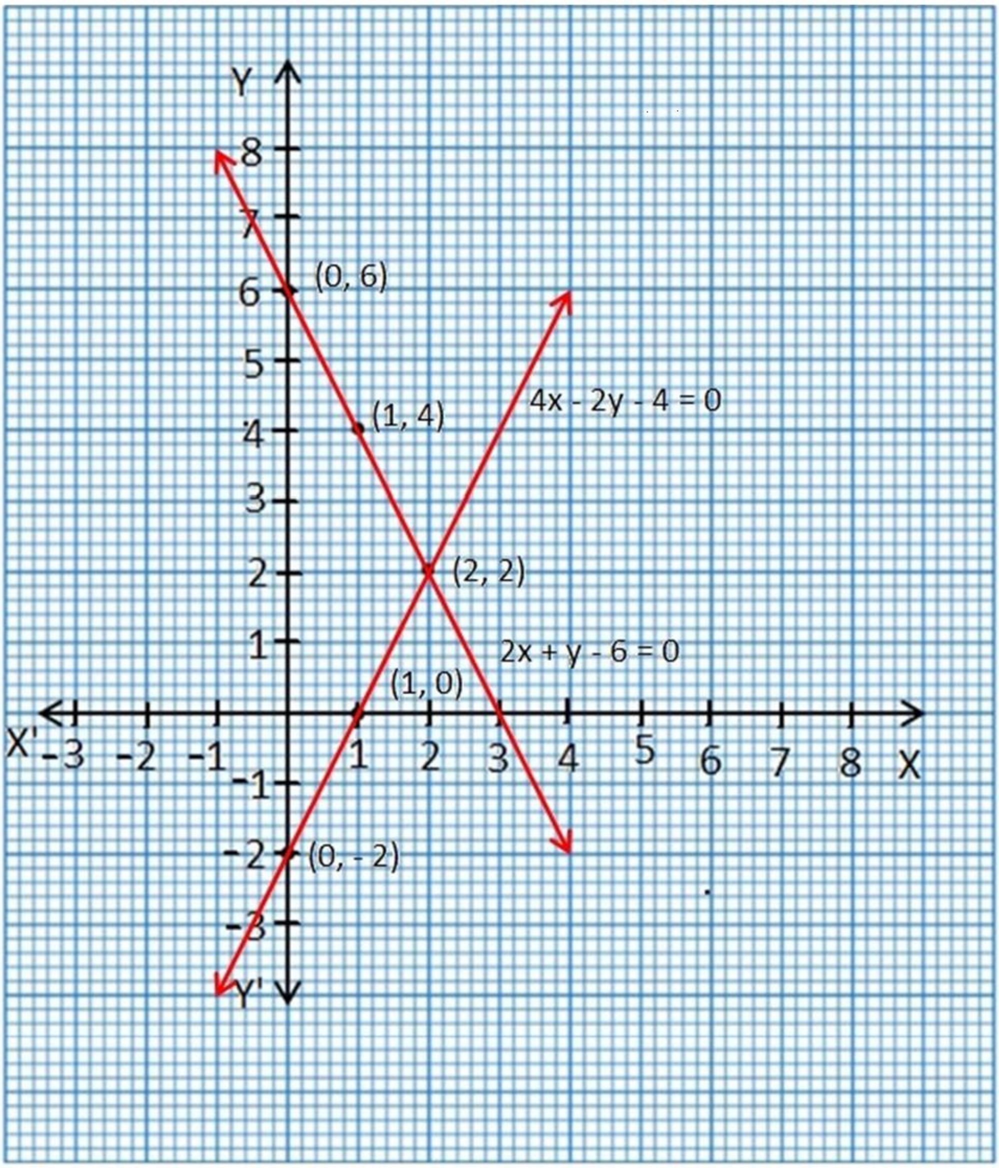
या 2x - y - 2 = 0 (सरल करने पर(

y = 2x - 2

x का मान 0, 1, और 2 रखने पर y का मान क्रमशः- 2, 0 और 2 प्राप्त होता है।

x	0	1	2
y	-2	0	2

तालिका (1) और (2) के निर्देशांक बिन्दुओ को ग्राफ पेपर पर स्थापित करने पर



(iv) 2x - 2y -2 = 0 ...(1)

4x - 4y -5 = 0 ...(2)

संगत /असंगत के लिए जाँच

$$\frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{-2}{-5}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अत: ये समान्तर है और इसलिए ये असंगत है।

प्रश्न 5 एक आयताकार बाग़ जिसकी लंम्बाई, चौड़ाई से 4 मीटर अधिक है, का अर्धपरिमाप 36 मीटर है। बाग़ की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना आयताकार बाग की लंबाई = x मीटर

और चौड़ाई = y मीटर है।

अर्धपरिमाप = 36 मीटर

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{परिमाप}}{2}$$

अतः स्थति) 1)

x - y = 4 ...(1)

स्थति) 2)

2(लम्बाई + चौड़ाई = (परिमाप

$$\text{या} \quad \text{लंबाई} + \text{चौड़ाई} = \frac{\text{परिमाप}}{2}$$

या x + y = 36 ...(2)

समीकरण) 2) से

x - y = 4

⇒ x = 4 + y

अब x का मान 4 + y समीकरण) 2) में रखने पर

x + y = 36

⇒ 4 + y + y = 36

⇒ 4 + 2y = 36

⇒ 2y = 36 - 4

⇒ 2y = 32

$\Rightarrow y = \frac{36}{2} = 16$

अब $y = 16$ समीकरण) 1) में रखने पर

$x = 4 + y$

या $x = 4 + 16 = 20$

अतः बाग की लंबाई = 20 मीटर और चौडाई = 16 मीटर।

प्रश्न 6 एक रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ दी गई है। दी चरों में एक ऐसी और रैखिक समीकरण लिखिए ताकि प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण जैसा कि

(i) प्रतिछेद करती रेखाएँ हों।
(ii) समांतर रेखाएँ हो।
(iii) संपाती रेखाएँ हों।

उत्तर-

(i) $2x + 3y - 8 = 0$ ...(1) (दिया है(

हमें एक और ऐसी ही रैखिक समीकरण खींचना है जिससे प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण।

प्रतिच्छेद करती रेखाए हो रेखाए प्रतिच्छेद करती हो इसके लिए

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ होना चाहिए।

अतः $3x + 2y - 10 = 0$ ...(2)

जो इस शर्त को पूरा करती है। इसलिए समीकरण युग्म है।

$2x + 3y - 8 = 0$ ...(1)

$3x + 2y - 10 = 0$ ...(2)

(ii) $2x + 3y - 8 = 0$ ...(1) (दिया है(

हमें एक और ऐसी ही रैखिक समीकरण खींचना है जिससे प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण।

समान्तर रेखाएं हो

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अतः दूसरे समीकरण है

4x + 6y - 5 = 0 ...(2)

जो इस शर्त को पूरा करती है। इसलिए समीकरण युग्म है।

2x + 3y - 8 = 0 ...(1)

4x + 6y - 5 = 0 ...(2)

(iii) 2x + 3y - 8 = 0 ...(1) (दिया है(

हमें एक और ऐसी ही रैखिक समीकरण खींचना है जिससे प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण।

संपाती रेखाएँ हों

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अतः दूसरे समीकरण है

4x + 6y - 16 = 0 ...(2)

जो इस शर्त को पूरा करती है। अतः समीकरण युग्म है।

2x + 3y - 8 = 0 ...(1)

4x + 6y - 16 = 0 ...(2)

प्रश्न 7 समीकरणों x - y + 1 = 0 और 3x + 2y - 12 = 0 का ग्राफ खींचिए। x- अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए।

उत्तर- x - y + 1 = 0 ...(1)

3x + 2y - 12 = 0 ...(2)

समीकरण) 2) से

x - y + 1 = 0

या y = x + 1

अब x का मान 0, 1 और 2 रखने पर y का मान क्रमश :1, 2 और 3 प्राप्त होता है जिसकी तालिका निम्न है।

x	0	1	2
y	1	2	3

समीकरण) 2) से

$3x + 2y - 12 = 0$

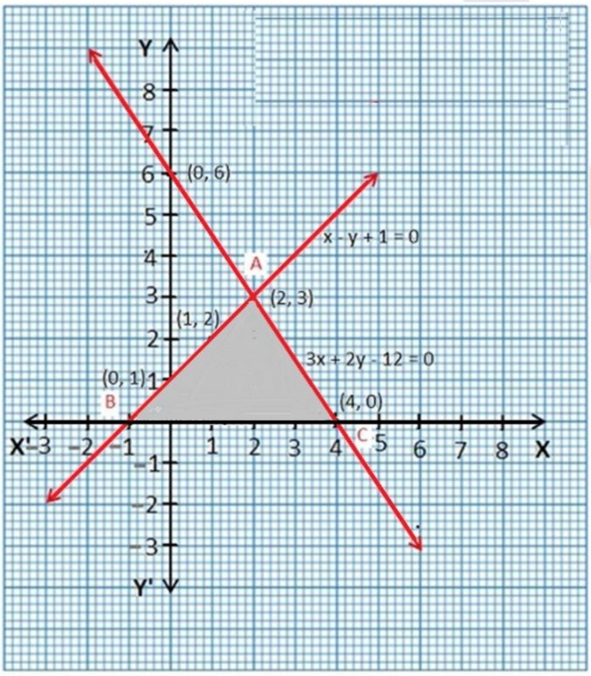
$2y = 12 - 3x$

$$y = \frac{12 - 3x}{2}$$

अब इसमें x का मान 0, 2 और 4 रखने पर y का मान क्रमश: 6, 3 और 0 प्राप्त होता है जिसकी तालिका निम्न है।

x	0	2	4
y	6	3	0

दोनों तालिकाओं को ग्राफ पर स्थापित करने पर



प्रश्नावली 3.3 (पृष्ठ संख्या 59-60)

प्रश्न 1 निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए-

(i) x + y = 14,

x - y = 4

(ii) $s - t = 3$

$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) 3x - y = 3

9x - 3y = 9

(iv) 0.2x + 0.3y = 1.3

0.4x + 0.5y = 2.3

(v) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 0$

$\sqrt{3x} - \sqrt{8y} = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = 2$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{13}{6}$

उत्तर-

(i) x + y = 14 ...(1)

x - y = 4 ...(2)

प्रतिलोपन विधि से

समीकरण) 2) से

x - y = 4

x = 4 + y

अब समीकरण) 1) में x का मान 4 + y रखने पर

x + y = 14

$\Rightarrow (4 + y) + y = 14$

$\Rightarrow 4 + 2y = 14$

$\Rightarrow 2y = 14 - 4$

$\Rightarrow 2y = 10$

$\Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$

अब y मान समीकरण) 2) में रखने पर

$\Rightarrow x = 4 + y$ या $x = 4 + 5 = 9$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है।

अतः $x = 9$, और $y = 5$

(ii)

$$s - t = 3 \ldots (1)$$

$$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6 \text{ या } 2s + 3t = 36 \ldots (2)$$

समीकरण) 1) से

$s - t = 3$ या $s = 3 + t$

अब s का मान समीकरण) 2) में रखने पर

$25 + 3t = 36$

$\Rightarrow 2(3 + t) + 3t = 36$

$\Rightarrow 6 + 2t + 3t = 36$

$\Rightarrow 6 + 5t = 36$

$\Rightarrow 5t = 36 - 6$

$\Rightarrow 5t = 30$

$t = \frac{30}{5} = 6$

अतः t = 6

अब इस t के मान को पुन समीकरण) 1) में रखने पर

⇒ s = 3 + t

⇒ s = 3 + 6 = 9

अतः s = 9

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है।

⇒ s = 9 और t = 6

(iii) 3x - y = 3 ...(1)

9x - 3y = 9 ...(2)

प्रतिस्थापन विधि से समीकरण) 1) लेने पर

⇒ 3x - y = 3

⇒ 3x - 3 = y

⇒ y = 3x - 3 अब इस y के मान को समीकरण) 2) में रखने पर

⇒ 9x - 3y = 9

⇒ 9x - 3(3x - 3) = 9

⇒ 9x - 9x + 9 = 9

⇒ 9 = 9

⇒ x = 0 और y = 3x - 3

अत :दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का हल है।

x = 0 और y = 3x – 3

(iv) 0.2x + 0.3y = 1.3

0.4x + 0.5y = 2.3

सरल करने पर 0.2x + 0.3y = 1.3

$$\Rightarrow \frac{2x}{10} + \frac{3y}{10} = \frac{1.3}{10}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13 \ldots (1)$$

अब, 0.4x + 0.5y = 2.3

$$\Rightarrow \frac{4x}{10} + \frac{5y}{10} = \frac{23}{10}$$

$$\Rightarrow 4x + 5y = 23 \ldots (2)$$

अब समीकरण (1) लेने पर

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13$$

$$\Rightarrow 2x = 13 - 3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{13-3y}{2}$$

अब x के इस मान को समीकरण (2) में रखने पर

4x + 5y = 23

$$\Rightarrow 4\left(\frac{13-3y}{2}\right) + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 2(13 - 3y) + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 26 - 6y + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 26 - y = 23$$

$$\Rightarrow y = 26 - 23$$

$$\Rightarrow y = 3$$

अब y के मान को समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow x = \frac{13-13y}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{13-3(3)}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{13-9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2=2}$$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है।

x = 2 और y = 3

(v)

$$\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 0 \ldots (1)$$

$$\sqrt{3x} - \sqrt{8y} = 0 \ldots (2)$$

समीकरण (1) से

$$\Rightarrow \sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x} - \sqrt{3y}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{2}}$$

अब x का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\Rightarrow \sqrt{3x} - \sqrt{8y} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{8y} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3y} - \sqrt{16y} = 0$$

$$\Rightarrow -3y - 4y = 0$$

$$\Rightarrow -7y = 0$$

$$y = 0$$

अब y = 0 समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}(0)}{\sqrt{2}} = 0$$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है।

x = 0 और y = 0

(vi)

$$\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = 2$$

$$\Rightarrow 9x - 10y = -12 \ldots (1)$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13 \ldots (3)$$

समीकरण (ii) लेने पर

2x + 3y = 13

⇒ 2x = 13 - 3y

$$\Rightarrow x = \frac{13-3y}{2}$$

2 अब x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

9x - 10y = -12

$$\Rightarrow 9\left(\frac{13-3y}{2}\right) - 10y = -12$$

⇒ 117 - 27y - 20y = -24

⇒ 117 - 47y = -24

⇒ 47y = 117 + 24

⇒ 47y = 141

$$\Rightarrow y = \frac{141}{47} = 3$$

अब समीकरण (1) में y = 3 में रखने पर

$$\Rightarrow x = \frac{13-3(3)}{2} = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का हल है।

x = 2 और y = 3

प्रश्न 2 2x + 3y = 11 और 2x - 4y = -24 को हल कीजिए और इसमें 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए y = mx + 3 हो।

उत्तर- 2x + 3y = 11 ...(1)

2x - 4y = -24 ...(2)

समीकरण) 1) से

2x + 3y = 11

⇒ 2x = 11 - 3y

$$\Rightarrow x = \frac{11-3y}{2} \ldots(3)$$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर

2x - 4y = -24

$$\Rightarrow 2\left(\frac{11-3y}{2}\right) - 4y = -24$$

⇒ 11 - 3y - 4y = -24

⇒ 11 - 7y = -24

⇒ 7y = 11 + 24

⇒ 7y = 35

$$\Rightarrow y = \frac{35}{7} = 5$$

समीकरण (3) में y = 5 रखने पर

$$\Rightarrow x = \frac{11-3y}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11-3(5)}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11-15}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

$x = -2$ और $y = 5$

अब m का मान प्राप्त करने के लिए x और y का मान y = mx + 3 में रखने पर

$y = mx + 3$

$\Rightarrow 5 = m(-2) + 3$

$\Rightarrow 5 = -2m + 3$

$\Rightarrow -2m = 5 - 3$

$\Rightarrow -2m = 2$

$\Rightarrow m = -1$

प्रश्न 3 निम्न समस्या में रैखिक समीकरण युग्म बनाइए और उनके हल प्रतिस्थापन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।
(ii) दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18° अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए।
(iii) एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदे 3800 रूपये में खरीदी। बाद में, उसने 3 बल्ले तथा 5 गेंदें 1750 रूपये में खरीदी। प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।
(iv) एक नगर में टैक्सी के भाड़े में एक नियत भाड़े के अतिरिक्त चली गई दुरी पर भाडा सम्मिलित किया जाता है। 10 किलोमीटर दुरी के लिए 105 रूपये है तथा 15 किलोमीटर के लिए भाडा 155 रूपये है। नियत भाडा तथा प्रति किलोमीटर भाडा ज्ञात कीजिए और एक व्यक्ति को 25 किलोमीटर यात्रा करने के लिए कितना भाडा देना होगा?
(v) यदि किसी भिन्न के अंश और दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।
(vi) पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से तीन गुनी हो जाएगी। पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु उसके पुत्र की सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु क्या है?

उत्तर-

(i) माना पहली संख्या x और दूसरी संख्या y है।

तो प्रश्नानुसार,

स्थिति) I)

$x - y = 26$ ...(1)

स्थिति) II)

$x = 3y$ ...(2)

अब समीकरण) 1) में $x = 3y$ रखने पर

$x - y = 26$

$\Rightarrow 3y - y = 26$

$\Rightarrow 2y = 26$

$\Rightarrow y = 13$

अब $y = 13$ समीकरण) 2) में रखने पर

$x = 3y$

$\Rightarrow x = 3 \times 13 = 39$

अतः पहली संख्या 39 है और दूसरी संख्या 13 है।

(ii) माना दो संपूरक कोणों में से बड़ा कोण x है

और छोटा कोण y है।

अत: $x - y = 180^\circ$ ...(1)

$x + y = 180^\circ$ ...(2)

(संपूरक कोणों का योग 180° होता है(

अब समीकरण) 1) से

$x - y = 180°$

$\Rightarrow x = 18° + y$

अब x का मान समीकरण) 2) में रखने पर

$\Rightarrow x + y = 180°$

$\Rightarrow 18° + y + y = 180°$

$\Rightarrow 18° + 2y = 180°$

$\Rightarrow 2y = 180° - 18°$

$\Rightarrow 2y = 162°$

$\Rightarrow y = \frac{162°}{2}$

$\Rightarrow y = 81°$

y का मान समीकरण) 1) में रखने पर

$\Rightarrow x = 18° + y$

$\Rightarrow x = 18° + 81°$

$\Rightarrow x = 99°$

अत :बड़ा कोण 99° है और छोटा कोण 81° है।

(iii) माना एक बल्ले का मूल्य x रुपये

और एक गेंद का मूल्य y रुपये है।

स्थित) I)

7 बल्ले + 6 गेंद = 3800

$\Rightarrow 7x + 6y = 3800$ ...(1)

स्थित) II)

3 बल्ले + 5 गेंद = 1750

$\Rightarrow 3x + 5y = 1750$ ...(2)

समीकरण) 2) से

$3x + 5y = 1750$

$\Rightarrow 3x = 1750 - 5y$

$$\Rightarrow x = \frac{1750-5y}{3}$$

अब इस x के मान को समीकरण (1) में रखने पर

7x + 6y = 3800

$$7\left(\frac{1750-5y}{3}\right) + 6y = 3800$$

⇒ 12250 - 35y + 18y = 11400

⇒ 12250 - 17y = 11400

⇒ 17y = 12250 - 11400

⇒ 17y = 850

$$\Rightarrow y = \frac{850}{17} = 50$$

अब y = 50 समीकरण (2) में रखने पर

$$\Rightarrow x = \frac{1750-5y}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1750-5\times50}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1750-250}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1500}{3} = 500$$

$$\Rightarrow x = 500 \text{ और } y = 50$$

अतः एक बल्ले का मूल्य 500 रुपया है और एक गेंद का मूल्य 50 रुपया है।

(iv) माना टैक्सी का नियत भाडा x रुपया है।

और प्रत्येक अतिरिक्त प्रति किलोमीटर के लिए भाडा y रुपया है।

स्थिति) I)

x + 10y = 105 ...(1)

स्थिति) II)

x + 15y = 155 ...(2)

समीकरण) 1) से

x + 10y = 105

अब x का मान समीकरण) 2) में रखने पर

x + 15y = 155

⇒ (105 - 10y) + 15y = 155

⇒ 105 + 5y = 155

⇒ 5y = 155 - 105

⇒ 5y = 50

$\Rightarrow y = \frac{50}{5} = 10$

अब समीकरण) 1) में y = 10 रखने पर

⇒ x = 105 - 10y

⇒ x = 105 - 10(10)

⇒ x = 105 - 100 = 5

अत :नियत भाडा 5 रुपया और अतिरिक्त किराया 10 रुपया है।

25 किलोमीटर के लिए भाडा = x + 25y

= 5 + 25(10)

= 5 + 250 = 255 रुपये

(v)

माना अंश x है और हर y है।

अत : भिन्न $= \frac{x}{y}$

स्थिति (I)

अंश और हर में 2 जोड़ने पर $\frac{9}{11}$ हो जाता है।

$\frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{11}$

या 11(x + 2) = 9(y + 2)

⇒ 11x + 22 = 9y + 18

⇒ 11x - 9y = 18 - 22

⇒ 11x - 3y = -4 ...(1)

स्थिति) II)

अंश और हर में 3 जोड़ने पर $\frac{9}{11}$ हो जाता है।

$\frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6}$

या 6(x + 3) = 5(y + 3)

⇒ 6x + 18 = 5y + 15

⇒ 6x - 5y = 15 - 18

⇒ 6x - 5y = -3 ...(2)

समीकरण) 2) से

6x - 5y = -3

⇒ 6x + 3 = 5y

$$\Rightarrow y = \frac{6x+3}{5}$$

अब y का मान समीकरण (1) में रखने पर

11x - 9y = -4

$$\Rightarrow 11x - 9\left(\frac{6x+3}{5}\right) = -4$$

⇒ 55x - 54x - 27 = -20

⇒ x = 27 - 20 = x = 7

अब x = 7 समीकरण (2) में रखने पर

$$\Rightarrow y = \frac{6(7)+3}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{42+3}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

अतः अंश 7 और हर 9 है।

इसलिए अभीष्ट भिन्न $\frac{7}{9}$ है।

(vi) माना जैकब की वर्त्तमान आयु x वर्ष है।

और उसके पुत्र की वर्त्तमान आयु y वर्ष है।

स्थिति) I)

पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु = x + 5 वर्ष

और उसके पुत्र की आयु = y + 5 वर्ष

अत :x + 5 = 3(y + 5)

⇒ x + 5 = 3y + 15

⇒ x - 3y = 15 - 5

⇒ x - 3y = 10 ...(1)

स्थित) II)

पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु = x - 5 वर्ष

और पुत्र की आयु = y - 5 वर्ष

तो $x - 5 = 7(y - 5)$

$\Rightarrow x - 5 = 7y - 35$

$\Rightarrow x - 7y = 5 - 35$

$\Rightarrow x - 7y = -30$ ...(2)

समीकरण) 2) से

$\Rightarrow x - 7y = -30$

$\Rightarrow x = 7y - 30$

अब x का मान समीकरण) 1) में रखने पर

$\Rightarrow x - 3y = 10$

$\Rightarrow 37y - 30 - 3y = 10$

$\Rightarrow 4y = 10 + 30$

$\Rightarrow 4y = 40$

$\Rightarrow y = 10$

y = 10 को समीकरण) 2) में रखने पर

$\Rightarrow x = 7(10) - 30$

$\Rightarrow x = 70 - 30 = 40$

अतः जैकब की वर्तमान आयु 40 वर्ष और उसके पुत्र की वर्तमान आयु 10 वर्ष है।

प्रश्नावली 3.4 (पृष्ठ संख्या 63-64)

प्रश्न 1 निम्न समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि तथा प्रतिस्थापना विधि से हल कीजिए। कौन सी विधि अधिक उपयुक्त है?

(i) $x + y = 5$ और $2x - 3y = 4$

(ii) 3x + 4y = 10 और 2x - 2y = 2

(iii) 3x - 5y - 4 = 0 और 9x = 2y + 7

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ और $x - \frac{y}{3} = 3$

उत्तर-

(i) x + y = 5 ...(1)

2x - 3y = 4 ...(2)

समी. (2) × 3 = 3x + 3y = 15 ...(3)

समी. (2) × 1 = 2x - 3y = 4 ... (4)

(नोट :यहाँ y के गुणांक बराबर हो चुके हैं। और चिन्ह विपरीत है इसलिए जोड़ेंगे।(अब समी .)3) और) 4) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{l} 3x + 3y = 15 \text{ ......(iii)} \\ 2x - 3y = \ \ 4 \text{ ......(iv)} \\ \hline 5x \qquad\quad = 19 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{19}{5}$$

अब समीकरण (1) में $x = \frac{19}{5}$ रखने पर

x + y = 5

$$\Rightarrow \frac{19}{5} + y = 5$$

$$\Rightarrow y = 5 - \frac{19}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{25-19}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है $x = \frac{19}{5}$ और $y = \frac{6}{5}$

(ii) 3x + 4y = 10 ...(1)

$2x - 2y = 2 ...(2)$

समी. $(1) \times 1$

$\Rightarrow 3x + 4y = 10 ...(3)$

समी. $(2) \times 2$

$\Rightarrow 4x = 4x - 4y = 4 ... (4)$

समीकरण) 1) और समीकरण) 2) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{l} 3x + 4y = 10 ... (iii) \\ 4x - 4y = \;\; 4 ... (iv) \\ \hline 7x \qquad\quad = 14 \end{array}$$

$\Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$

अब x का मान 2 समीकरण) 1) में रखने पर

$3x + 4y = 10$

$\Rightarrow 3(2) + 4y = 10$

$\Rightarrow 6 + 4y = 10$

$\Rightarrow 4y = 10 - 6$

$\Rightarrow 4y = 4$

$\Rightarrow y = 1$

अत :दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का हल है $x = 2$ और $y = 1$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$

$\Rightarrow 3x - 5y = 4 ...(1)$

$\Rightarrow 9x = 2y + 7$

$\Rightarrow$ 9x - 2y + 7

समी) .1) × 3

$\Rightarrow$ 9x - 15y = 12 ...(3)

समी) .2) × 1

$\Rightarrow$ 9x - 2y = 7 ...(4)

समीकरण) 3) में से) 4) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} 9x - 15y &=& 12 \ldots(iii) \\ 9x - 2y &=& 7 \ldots(iv) \\ (-) \quad (+) & & (-) \\ \hline -13y &=& 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x - 5\left(\frac{-5}{13}\right) = 4$$

$$\Rightarrow 3x + \left(\frac{25}{13}\right) = 4$$

$$\Rightarrow 39x + 25 = 52$$

$$\Rightarrow 39x = 52 - 25$$

$$\Rightarrow 39x = 27$$

$$\Rightarrow x = \frac{27}{39} = \frac{9}{13}$$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है

$x = \frac{9}{13}$ और $y = \frac{-5}{13}$

(iv)

$\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$

$= 3x + 4y = -6 \ldots (1)$

और $x - \frac{y}{3} = 3$

$= 3x - y = 9 \ldots (2)$

समीकरण (3) में से (4) घटाने पर

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 4y & = & -6 & \ldots(i) \\ 3x & - & y & = & 9 & \ldots(ii) \\ (-) & & (+) & & (-) & \\ \hline & & 5y & = & -15 & \end{array}$$

$\Rightarrow y = \frac{-15}{5} = -3$

अब y = -3 समीकरण (1) में रखने पर

⇒ 3x + 4y = -6

⇒ 3x + 4(-3) = -6

⇒ 3x - 12 = -6

⇒ 3x = 6

$\Rightarrow x = \frac{6}{3}$

$\Rightarrow x = 2$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का हल है x = 2 और y = -3

प्रश्न 2 निम्न समस्या में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल यदि उनका अस्तित्व हो विलोपन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) यदि हम अंश में 1 जोड़ दे तथा हर में से 1 घटा दे, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दे, तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती वह भिन्न क्या है।

(ii) पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी नूरी और सोनू की आयु में कितनी है?

(iii) दो अंको की संख्या के अंको का योग 9 है। इस संख्या का 9 गुना, संख्या के अंको को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

(iv) मीना 2000 रुपये निकालने के लिए एक बैंक गई। उसने खजाँची से 50 रुपये तथा 100 रुपये के नोट देने के लिए कहा। मीना ने कुल 25 नोट प्राप्त किए। ज्ञात कीजिए की उसने 50 रुपये और 100 रुपये के कितने -कितने नोट प्राप्त किए।

(v) किराए पर पुस्तके देने वाले किसी पुस्तकालय का प्रथम तीन दिनों का एक नियत किराया है तथा उसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का अलग किराया है। सरिता ने सात दिनों तक एक पुस्तक रखने के लिए 27 रुपये अदा किए, जबकि सुसी ने एक पुस्तक पाँच दिनों तक रखने के 21 रुपये अदा किए। नियत किराया तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i)

माना भिन्न का अंश x और हर y है।

इसलिए, भिन्न $= \frac{x}{y}$

$$\frac{x+1}{y-1} = \frac{1}{1}$$

$\Rightarrow x + 1 = y - 1$

$\Rightarrow x - y = -1 - 1$

$\Rightarrow x - y = -2 \ldots(1)$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - y = 1 \ldots(2)$

(यहाँ समीकरण) 1) और) 2) में y के गुणांक पहले ही से बराबर है इसलिए इन्हें बराबर करने की जरुरत नहीं है।(

अब समीकरण) 1) में से) 2) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} x - y &=& -2 \\ 2x - y &=& 1 \\ (-)\quad (+) & & (-) \\ \hline -x &=& -3 \end{array}$$

$\therefore x = 3$

अब x का मान 3 समीकरण) 1) में रखने पर

$\Rightarrow x - y = -2$

$\Rightarrow 3 - y = -2$

$\Rightarrow y = 3 + 2$

$\Rightarrow y = 5$

अत: अभीष्ट भिन्न = $\frac{3}{5}$

(ii) माना नूरी की आयु x वर्ष

और सोनू की आयु y वर्ष

स्थिति) I)

पाँच वर्ष पूर्व, नूरी की आयु = x - 5 वर्ष सोनू की आयु = y - 5 वर्ष

प्रश्नानुसार,

$\Rightarrow x - 5 = 5(y - 5)$

$\Rightarrow x - 5 = 5y - 25$

$\Rightarrow x - 5y = 5 - 25$

$\Rightarrow x - 5y = -20$ ...(1)

स्थिति) II)

दस वर्ष बाद, नूरी की आयु = x + 10 वर्ष सोनू की आयु = y + 10 वर्ष

प्रश्नानुसार,

x + 10 = 2(y + 10)

⇒ x + 10 = 2y + 20

⇒ x - 2y = 20 - 10

⇒ x - 2y = 10 ...(2)

चूँकि x के गुणांक स्वत :बराबर है इसलिए गुणांक बराबर नहीं करेंगे।

अब समीकरण) 1) में से) 2) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} x - 5y &=& -20 \;\ldots \text{(i)} \\ x - 2y &=& 10 \;\ldots \text{(ii)} \\ (-) \quad (+) & & (-) \\ \hline -3y &=& -30 \end{array}$$

⇒ -3y = -30

$\Rightarrow y = \frac{-30}{-3} = 10$

y = 10 समीकरण) 1) में रखने पर

⇒ x - 5y = -20

⇒ x - 5y = -20

⇒ x - 50 = -20

⇒ x = 50 - 20

⇒ x = 30

अत :नूरी की आयु 30 वर्ष है और सोनू की आयु 10 वर्ष है।

(iii) माना संख्या के इकाई का अंक x है।

और दहाई का अंक y है।

तो वास्तविक संख्या = 10y + x होगी,

और पलटी हुई संख्या = 10x + y

स्थिति) I)

x + y = 9 ...(1)

स्थिति) II)

9(संख्या = (2(पलटी संख्या(

⇒ 9(10y + x) = 2(10x + y)

⇒ 90y + 9x = 20x + 2y

⇒ 20x - 9x + 2y - 90y = 0

⇒ 11x - 88y = 0

⇒ x - 8y = 0

⇒ x = 8y ...(2)

समीकरण) 1) में x = 8y रखने पर x + y = 9

⇒ 8y + y = 9

⇒ 9y = 9

⇒ y = 1

y = 1 समीकरण दो में रखने पर

⇒ x = 8y = 8 × 1 = 8

अत :अभीष्ट संख्या = 10y + x

= 10 × 1 + 8

= 18

(iv) माना 50 रुपये के नोटों की संख्या = x है।

और 100 रुपये के नोटों की संख्या = y है।

स्थित) I)

कुल नोट की संख्या = 25

अत :x + y = 25 ...(1)

स्थित) II)

50 के x नोट + 100 के y नोट = 2000 रुपये

अत :50x + 100y = 2000

या x + 2y = 40 ...(2) (सरल करने पर(

समीकरण) 1) में से) 2) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 25 \quad \dots (i) \\ x + 2y &=& 40 \quad \dots (ii) \\ (-) \quad (-) & & (-) \\ \hline -y &=& -15 \end{array}$$

∴ y = 15

अब y = 15 समीकरण) 1) में रखने पर

x + y = 25

x + 15 = 25

x = 25 - 10

x = 10

(v) माना नियत किराया = x रुपया

और अतिरिक्त दिन का किराया = y रुपया

स्थिति) I)

x + 7y = 27 ...(1)

स्थिति) II)

x + 5y = 21 ...(2)

$$\begin{array}{r} x + 7y = 27 \ldots (i) \\ x + 5y = 21 \ldots (ii) \\ (-)\quad (-) \qquad (-) \\ \hline 2y = 6 \end{array}$$

अतः $y = \frac{6}{2} = 3$

y = 3 समीकरण) 1) में रखने पर

⇒ x + 7y = 27

⇒ x + 7(3) = 27

⇒ x + 21 = 27

⇒ x = 6

अत :नियत किराया = 6 रुपया और अतिरिक्त किराया = 3रुपए /दिन

प्रश्नावली 3.5 (पृष्ठ संख्या 69-70)

प्रश्न 1 निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मो में से किसका एक अद्वितीय हल है, किसका कोई हल नहीं हा या किसके अपरिमित रूप से अनेक हल है। अद्वितीय हल की स्थिति में, उसे ब्रज-गुणन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) x - 3y = 0

3x - 9y - 2 = 0

(ii) 2x + y = 5

$3x + 2y = 8$

(iii) $2x + y = 5$

$3x + 2y = 8$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$

$3x - 3y - 15 = 0$

उत्तर-

(i) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ से करने पर:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - 3 &= 0 \\ 3x - 9y - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ के लिए

$a_1 = 1, b_1 = -3, c_1 = -3$

$a_2 = 3, b_2 = -9, c_2 -2$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$\therefore$ इस निकाय का कोई भी हल नहीं है।

(ii) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$ से करने पर:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$$ के लिए

$$\Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

$$3x + 2y - 8 = 0$$

$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -5$

$a_2 = 3, b_2 = 2, c_2$ -8

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$\therefore$ इस निकाय का एक अद्वितीय हल सम्भव है।

$\therefore$ इस निकाय को हल करने के लिए।

$$\frac{x}{\begin{matrix} 1 & \times & -5 \\ 2 & & -8 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -5 & \times & 2 \\ -8 & & 3 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 2 & \times & 1 \\ 3 & & 2 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{[1\times(-8)]-[2\times(-5)]} = \frac{y}{[-5\times3]-[2\times(-8)]}$$

$$= \frac{1}{[2\times2]-[3\times1]}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(-8)-(-10)} = \frac{y}{(-15)-(-16)} = \frac{1}{4-3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-8+10} = \frac{y}{-15+16} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = 1$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ और } y = 1$$

(iii) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ से करने पर:}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= 20 \\ 6x - 10y &= 40 \end{aligned}\right\} \text{ के लिए}$$

$$\Rightarrow 3x - y5 - 20 = 0$$

$$6x + 10y - 40 = 0$$

$a_1 = 3, b_1 = -5, c_1 = -20$

$a_2 = 6, b_2 = -10, c_2 = -40$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-20}{-40} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ इस निकाय का एक अद्वितीय हल है।

(iv) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ से करने पर:}$$

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - 7 = 0 \\ 3x - 3y - 15 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ के लिए}$$

$a_1 = 1, b_1 = -3, c_1 = -7$

$a_2 = 3, b_2 = -3, c_2 = -15$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-3} = 6$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-15} = \frac{7}{15}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ इस निकाय का एक अद्वितीय हल है।

अब व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{matrix}-3 & -7\\ -3 & -15\end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix}-7 & 1\\ -15 & 3\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}1 & -3\\ 3 & -3\end{matrix}}$$

$$\text{i.e } \frac{x}{(-3)(-15)-(-3)(-7)} = \frac{y}{(-7)\times 3 - 1\times(-15)}$$

$$= \frac{1}{[-3\times 1 - 3\times(-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{45-21} = \frac{y}{-21+15} = \frac{1}{-3+9}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{24}{6} = 4, y = \frac{-6}{6} = -1$$

इस प्रकार, $x = 4$ और $y = -1$

प्रश्न 2 a और b के किन मानों के लिए, रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

(i) $2x + 3y = 7$

$(a - b)x + (a + b)y = 3a + b - 2$

(ii) k के किस मान के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है?

$3x + y = 1$

$(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$

उत्तर-

(i) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{matrix}2x + 3y = 7\\ (a-b)x + (a+b)y = (3a+b-2)\end{matrix}\right\} \text{ की तुलना}$$

$$\left.\begin{matrix}a_1x + b_1y + c_1 = 0\\ a_2x + b_2y + c_2 = 0\end{matrix}\right\} \text{ से करने पर, हम पाते है}$$

$a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 7$

$a_2 = (a - b), b_2 = (a + b), c_2 = (3a + b - 2)$

अपरिमित रूप से अनेक हल के लिए,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{(a-b)} = \frac{3}{(a+b)} = \frac{7}{(3a+b-2)}$$

प्रथम दो समीकरणों से हमे प्राप्त होता है

$$\frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b}$$

$\Rightarrow 2(a + b) = 3(a - b)$

$\Rightarrow 2a + 2b = 3a - 3b$

$\Rightarrow 2a - 3b + 2b + 3b = 0$

$\Rightarrow -a + 5b = 0$

$\Rightarrow a - 5b = 0 \ldots(1)$

अंतिम दो समीकरणों से, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$\Rightarrow 3(3a + b - 2) = 7(a + b)$

$\Rightarrow 9a + 3b - 6 = 7a + 7b$

$\Rightarrow 9a - 7a + 3b - 7b - 6 = 0$

$\Rightarrow 2a - 4b = 6$

$\Rightarrow a - 2b = 3$ ...(2)

अब $\begin{cases} a - 5b = 0 \\ a - 2b = 3 \end{cases}$ को वज्रगुणन विधि से हल करने के लिए

$A_1 = 1, B_1 = -5, C_1 = 0$

$A_2 = 1, B_2 = -2, C_2 = 0$

$$\frac{a}{\begin{array}{cc}-5 & 0\\ -2 & -3\end{array}} = \frac{b}{\begin{array}{cc}0 & 1\\ -3 & 1\end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc}1 & -5\\ 1 & -2\end{array}}$$

$$\frac{a}{(-5)(-3)-(-2)\times 0} = \frac{b}{0\times 1-1\times(-3)}$$

$$\frac{1}{(-2)\times 1-1\times(-5)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15-0} = \frac{b}{0+3} = \frac{1}{-2+5}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{b}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} \times 15 = 5$$

$$b = \frac{1}{3} \times 13 = 1$$

इस प्रकार $a = 5$ और $b = 1$

(ii) कोई भी हल न होने के लिए

$$\frac{3}{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \neq \frac{-1}{1(2k+1)}$$

$\frac{3}{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$ लेने पर,

3(k - 1) = 1(2k - 1)

⇒ 3k-3 = 2k - 1

⇒ 3k - 2k = -1 + 3

⇒ k = 2

अत: k = 2 होने पर दिए गए समीकरण-निकाय का कोई भी हल नहीं होगा।

प्रश्न 3 निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन एंव व्रज-गुणन विधियों से हल कीजिए। किस विधि को आप अधिक उपयुक्त मानते हैं?

8x + 5y = 9

3x + 2y = 4

उत्तर- प्रतिस्थापन विधि से दिए गए निकाय का हल ज्ञात करने क लिए

= 8x + 5y = 9 ...(1)

3x + 2y = 4 ...(2)

समीकरण (2) से $y = \frac{4-3x}{2}$

समीकरण (1) में y का मान प्रतिस्थापित करने पर हमे प्राप्त होता है

$$8x + 5\left[\frac{4-3x}{2}\right] = 9$$

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$ से करने पर, हम पाते है

$a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = 7$

$a_2 = (a - b)$, $b_2 = (a + b)$, $c_2 = (3a + b - 2)$

अपरिमित रूप से अनेक हल के लिए,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{(a-b)} = \frac{3}{(a+b)} = \frac{7}{(3a+b-2)}$$

प्रथम दो समीकरणों से हमे प्राप्त होता है

$$\frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b}$$

⇒ 2(a + b) = 3(a - b)

⇒ 2a + 2b = 3a - 3b

⇒ 2a - 3b + 2b + 3b = 0

⇒ -a + 5b = 0

⇒ a - 5b = 0 ...(1)

अंतिम दो समीकरणों से, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

⇒ 2 × 8x + 5 × 4 - 5 × 3x = 9 x 2

⇒ 16x + 20 - 15x = 18

⇒ x + 20 - 18 = 0

⇒ x + 2 = 0

⇒ x = -2

अब $x = (-2)$ को $\frac{4-3x}{2}$ में रखने पर,

$$y = \frac{4-3(-2)}{2}$$

$$\Rightarrow y\frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

इस प्रकार x = -2 और y = 5 वज्रगुणन विधि से हल करने के लिए व्यापक समीकरण निकाय से

$$\left.\begin{array}{l} 8x - 5y - 9 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{array}\right\}$$ की तुलना करने पर

$a_1 = 8, b_1 = 5, c_1 = -9$

$a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = -4$

$$\frac{x}{\begin{array}{cc} 5 & -9 \\ 2 & -4 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} -9 & 8 \\ -4 & 3 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{array}}$$

$$\frac{x}{5\times(-4)-2\times(-9)} = \frac{y}{-9\times3-8\times(-4)}$$

$$\frac{1}{8\times2-3\times5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-20+18} = \frac{y}{-27+36} = \frac{1}{16-15}$$

$$b = 1 \times -2 = -2 \text{ और } y = 1 \times 5 = 5$$

इस प्रकार $x = -2$ और $y = 5$

प्रश्न 4 निम्न समस्या में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) किसी बीजगणितीय विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) एक छात्रावास के मासिक व्यय का एक भाग नियत है तथा शेष इस पर निर्भर करता है कि छात्र ने कितने दिन भोजन लिया है। जब एक विद्धार्थी A को, जो 20 दिन भोजन करता है, 1000 रुपये छात्रावास के व्यय के लिए अदा करने पड़ते है, जबकि एक विधार्थी B को, जो 26 दिन भोजन करता है छात्रावास के व्यय के लिए 1180 रुपये अदा करने पड़ते है। नियत व्यय और प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है, जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(iii) यश ने एक टेस्ट में 40 अंक अर्जित किए, जब उसे प्रत्येक सही उत्तर पर 3 अंक मिले तथा अशुद्ध उत्तर पर 1 अंक की कटौती की गई। यदि उसे सही उत्तर पर 4 अंक मिलते तथा अशुद्ध उत्तर पर 2 अंक कटते, तो यश 40 अंक अर्जित करता। टेस्ट में कितने प्रश्न थे?

(iv) एक राजमार्ग पर दो स्थान A और B, 100 किलोमीटर की दुरी पर है। एक कार A से तथा दूसरी कार b से एक ही समय चलना प्रारम्भ करती है। यदि ए कारे भिन्न भिन्न चालों से एक ही दिशा में चलती है, तो वे 5 घंटे पश्चात् मिलती हैं। दोनों कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

(v) एक आयात का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई कम हो जाता है, यदि उसकी लंबाई 5 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है। यदि हम लंबाई को 3 इकाई और चौड़ाई को 2 इकाई बढ़ा दे, तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) माना नियत व्यय = x रुपये

और प्रतिदिन भोजन खर्च = y रुपये

विद्यार्थी A के लिए भोजन लेने की अवधि = 20 दिन

∴ 20 दिन का भोजन खर्च = 20y रुपये

∴ शर्त के अनुसार $x + 20y = 1000$

विद्यार्थी B के लिए

भोजन लेने की अवधी = 26 दिन

⇒ 26 दिन = 26 दिन के भोजन का खर्च = 26y रुपये

शर्त के अनुसार $x + 26y = 1180$ रुपये)... 2)

इस प्रकार हमें निम्नांकित समीकरण निकाय प्राप्त हुआ है

$x + 20y = 1000, x + 26y = 1180$

$\therefore a_1 = 1, b_1 = 20, c_1 = -1000$

$a_2 = 1, b_2 = 26, c_2 = -1180$

⇒ वज्र-गुणन द्वारा

$$\frac{x}{\begin{matrix}20 & -1000\\ 26 & -1180\end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix}-1000 & 1\\ -1180 & 1\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}1 & 20\\ 1 & 26\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20\times(-1180)\times1(-1180)\times1} = \frac{1}{1\times26-1\times20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-23600+26000} = \frac{y}{-1000+1180}$$

$$= \frac{1}{26-20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2400} = \frac{y}{180} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = \frac{1}{6} \times 2400 = 400$$

$$y = \frac{1}{6} \times 180 = 30$$

इस प्रकार $x = 400$ और $y = 30$

अतः नियत खर्च = 400 रुपये और प्रतिदिन खाने का खर्च = 30 रुपये

(ii) माना भिन्न का अंश = x और भिन्न का हर = y

∴ भिन्न = xy = xy

स्तिथि) -I)

$$\frac{\text{अंश - 1}}{\text{हर}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x - 1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3(x-1) = y$$

$$\Rightarrow 3x - 3 = y$$

$$\Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \ldots (1)$$

स्तिथि- (II)

$$\frac{\text{अंश}}{\text{हर} + 8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{y+8} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow 4x = y + 8$

$\Rightarrow 4x - y - 8 = 0 \ldots (2)$

(1) और (2) की तुलना व्यापक निकाय से करने पर

$a_1 = 3, b_1 = -1, c_1 = -3$

$a_2 = 4, b_2 = -1, c_2 = -8$

$$\frac{x}{\begin{matrix} -1 & \times & -3 \\ -1 & & -8 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -3 & \times & 3 \\ -8 & & 4 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 3 & \times & -1 \\ 4 & & -1 \end{matrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{(-1)\times(-8)-(-1)\times(-3)} = \frac{y}{(-3)\times4-(-8)\times3}$$

$$= \frac{1}{3\times(-1)-4\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8-3} = \frac{y}{-12+24} = \frac{1}{-3+4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{12} = \frac{1}{1}$$

$\therefore x = \frac{1}{1} \times 5 = 5$ और $y = \frac{1}{1} \times 12 = 12$

इस प्रकार, $x = 5$ और $y = 12$

$\therefore$ भिन्न $= \frac{5}{12}$

(iii) माना सही उत्तर के अंक = x

गलत उत्तर के अंक = y

स्थिति) -I)

सभी सही उत्तरों के अंक = 3 × x = 3x

सभी गलत उत्तरों के अंक = 1 × y =y

∴ शर्त के अनुसार, 3x - y = 40 ...(1)

स्थिति) -II)

सभी सही उत्तरों के अंक = 4 × x = 4x

सभी गलत उत्तरों के अंक = 2 × y = 2y

∴ शर्त के अनुसार, 4x - 2y = 50

⇒ 2x - y = 25 ...(2)

समीकरण) 1) और) 2) से

$a_1 = 3, b_1 = -1, c_1 = -40$

$a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = -25$

$$\frac{x}{\begin{matrix}-1 & & -40\\ -1 & \times & -25\end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix}-40 & & 3\\ -25 & \times & 2\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}3 & & -1\\ 2 & \times & -1\end{matrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{(-1)\times(-25)-(-1)\times(-40)}$$

$$= \frac{y}{-40\times2-(-25)\times3} = \frac{1}{3\times(-1)-2\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{25-40} = \frac{y}{-80+45} = \frac{1}{-3+2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-15} = \frac{y}{-5} = \frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{-1} \times (-15) = 15$$

$$y = \frac{1}{-1} \times (-5) = 5$$

$\therefore x = 15$ और $y = 5$

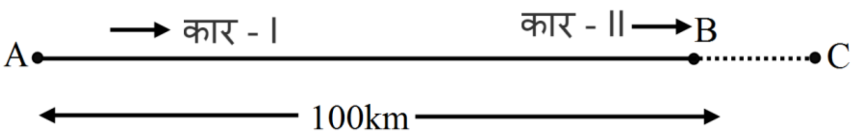
टैस्ट के कुल प्रश्न = [सही उत्तरो की संख्या]

+ [गलत उतरो की संख्या] = 15 + 5 = 20

अतः टैस्ट के कुल प्रश्न = 20

(iv) माना एक कार की गति x किमी /घण्टा और दूसरी कार की गति। किमी /घण्टा है।

स्थिति) -I)



कार -I द्वारा तय की गई दूरी = गति × समय = 5 × x किमी/घण्टा

AC = 5x

कार -II द्वारा तय की गई दूरी = BC = 5y

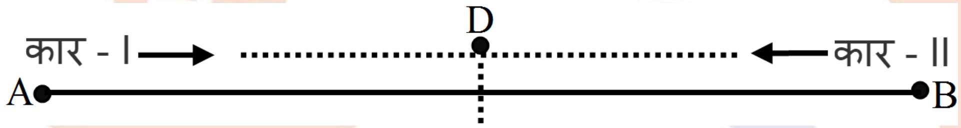
AB = AC - BC

100 = 5x - 5y

⇒ 5x - 5y - 100 = 0

⇒ x - y - 20 = 0

स्थिति) -II)



1 घण्टे में, कार-I द्वारा तय की गई दूरी = AD

AD = 1 × x = x

1 घण्टे में, कार-II द्वारा तय की गई दूरी = BD

BD = 1 × y = y

अब AB = AD + DB

⇒ 100 = x + y

⇒ x + y = 100 वज्र-गुणन द्वारा, हमें प्राप्त होता है

x - y - 20 = 0

x + y - 100 = 0

$a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = -20$

$a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = -100$

$$\frac{x}{\begin{array}{ccc} -1 & \times & -20 \\ 1 & & -100 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{ccc} -20 & \times & 1 \\ -100 & & 1 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{ccc} 1 & \times & -1 \\ 1 & & 1 \end{array}}$$

$$\therefore \frac{x}{(-1)\times(-100)-(-1)\times(-20)} = \frac{y}{(-20)\times 1-1\times(-100)}$$

$$= \frac{1}{(1\times 1)-1\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{100+20} = \frac{y}{-20+100} = \frac{1}{1+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{120} = \frac{y}{80} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \times 120 = 60$$

$$y = \frac{1}{2} \times 80 = 40$$

इस प्रकार, कार-I की गति = 60 किमी/ घण्टा, कार-II की गति किमी/ घण्टा

(v) आयत की लम्बाई = x इकाई और आयत की चौड़ाई = y इकाई

∴ आयत का क्षेत्रफल = x × y = xy

शर्त -I (लम्बाई- 5) × (चौड़ाई + 3) = क्षेत्रफल- 9

⇒ (x - 5) (y + 3) = xy -9

⇒ xy + 3x - 5y - 15

⇒ xy - 9 xy + 3x - 5y - 15 - xy + 9 = 0

⇒ 3x - 5y - 6 = 0 ...(1)

शर्त -II (लम्बाई + 3) × (चौड़ाई + 2) = क्षेत्रफल + 67

⇒ (x + 3) (+2) = y + 67

⇒ xy + 2x + 3y + 6 = xy + 67

⇒ xy + 2x + 3y + 6 - xy - 67 = 0

⇒ 2x + 3y - 61 = 0 ...(2)

अब, (1) और) 2) में वज्रगुणन विधि का प्रयोग करने पर,

$a_1 = 3, b_1 = -5, c_1 = -6$

$a_2 = 2, b_2 = 3, c_2 = 61$

$$\frac{x}{\begin{array}{ccc}-5 & \times & -6 \\ 3 & & -61\end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{ccc}-6 & \times & 3 \\ -61 & & 2\end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{ccc}3 & \times & -5 \\ 2 & & 3\end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(-5)\times(-61)-3\times(-6)} = \frac{y}{(-6)\times 2-(-61)\times 3}$$

$$\frac{1}{3\times 3-2\times(-5)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{305+18} = \frac{y}{-12+180} = \frac{1}{9+10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{323} = \frac{y}{171} = \frac{1}{19}$$

$$\therefore x = \frac{1}{19} \times 323 = 17$$

$$y = \frac{1}{19} \times 171 = 9$$

इस प्रकार, आयत की लम्बाई = 17 इकाई आयत की चौड़ाई = 9 इकाई

प्रश्नावली 3.6 (पृष्ठ संख्या 74-75)

प्रश्न 1 निम्न समीकरण के युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदल करके हल कीजिए-

(i) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$

$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iii) $\frac{4}{x} + 3y = 14$

$\frac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

(v) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$

$\frac{8x+7y}{xy} = 15$

(vi) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 6xy$

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\frac{1}{2(3x+y)} + \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

उत्तर-

(i)

माना $\frac{1}{x} = u$ और $\frac{1}{y} = v$

$\therefore \frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$

$\Rightarrow \frac{u}{2} + \frac{v}{3} = 2 \ldots (1)$

और $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6} = \frac{u}{3} + \frac{v}{2} = \frac{13}{6} \ldots (2)$

समीकरण (1) को $\frac{1}{3}$ से और (2) को $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर,

$\frac{1}{3}\left[\frac{u}{2}+\frac{v}{3}=2\right]$

$\Rightarrow \frac{u}{6}+\frac{v}{9}=\frac{2}{3} \ldots(3)$

$\frac{1}{2}\left[\frac{u}{3}+\frac{v}{2}=\frac{13}{6}\right]$

$\Rightarrow \frac{u}{6}+\frac{v}{4}=\frac{13}{12} \ldots(4)$

समीकरण (4) में से (3) को घटाने पर

$$\frac{u}{6}+\frac{v}{4}=\frac{13}{12}$$

$$\frac{u}{6}+\frac{v}{9}=\frac{2}{3}$$

$$(-) \quad (-) \quad (-)$$

$$\frac{v}{4}-\frac{v}{9}=\frac{13}{12}-\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \frac{9v-4u}{36}=\frac{13-8}{12}$

$\Rightarrow \frac{5}{36}v=\frac{5}{12}$

$\Rightarrow v=\frac{5}{12}\times\frac{36}{5}=3$

समीकरण (3) में v = 3 प्रतिस्थापित करने पर,

$\frac{u}{6}+\frac{3}{9}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{u}{6}=\frac{3}{2}-\frac{3}{9}=\frac{6-3}{9}=\frac{3}{9}$

$\Rightarrow u=\frac{3}{9}\times 6=2$

इस प्रकार v = 3 और u = 2

परन्तु $\Rightarrow \mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{x}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mathbf{x}} = 2$$

$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{2}$ और $\Rightarrow \mathbf{v} = \frac{1}{\mathbf{y}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mathbf{y}} = 3$$

$\Rightarrow \mathbf{y} = \frac{1}{3}$ इस प्रकार अभीष्ट हल है

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}, \mathbf{y} = \frac{1}{3}$$

(ii)

दिया गया है कि $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2 \ldots (1)$

$$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1 \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{\sqrt{x}} = \mathbf{u}$ और $\frac{1}{\sqrt{y}} = \mathbf{v}$

∴ समीकरण (1) और (2) को हम इस प्रकार लिख सकते है

2u + 3v = 2 ...(3)

4u - 9v = -1 ...(4)

अब समीकरण (3) और (4)

$a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = -2$

$a_2 = 4$, $b_2 = -9$, $c_2 = 1$

$$\frac{u}{\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ -9 & 1 \end{array}} = \frac{v}{\begin{array}{cc} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{array}}$$

$\Rightarrow \frac{u}{3-18} = \frac{v}{-8-2} = \frac{1}{-18-12}$

$\Rightarrow u = \frac{1}{-30} \times (-15) = \frac{1}{2}$

$v = \frac{1}{-30} \times (-10) = \frac{1}{3}$

परन्तु $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$ और $v = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$ या $y = 9$

अतः अभीष्ट हल $x = 4, y = 9$

दिए गए समीकरण युग्म है

$\frac{4}{x} + 3y = 14 \ldots (1)$

$\frac{3}{x} - 4y = 23 \ldots (2)$

माना $\frac{1}{x} = p$

$\therefore$ समीकरण (1) और (2) को हम इस प्रकार लिख सकते है

4p + 3y = 14 ...(3)

3p - 4y = 23 ...(4)

समीकरण (3) और (4) व्रजगुणन द्वारा हल करने के लिए

$a_1 = 4$, $b_1 = 3$, $c_1 = -14$

$a_2 = 3$, $b_2 = -4$, $c_2 = -23$

$$\frac{p}{\begin{array}{cc} 3 & -14 \\ -4 & -23 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} -14 & 4 \\ -23 & 3 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{[3\times(-23)]-[(-4)(-14)]}$$

$$= \frac{y}{[(-14)\times 3]-[4\times(-23)]} = \frac{1}{[4(-4)]-[3\times 3]}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{-69-56} = \frac{y}{-42+92} = \frac{1}{-16-9}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{-125} = \frac{y}{50} = \frac{1}{-25}$$

$$\therefore p = \frac{1}{-25} \times (-125) = 5$$

और $y = \frac{1}{-25} \times 50 = -2$

चूँकि $p = \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{1}{x} = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

इस प्रकार अभीष्ट हल है $x = \frac{1}{5}, y = -2$

(iii)

दिए गए समीकरण है

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = \ldots (1)$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1 \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{x-1} = u$ और $y - 2 = v$

∴ समीकरण (1) और (2) इस प्रकार व्यक्त करते है

$5u + v = 2$ ...(1)

$6u - 3v = 1$ ...(2)

समीकरण (3) और (4) को व्रजगुणन विधि से हल करने के लिए

$a_1 = 5, b_1 = 1, c_1 = -2$

$a_2 = 6, b_2 = -3, c_2 = -1$

$$\frac{u}{\begin{matrix} 1 & & -2 \\ -3 & \times & -1 \end{matrix}} = \frac{v}{\begin{matrix} -2 & & 5 \\ -1 & \times & 6 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 5 & & 1 \\ 6 & \times & -3 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{[1\times(-1)]-[(-3)\times(-2)]} = \frac{v}{[(-2)\times6]-[5\times(-1)]}$$

$$= \frac{1}{[5\times(-3)-6\times1]}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{-1-6} = \frac{v}{-12+5} = \frac{1}{-15-6}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{-7} = \frac{v}{-7} = \frac{1}{-21}$$

$$\therefore u = \frac{1}{-21} \times (-7) = \frac{1}{3}$$

$v = \frac{1}{(-21)} \times (-7) = \frac{1}{3}$

परन्तु $u = \frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3 = x - 1$

$\Rightarrow x = 4$

और $v = \frac{1}{y-2}$

$\Rightarrow \frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3 = y - 2$

$\Rightarrow y = 5$

अतः अभीष्ट हल है $x = 4, y = 5$

(iv)

दिए गए समीकरण है

$\frac{7x-2y}{xy} = 5 \ldots (1)$

$\frac{8x+7y}{xy} = 15 \ldots (2)$

समीकरण (1) से $\frac{7x}{xy} - \frac{2y}{xy} = 5$

$\Rightarrow \frac{7}{y} - \frac{2}{y} = 5 \ldots (3)$

$\frac{8x}{xy} + \frac{7y}{xy} = 15$

$\Rightarrow \frac{8}{x} + \frac{7}{x} = 15 \ldots (4)$

माना $\frac{1}{x} = p$ और $\frac{1}{y} = q$

समीकरण (3) और (4) को इस प्रकार व्यक्त करते है

7q - 2p - = 0 ...(5)

8q + 7p - 15 = 0 ...(6)

समीकरण (5) और (6) को व्रजगुणन द्वारा हल करने के लिए

$a_1 = 7, b_1 = -2, c_1 = -5$

$a_2 = 8, b_2 = 7, c_2 = -15$

$$\frac{p}{\begin{array}{cc} -2 & -5 \\ 7 & -15 \end{array}} = \frac{q}{\begin{array}{cc} -5 & 7 \\ -15 & 8 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 7 & -2 \\ 8 & 7 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{[-2\times(-15)]-[-7\times(-5)]}$$

$$= \frac{q}{[(-5)\times 8]-[(-15)\times 7]} = \frac{1}{[(7\times 7)-8\times(-2)]}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{30+35} = \frac{q}{-40+105} = \frac{1}{49+16}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{65} = \frac{q}{65} = \frac{1}{65}$$

$$\therefore p = \frac{1}{65} \times 65 = 1$$

$$q = \frac{1}{65} \times 65 = 1$$

चूँकि $p = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = 1$

$\Rightarrow x = 1$

और $q = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = 1$

$\Rightarrow y = 1$

इस प्रकार अभीष्ट हल है x = 1, y = 1

(v)

दिए गए समीकरण है

6x + 3y = 6xy ...(1)

2x + 4y = 6xy ...(2)

समीकरण (1) से

$$\frac{6x}{xy} + \frac{3y}{xy} = \frac{6xy}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 6 \ldots (3)$$

समीकरण (2) से

$$\frac{2x}{xy} + \frac{4y}{xy} = \frac{5xy}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} + \frac{4}{y} = 5 \ldots (4)$$

माना $\frac{1}{x} = p$ और $\frac{1}{y} = q$

समीकरण (3) और (4)

6q + 3p = 6 ...(5)

2q + 4p = 5 ...(6)

समीकरण (6) को 3 गुणा करके समीकरण (5) में से घटाने पर

$$\begin{array}{rcrl} 6q & + & 3p & = 6 \\ 6q & + & 12p & = 15 \\ (-) & & (-) & \quad (-) \\ \hline & & 9p & = -9 \end{array}$$

$$\Rightarrow p = \frac{-9}{-9} = 1$$

समीकरण (5) में p = 1 प्रतिस्थापित करने पर

$$6q + 3(1) = 6$$

$$\Rightarrow 6q = 6 - 3 = 3$$

$$\Rightarrow q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

चूँकि $p = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = 1$

$\Rightarrow x = 1$

और $q = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = 2$

अभीष्ट उत्तर = x =1, y = 2

(vi)

दिए गए समीकरण युग्म है

$$\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \ldots (1)$$

$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2 \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{x+y} = p$ और $\frac{1}{x-y} = q$

समीकरण (1) और (2) को हम इस प्रकार लिख सकते है

10p + 2q = 4 ...(3)

15p - 5q = -2 ...(4)

समीकरण (3) और (4) व्रजगुणन द्वारा हल करने के लिए

$a_1 = 10, b_1 = 2, c_1 = -4$

$a_2 = 15, b_2 = -5, c_2 = 2$

$$\frac{p}{\begin{matrix} 2 & & -4 \\ & \times & \\ -5 & & 2 \end{matrix}} = \frac{q}{\begin{matrix} -4 & & 10 \\ & \times & \\ 2 & & 15 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 10 & & 2 \\ & \times & \\ 15 & & -5 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{[(2\times2)]-[(-5)\times(-4)]}$$

$$= \frac{q}{[(-4)\times15]-[2\times10]} = \frac{1}{[(-5)\times10-[2\times15]]}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{4-20} = \frac{q}{-60-20} = \frac{1}{-50-30}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{-16} = \frac{q}{-80} = \frac{1}{-80}$$

$$\therefore p = \frac{1}{(-80)} \times (-16) = \frac{1}{5}$$

और $q = \frac{1}{-80} \times (-80) = 1$

परन्तु $p = \frac{1}{x+y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x + y = 5 \ldots (5)$$

और $q = \frac{1}{x-y}$

$$\Rightarrow x - y = 1 \ldots (6)$$

समीकरण (5) और (6) का योग करने पर

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ \hline 2x \quad &= 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

समीकरण (5) से 3 + y = 5

y = 5 - 3 = 2

इस प्रकार अभीष्ट हल है x = 3, y = 2

(vii)

दिए गए समीकरण युग्म है

$$\frac{1}{2(3x+y)} + \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{3}{4} \ldots (1)$$

$$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8} \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{3(x+y)} = p$ और $\frac{1}{3(x-y)} = q$

∴ समीकरण (1) और (2) को हम इस प्रकार लिख सकते है

$$p + q = \frac{3}{4} \ldots (3)$$

$$\frac{p}{2} - \frac{q}{2} = -\frac{1}{8} \ldots (4)$$

समीकरण (3) को $\frac{1}{4}$ से गुणा करके समीकरण (4) में जोड़ने पर

$$\frac{p}{2} + \frac{q}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{p}{2} - \frac{q}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right) = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

समीकरण (3) से

$$\frac{1}{4} + q = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow q = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{3x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x+y} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 3x + y = 4 \ldots (5)$$

और $q = \frac{1}{3x-y}$

$\Rightarrow \frac{1}{3x-y} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 3x - y = 2 \ldots (6)$

समीकरण (5) और (6) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3x - y = 2 \\ \hline 6x \quad\quad = 6 \end{array}$$

$\Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1$

समीकरण (5) से समीकरण (6) को घटाने पर

$$\begin{array}{rrcl} 3x & + y & = & 4 \\ 3x & - y & = & 2 \\ (-) & (+) & & (-) \\ \hline & 2y & = & 2 \end{array}$$

इस प्रकार अभीष्ठ हल है x = 1, y = 1

प्रश्न 2 निम्न समस्याओं को रैखिक समीकरण युग्म के रूप में व्यक्त कीजिए और फिर उनके हल ज्ञात कीजिए-

(i) रितु धारा के अनुकूल 2 घंटे में 20 किलोमीटर तैर सकती है और धारा के प्रतिकूल 2 घंटे में 4 किलोमीटर तैर सकती है। उसकी स्थिर जल में तैरने की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए-

(ii) 2 महिलाएँ एंव 5 पुरुष एक कसीदे के काम को साथ-साथ 4 दिन में पूरा कर सकते है। जबकि 3 महिलाएँ एंव 6 पुरुष इसको 3 दिन में पूरा कर सकते है ज्ञात कीजिए कि इसी कार्य को करने में एक महिला कितना समय लेगी। पुनः इसी कार्य को करने में एक पुरुष कितना समय लेगा।

(iii) रूही 300 किलोमीटर दुरी पर स्थित अपने घर जाने के लिए कुछ दुरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दुरी बस द्वारा तय करती है। यदि वह 60 किलोमीटर रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा यात्रा करती है तो उसे 4 घंटे लगते हैं। यदि वह 100 किलोमीटर रेलगाड़ी से तथा शेष बस से यात्रा करे, तो उसे 10 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाड़ी एंव बस की क्रमशः चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) माना रितु की स्थिर जल में तैरने की गति = x किमी/घण्टा

और धारा की चाल = y किमी/घण्टा

धारा की दिशा में चाल) = x + y) किमी/घण्टा

धारा के प्रतिकूल चाल) = x - y) किमी/घण्टा

$$\text{समय} = \frac{\text{दुरी}}{\text{चाल}}$$

$$\therefore \frac{20}{x+y}$$

$$\Rightarrow x + y = 10 \ldots (1) \text{ और } 2 = \frac{4}{x-y}$$

$$\Rightarrow x - y = \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow x - y = 2 \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर,

$$\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x - y = 12 \\ \hline 2x \quad = 12 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$$

समीकरण (1) से, 6 + y - 10

y = 10 - 6 = 4

अत: स्थिर जल में रितु के तैरने की चाल = 6 किमी/घण्टा और जल-धारा की चाल = 4 किमी/घण्टा

(ii) माना कार्य को पूरा करने के लिए, अकेली महिला द्वारा लिया गया समय = x दिन और अकेले पुरुष द्वारा लिया गया समय = y दिन

1 महिला का 1 दिन का कार्य = 1

1 पुरुष का 1 दिन का कार्य = 1

चूंकि] 2 महिलाओं + 5 पुरुषों [द्वारा कार्य को 4 दिन में पूरा किया जाता है

$$\therefore 4 \times \left[\frac{2}{\times} + \frac{5}{y}\right] = 1 \ldots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \ldots (1)$$

पुनः [3 महिलाओं + 6 पुरुषों] द्वारा कार्य 3 दिन में पूरा किया जाता है

$$\therefore 3 \times \left[\frac{3}{\times} + \frac{6}{y}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{3} \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{x} = p$ और $\frac{1}{y} = q$

समीकरण (1) और (2) को इस प्रकार व्यक्त करते है

$$2p + 5q = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 8p + 20q - 1 = 0$$

$$3p + 6q = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 8p + 20q - 1 = 0$$

अब व्रजगुणन विधि का प्रयोग करने क लिए

$a_1 = 8, b_1 = 20, c_1 = -1$

$a_2 = 9, b_2 = 18, c_2 = -1$

$$\frac{p}{\begin{array}{cc} 20 & -1 \\ 18 & -1 \end{array}} = \frac{q}{\begin{array}{cc} -1 & 8 \\ -1 & 9 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 8 & 20 \\ 9 & 18 \end{array}}$$

$= \frac{p}{-2} = \frac{q}{-1} = \frac{1}{-36}$

$\therefore p = \frac{1}{-36} \times (-2) = \frac{1}{18}$

$q = \frac{1}{-36} \times (-1) = \frac{1}{36}$

चूँकि $p = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18}$

$\Rightarrow x = 18$

और $q = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow y = 36$

इस प्रकार कार्य को पूरा करने के लिए अकेली महिला द्वारा लिया गया समय = 18 दिन

अकेले पुरुष द्वारा लिया गया समय = 36 दिन

(iii) माना, रेलगाड़ी की चाल = x किमी/घण्टा

बस की चाल = y किमी/घण्टा

$$\text{चाल} = \frac{\text{दुरी}}{\text{समय}}$$

स्थिति)-I)

कुल यात्रा की दूरी = 300 किमी

∵ रेलगाड़ी से तय की गई दूरी = 60 किमी

बस से तय की गई दूरी) = 300 - 60) किमी = .240 किमी.

चूंकि कुल समय = 4 घंटे

$$\therefore \frac{60}{x} + \frac{240}{y} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{15}$$ [15 से भाग करके]

स्थिति-(II)

रेलगाड़ी से तय की गई दूरी = 100 किमी

∴ बस द्वारा तय की गई दूरी = (300 - 100) किमी.

= 200 किमी.

$$\frac{4}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{x} + \frac{16}{y} = \frac{4}{15}$$

(-)　(+)　　(-)

$$\frac{-8}{y} = \frac{1}{6} - \frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{y} = \frac{1}{6} - \frac{4}{15} = \frac{5-8}{30} = \frac{-3}{30}$$

समीकरण (1) से

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{80} = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{15} = \frac{4}{80} = \frac{1}{15} - \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4-3}{60} = \frac{1}{60}$$

$$\therefore x = 60$$

इस प्रकार, रेलगाड़ी की चाल = 60 किमी/घण्टा और बीस की चाल = 80 किमी/घण्टा

प्रश्नावली 3.7 (पृष्ठ संख्या 75-76)

प्रश्न 1 दो मित्रों अनी और बीजू की आयु में 3 वर्ष का अन्तर है। अणि के पिता धरम की आयु अणि की आयु की दुगुनी और बीजू की आयु अपनी बहन कैथी की आयु की दुगुनी है। कैथी और धरम की आयु का अन्तर 30 वर्ष है। अणि और बीजू की आयु ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना,

अनी की आयु = x वर्ष और

बीजू की आयु = y वर्ष

स्थिति) -I) y > x

प्रथम शर्त के अनुसार,

y - x = 3 ...(1)

∵ [अनी के पिता की आयु- [2 [अनी की आयु]

= 2x वर्ष तथा] बीजू की बहन की आयु]

$= \frac{1}{2}$ [बीजू की आयु] $= \frac{1}{2}y$, दूसरी शर्त के अनुसार,

2x-sy = 30 = 4x - y = 60 ...(2)

(1) और (2) को योग करने पर,

$$\begin{aligned} 4x - y &= 60 \\ -x + y &= 30 \\ \hline 3x \quad &= 63 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{63}{3} = 21$$

समीकरण) 1) से

⇒ y - 21 = 3

⇒ y = 3 + 21 = 24

इस प्रकार,

अनी की आयु = 21 वर्ष बीजू की आयु = 24 वर्ष

प्रश्न 2 एक मित्र दूसरे से कहता है कि 'यदि मुझे एक सौ दे दो, तो मैं आपसे दो गुना धनी बन जाऊँगा।' दूसरा उत्तर देता है 'यदि आप मुझे दस दे दें, तो मैं आपसे छः गुना धनी बन जाऊँगा।' बताइए की उनकी क्रमशः कल्या संपत्तिया हैं?

उत्तर- माना 1^{st} मित्र की सम्पत्ति = x रुपये

और 2^{nd} मित्र की सम्पत्ति = y रुपये

शर्त के अनुसार, x + 100 = 27-100)

= x + 100 - 2y + 200 = 0

= x - 2y + 300 = 0

6(x - 10) = y + 10 ...(1)

= 6x - 60 - y - 10 = 0

6x -y - 70 = 0 ...(2)

समीकरण) 1) से, x = -300 + 2y

समीकरण) 2) से 6x - y -70 = 0

6[-300 + 2y] - y - 70 = 0

= -1800 + 12y - y - 70 = 0

-1870 + 11y = 0

$\Rightarrow y = \frac{1870}{11} = 170$

अब, x = -300 + 2y

= -300 + 2(170)

= -300 + 340 = 40

इस प्रकार,

1^{st} मित्र की संपत्ति = 40 रुपये और 2^{nd} मित्र की संपत्ति = 170 रुपये

प्रश्न 3 एक रेलगाड़ी कुछ दूरी समान चाल से तय करती है। यदि रेलगाड़ी 10 किलोमीटर/घण्टा अधिक तेज चलती होती, तो उसे नियत समय से 2 घंटे कम लगते और यदि रेलगाड़ी 10 किलोमीटर/घण्टा धीमी चलती होती, तो उसे नियत समय से 3 घंटे अधिक लगते। रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दुरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- **स्थिति) -I)**

$(x + 10) \times (y - 2) = xy$

$xy - 2x + 10y - 20 = xy$

$2x - 10y + 20 = 0$ ...(1)

स्थिति) -II)

$(x - 10) \times (y + 3) = xy$

$= xy + 3x - 10y - 30 = xy$

$3x - 10y - 30 = 0$ ...(2)

वज्र-गुणन विधि से समीकरण) 1) और) 2) को हल करने के लिए

$a_1 = 2, b_1 = -10, c_1 = 20$

$a_2 = 3, b_2 = -10, c_2 = 30$

$$\frac{x}{\begin{array}{cc} -10 & 20 \\ -10 & -30 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} 20 & 2 \\ -30 & 3 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 2 & -10 \\ 3 & -10 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{300+200} = \frac{y}{+60+60} = \frac{1}{-20+30}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{500} = \frac{y}{120} = \frac{1}{-20+30}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{(10)} \times 500 = 50$$

$$y = \frac{1}{(10)} \times (120) = 12$$

इस प्रकार, रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी

= 50 × 12 = 600 किमी.

प्रश्न 4 एक कक्षा के विधार्थियों को पंक्तियों में खड़ा होना है। यदि पंक्ति में 3 विधार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती। यदि पंक्ति में 3 विधार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियाँ अधिक बनतीं। कक्षा में विधार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना,

विद्यार्थियों की संख्या = x और पंक्तियों की संख्या = y

∴ प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या

$$\therefore \text{ प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या} = \frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या}}{\text{पंक्तियों की संख्या}} = \frac{x}{y}$$

स्थिति- (I)

$$\left(\frac{x}{y} + 3\right) \times (y - 1) = x$$

[एक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या x पंक्तियों की संख्या

= विद्यार्थियों की संख्या]

$$\Rightarrow x - \frac{x}{y} + 3y - 3 = x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} - 3y + 3 = 0 \ldots (1)$$

स्थिति- (II)

$$\left(\frac{x}{y}-3\right)\times(y+2)=x$$

$$\Rightarrow x+\frac{2x}{y}-3y-6=x$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{y}-3y-6=0\ldots(2)$$

माना $\frac{x}{y}=p$

∴ समीकरण) 1) और) 2) को इस प्रकार व्यक्त करते है

p - 3y + 3 = 0 ...(3)

2p - 3y - 6 = 0 ...(4)

समीकरण) 4) में से) 3) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 2p - 3y - 6 = 0 \\ p - 3y + 3 = 0 \\ (-)\quad (+)\quad (-) \\ \hline p \qquad\quad - 9 = 0 \\ p = 9 \end{array}$$

समीकरण (3) से हमे प्राप्त होता है

$$9 - 3y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -3y = -12$$

$$\Rightarrow y = \frac{-12}{-3} = 4$$

चूँकि $\frac{x}{y} = 9$

$$\therefore \frac{x}{4} = 9$$

$$\Rightarrow x = 4 \times 9 = 36 \; [\because p = 9]$$

इस प्रकार, कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या

$= x \times y = 36 \times 4 = 144$

प्रश्न 5 एक △ABC में ∠C = 3, ∠B = 2, (∠A + ∠B) है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

समीकरण (2) से

$$\angle A + 4(40) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 180^\circ - (4 \times 40)$$

$$\Rightarrow \angle A = 180^\circ - 160 = 20^\circ$$

पुनः $\angle C = 3, \angle B = 3 \times 40^\circ = 120^\circ$

इस प्रकार $\angle A = 20^\circ, \angle B = 40^\circ$

और $\angle C = 120^\circ$

प्रश्न 6 समीकरणों 5x - y = 5 और 3x - y = 3 के ग्राफ खींचिए। इन रेखाओं और y-अक्ष से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। इस प्रकार बने त्रिभुज के क्षेत्रफल का परिकलन कीजिए।

उत्तर- समीकरण 5x – y = 5 का ग्राफ खींचने के लिए x और y के मूल्यों की तालिका

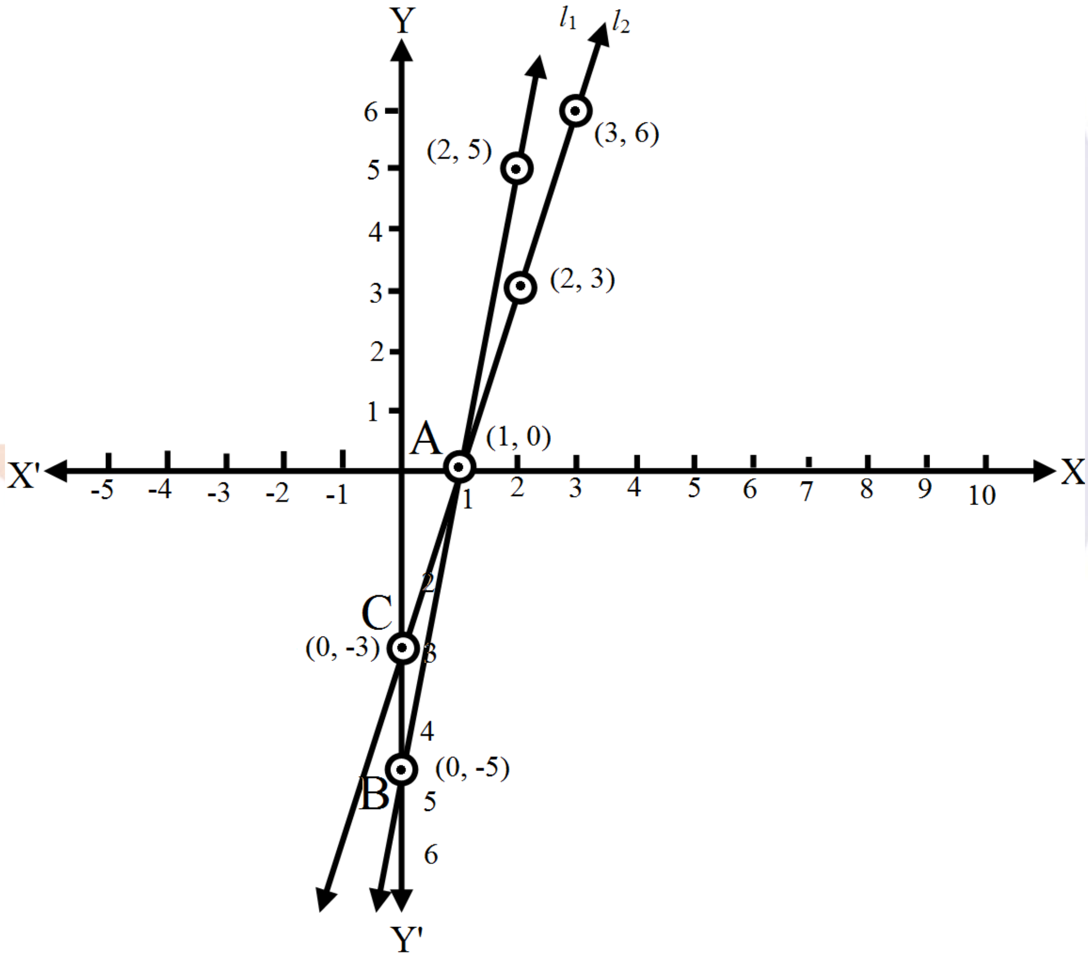
x	1	2	0
y	0	5	-5

(x, y)	(1, 0)	(2,5)	(0, 5)

समीकरण 3x - y = 3 का ग्राफ खींचने के लिए x और y के मूल्यों की तालिका

x	2	3	0
y	3	6	-3
(x, y)	(2, 3)	(3,6)	(0, -3)

बिन्दुओं (2, 5), (1, 0) और (0, -5) को आलेखित करके मिलाने पर 5x - y = 5 की ग्राफ रेखा, l_1 प्राप्त होती है।



बिन्दुओं) 2, 3), (3, 6) और) 0, -3) को आलेखित करके मिलाने पर 3x - y = 3 की ग्राफ रेखा, l_2 प्राप्त होती है।

आकृति से स्पष्ट है की इस प्रकार बनी त्रिभुज के शीर्ष) 1, 0), (0, -5) और) 0, -3) है।

प्रश्न 7 निम्न रैखिक समीकरण के युग्म को हल कीजिए-

(i) px + qy = p - q

$qx - pq = p + q$

(ii) $ax + by = c$

$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

$ax + by = a^2 + b^2$

(iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$

$-378x + 152y = -604$

उत्तर-

(i) दिए गए रैखीक समीकरण है

$px + qy = p - q$ ...(1)

$qx + py = p + q$ ...(2)

समीकरण) 1) को p से और) 2) को q से गुणा कर जोड़ने पर

$$p^2x + pqy = p^2 - pq$$
$$p^2x - pqy = p^2 - pq$$

$$p^2x + p^2x = p^2 + p^2$$

$$\Rightarrow (p^2 + q^2)x = p^2 + q^2{}'$$

$$\Rightarrow x = \frac{p^2+q^2}{p^2+q^2} = 1$$

समीकरण (1) से

$p(1) + qy = p - q$

$\Rightarrow p + gy = p - q$

$\Rightarrow qy = p - q - p = q$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{q} = 1$$

इस प्रकार अभीष्ट हल $x = 1, y = 1$

(ii) दिए गए रैखीक समीकरण है

$ax + by = c$ ...(1)

$bx + ay = 1 + c$ ...(2)

व्रजगुणन की सहयता से हम पाते है

$A_1 = a, B_1 = b, C_1 = -c$

$A_2 = b, B_2 = a, C_2 = -(1 + c)$

$$\therefore \frac{x}{\begin{matrix} b & -c \\ a & -(1+c) \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -c & a \\ -(1+c) & b \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}}$$

$$= \frac{x}{-b-bc+ac} = \frac{y}{-bc+a+ac} = \frac{1}{a^2-b^2}$$

$$\therefore x = \frac{-b-bc+ac}{a^2-b^2}$$

$$y = \frac{-bc+a+ac}{a^2-b^2}$$

$$x = \frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2} = \frac{c}{a+b} - \frac{b}{a^2-b^2}$$

$$y = \frac{c(a-b)+a}{a^2-b^2} = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{a^2-b^2}$$

(iii) दिए गए रेखीक समीकरण है

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \ldots (1)$$

$$ax + by = a^2 + b^2 \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{x}{a} \times b\right)$$

समीकरण (2) में $y = \left(\frac{b}{a}x\right)$ प्रतीस्थापित करने पर

$$ax + b\left(\frac{b}{a}x\right) = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow x + \left[\frac{a^2+b^2}{a}\right] = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \times a = a$$

$$\Rightarrow x = a$$

$y = \frac{b}{a}x$ में $x = a$ प्रतीस्थापित करने पर

$$y = \frac{b}{a} \times a = b$$

$$\Rightarrow y = b$$

इस प्रकार अभीष्ठ हल $x = a, y = b$

(iv) दिए गए रैखीक समीकरण है

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$ ...(1)

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$ ...(2)

समीकरण) 2) से

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 + b^2$ ...(3)

समीकरण) 2) में से) 3) घटाने पर

$$\begin{array}{l} (a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2 \\ (a + b)x + (a + b)y = a^2 + b^2 \\ (-) \qquad\quad (-) \qquad\qquad\quad (-) \quad (-) \\ \hline x[(a - b) - (a + b)] = a^2 - 2ab - b^2 - a^2 - b^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x[a - b - a - b] = -2ab - 2b^2$$

$$\Rightarrow x(-2b) = -2b(a + b)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2b(a+b)}{-2b}$$

$$\Rightarrow x = (a + b)$$

समीकरण (1) में x = (a + b) प्रतीस्थापित करने पर

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$\Rightarrow (a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab$

$\Rightarrow (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2 - a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a + b)y = -2ab$

$$\Rightarrow y = -\frac{2ab}{a+b}$$

इस प्रकार अभीष्ठ हल $x = a + b, y = -\frac{2ab}{a+b}$

(v) दिए गए रैखीक समीकरण है

152x - 378y = -74 ...(1)

-378x + 152y = -604 ...(2)

समीकरण) 1) और) 2) को जोड़ने पर

-226x - 226y = -604

⇒ x + y = 3 ...(3)

[पुरे समीकरण को-) 226) से भाग करने पर]

समीकरण) 2) में से) 1) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} -378x + 152y &=& -604 \\ 152x - 378y &=& -74 \\ (-) \quad\quad (+) && (+) \\ \hline -530x + 530y &=& -530 \end{array}$$

$$\Rightarrow -x + y = -1$$

$$\Rightarrow x - y = 1 \ldots (4)$$

समीकरण (3) और (4) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 3 \\ x - y &=& 1 \\ \hline 2x &=& 4 \end{array}$$

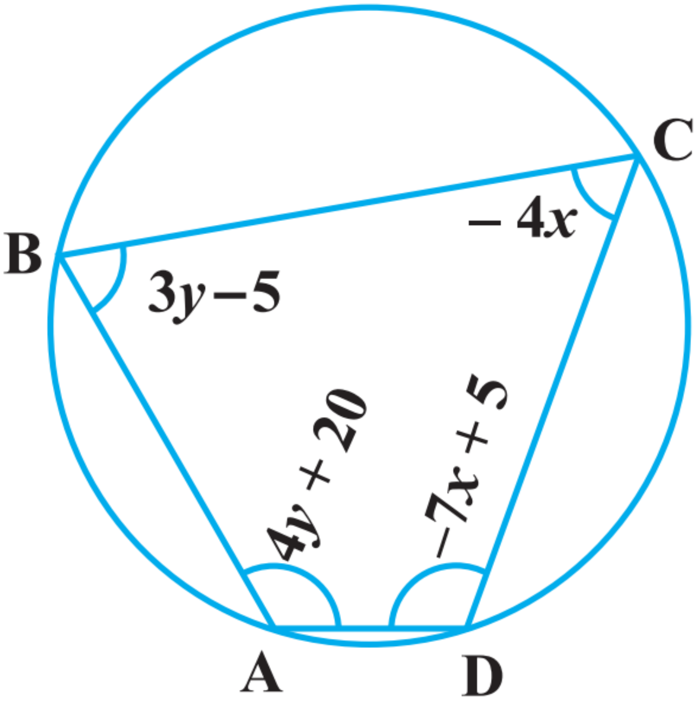
$$\Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

समीकरण (3) में से (4) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} x - y &=& 1 \\ x + y &=& 3 \\ (-) \quad (-) && (-) \\ \hline -2y &=& -2 \end{array}$$

इस प्रकार x = 2, y = 1

प्रश्न 8 ABCD एक चतुर्भुज है इस चक्रीय चतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए-



उत्तर- हम जानते हैं कि एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं

∠A + ∠C = 180° और ∠B + ∠D = 180°

⇒ [4y + 20] + [-4x] = 180°

⇒ 4y - 4x + 20° - 180° = 0

⇒ 4y - 4x - 160° = 0

⇒ y - x - 40° = 0 ...(1)

[पूरे समीकरण को 4 से भाग देने पर[

और] 3y - 5] + [-7x + 5] = 180°

= 3y - 5 + 5 - 7x - 180° = 0

= 3y - 7x - 180° = 0 ...(2)

समीकरण) 1) को 7 से गुणा कर समीकरण) 2) में से घटाने पर,

$$3y - 7x - 180 = 0$$

$$\begin{array}{r} 7y - 7x - 280 = 0 \\ (-) \quad (+) \quad (+) \\ \hline -4y + 100^\circ = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-100^\circ}{-4} = 25^\circ$$

समीकरण (1) में y = 25° प्रतिस्थापित करने पर,

$$y - x = 40$$

$$\Rightarrow -x = 40 - y$$

$$= 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$$= x = -15^\circ$$

$$\angle A = 4y + 20^\circ$$

$= 4(25^\circ) + 20^\circ$

$= 100^\circ + 20^\circ = 120^\circ$

$\angle B = 3y - 5^\circ$

$-3(25^\circ) - 5^\circ$

$= 75^\circ - 5^\circ = 70^\circ$

$\angle C = -4x = -4(-15^\circ) = 60^\circ$

$\angle D = -7(-15) + 5^\circ$

$= 105^\circ + 5^\circ = 110^\circ$

इस प्रकार $\angle A = 120^\circ, \angle B = 70^\circ$

$\angle C = 60^\circ, \angle D = 110^\circ$

द्विघात समीकरण क्या है?

एक द्विघात समीकरण में, एक चर, वर्ग में होता है। इस प्रकार के समीकरण को "घात 2 का समीकरण" भी कहा जाता है। बीजीय व्यंजक $ax^2 + bx + c = 0$, (जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c वास्तविक संख्याएं हों) के रूप में होने वाले समीकरण द्विघात समीकरण कहा जाता है।

द्विघात समीकरण के मूल

किसी भी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, के अधिकतम 2 मूल हो सकते हैं।

उदाहरण के लिए समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ को लेते हैं और इसके मूल ज्ञात करते हैं। समीकरण के गुणनखंड प्राप्त करने के लिए मध्य पद विभाजन के सिद्धांत को अपनाते हैं।

समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ को इस प्रकार से लिख सकते हैं:

$2x^2 - 2x - x + 1 = 0$

$2x(x - 1) - 1(x - 1) = 0$

या $(x - 1)(2x - 1) = 0$

अतः $x = 1, \frac{1}{2}$

इस प्रकार हम कह सकते है कि $x = 1, \frac{1}{2}$ समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूल हैं।

द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियाँ

द्विघात समीकरणों को हल करने के लिए निम्नलिखित दो विधियों का प्रयोग करते हैं:

गुणनखंड विधि

इस विधि में मध्य पद को इस प्रकार से विभाजित करते हैं कि विभाजित भागों का योग मध्य पद के बराबर हो और दोनों पदों का गुणनफल पहली और तीसरे पद के गुणनफल के बराबर हो।

पूर्ण वर्ग विधि

जब हम एक द्विघात समीकरण जो कि $ax^2 + bx + c$ के रूप में होता है उसे हम जब $a(x + h)^2 + k$ के रूप में बदल देते हैं तब इस विधि को पूर्ण वर्ग बनाना कहते हैं।

अभ्यास के लिए प्रश्न

जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं और अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है। हम जानना चाहेंगे कि आरंभ में उनके पास कितने-कितने कंचे थे।

उपरोक्त प्रश्न का उत्तर

माना आरम्भ में जॉन के पास x कंचे हैं और जीवंती के पास y कंचे हैं।

प्रश्नानुसार दोनों के पास के कंचों का कुल योग 45 है अर्थात्

$x + y = 45$ (1)

प्रश्न कि दूसरी शर्त के अनुसार दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं तो दोनों के बचे हुए कंचो का गुणनफल 124 है अर्थात्

$(x - 5) \times (y - 5) = 124$ या $xy - 5(x + y) + 25 = 124$, समीकरण 1 से $x + y$ का मान रखने पर

या $xy = 324$ (2)

समीकरण 1 से $y = 45 - x$ समीकरण 2 में रखने पर

$x(45 - x) = 324$

या $x^2 - 45x + 324 = 0$ इस समीकरण को इस प्रका लिख सकते हैं

$x^2 - 36x - 9x + 324 = 0$

$x(x - 36) - 9(x - 36) = 0$

इस प्रकार $(x - 36)$ और $(x - 9)$ दो गुणनखंड प्राप्त होते हैं

इसके अनुसार $x = 36, 9$

x का मान समीकरण 1 में रखकर $y = 9, 36$ मिलता है

इस प्रकार मान सकते है कि अगर x का मान 36 है तो y का मान 9 होगा और अगर x का मान 9 है तो y का मान 36 होगा।

गुणनखंडों द्वारा द्विघात समीकरण का हल

द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ पर विचार कीजिए। यदि हम इस समीकरण के बाएँ पक्ष में x

को 1 से प्रतिस्थापित करें, तो हमें प्राप्त होता है: $(2 \times 12) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = समीकरण का दाँया पक्ष। हम कहते हैं कि 1 द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ का एक मूल है। इसका यह भी अर्थ है कि 1 द्विघात बहुपद $2x^2 - 3x + 1$ का एक शून्यक है।

गुणनखंड और द्विघात समीकरण का व्यापक रूप

व्यापक रूप में, एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ का एक मूल कहलाता है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो। हम यह भी कहते हैं कि $x = \alpha$ द्विघात समीकरण का एक हल है अथवा α द्विघात समीकरण को संतुष्ट करता है। ध्यान दीजिए कि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक ही हैं।

नोट: अतः, किसी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो मूल हो सकते हैं।

मध्य पद को विभक्त करके एक द्विघात बहुपद के गुणनखंड प्राप्त करना

मध्य पद को विभक्त करके एक द्विघात बहुपद के गुणनखंड किए जा सकते हैं। हम इस ज्ञान का प्रयोग द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने में करेंगे। एक उदाहरण के माध्यम से इसे समझाने का प्रयास करते हैं:

गुणनखंडन के लिए उदाहरण

गुणनखंडन द्वारा समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त प्रश्न का हल

सर्वप्रथम हम मध्यपद $-5x$ को $-2x -3x$ [क्योंकि $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2\times2) \times 3$] के रूप में विभक्त करते हैं।

अतः $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

इसलिए, $2x^2 - 5x + 3$ को $(2x - 3)(x - 1)$ के रूप में पुनः लिखा जा सकता है।

अतः x के वे मान जिनके लिए $2x^2 - 5x + 3 = 0$ वही हैं जो $(2x - 3)(x - 1)$ से प्राप्त होंगे।

अब $2x - 3 = 0$ या $x = 3/2$ और $x - 1 = 0$ या $x = 1$ देता है।

अतः $x = 3/2$ और $x = 1$ दिए हुए समीकरण के हल हैं।

दुसरे शब्दों में 3/2 और 1 समीकरण $2x^2 - 5x + 3$ के मूल हैं।

उपरोक्त प्रश्न की समीक्षा

ध्यान दीजिए कि हमने समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूलों को $2x^2 - 5x + 3$ के दो रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित करके और प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर रखकर प्राप्त किए हैं।

द्विघात समीकरण का पूर्ण वर्ग बनाकर हल

इस विधि को समझने के लिए हम एक उदाहरण का सहारा लेते हैं:

सुनीता की दो वर्ष पूर्व आयु (वर्षों में) तथा अब से चार वर्ष उपरांत की आयु का गुणनफल उसकी वर्तमान आयु के दो गुने से एक अधिक है। उसकी वर्तमान आयु क्या है?

पूर्ण वर्ग बनाकर हल करने की विधि

इसका उत्तर देने के लिए, माना उसकी वर्तमान आयु (वर्षों में) x है। तब, उसकी 2 वर्ष पूर्व आयु एवं अब से चार वर्ष उपरांत की आयु का गुणनफल $(x - 2)(x + 4)$ है।

इसलिए, $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

अर्थात् $x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

अर्थात् $x^2 - 9 = 0$

अतः सुनीता की वर्तमान आयु द्विघात समीकरण $x^2 - 9 = 0$ को संतुष्ट करती है।

हम इसे $x^2 = 9$ के रूप में लिख सकते हैं। वर्गमूल लेने पर, हम $x = 3$ या $x = -3$ पाते हैं।

क्योंकि आयु एक धनात्मक संख्या होती है, इसलिए $x = 3$ ही होगा।

अतः सुनीता की वर्तमान आयु 3 वर्ष है।

द्विघात समीकरण का पूर्णवर्ग बनाना

समीकरण $x^2 + 4x - 5 = 0$ को पूर्णवर्ग बनाने के लिए इसको लिख सकते हैं $(x + 2)^2 - 9$ या $(x + 2)^2 = 9$ लिख सकते हैं।

वास्तव में, हम किसी भी द्विघात समीकरण को $(x + a)^2 - b^2 = 0$ की तरह बना सकते हैं और फिर हम इसके मूल आसानी से प्राप्त कर सकते हैं।

प्रक्रिया निम्न प्रकार से है:

$x^2 + 4x = \{x2 + (4/2)\ x\} + (4/2)x$

$= x^2 + 2x + 2x$

$= (x + 2)\ x + 2 \times x$

$= (x + 2)\ x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$

$= (x + 2)\ x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$

$= (x + 2)\ (x + 2) - 2^2$

$= (x + 2)^2 - 4$

अतः $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

इस प्रकार, $x^2 + 4x - 5 = 0$ को पूर्ण वर्ग बनाकर $(x + 2)^2 - 9 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसे पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से जाना जाता है।

पूर्णवर्ग बनाने की दूसरी विधि

इसको दर्शाने की एक दूसरी विधि निम्न है:

समीकरण $3x^2 - 5x + 2 = 0$

इसको लिख सकते हैं $x^2 - (5/3)x + 2/3 = 0$

अब, $\{x - (½)(5/3)\}^2 - \{(½)(5/3)\}^2 + 2/3$

$= (x - 5/6)^2 + 2/3 - 25/36$

$= (x - 5/6)^2 - 1/36$

$= (x - 5/6)^2 - (1/6)^2$

अर्थात् $(x - 5/6) = +1/6$ या $- 1/6$

इसप्रकार $x = 1, 2/3$

दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग $468\ m^2$ है। यदि उनके परिमापों का अंतर $24\ m$ हो, तो दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

इस प्रश्न को पूर्णवर्ग विधि द्वारा हल करते हैं

माना पहले वर्ग की एक भुजा का माप x m है तथा दूसरे वर्ग की एक भुजा का माप y m है।

इसप्रकार पहले वर्ग का क्षेत्रफल x^2 m^2 है तथा दूसरे का y^2 m^2 है

दोनों के क्षेत्रफल का योग = $x^2 + y^2 = 468$ m^2 है या $x^2 + y^2 = 468$ (1)

तथा दोनों का परिमापों का अंतर $4x - 4y = 24$ है या $x - y = 6$ (2)

समीकरण 2 से $x = 6 + y$ को समीकरण 1 में रखने पर

$(6 + y)^2 + y^2 = 468$

या $36 + 2y^2 + 12y = 468$

या $y^2 + 6y - 216 = 0$

इसको लिख सकते हैं $(y + 3)^2 = 225$

इसलिए, $y + 3 = +15$ या -15

अतः $y = 12, -18$

वर्ग की भुजा का परिमाप ऋणात्मक नहीं हो सकता है अतः $y = 12$ है।

y का मान समीकरण 2 में रखने पर $x = 18$ है।

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति

पिछले अनुच्छेद में, आपने देखा है कि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

X = (-b±√(b^2-4ac))/2a द्वारा निर्धारित होते हैं।

यदि, $b^2 - 4ac > 0$ है तो दो भिन्न और वास्तविक मूल होंगे। X = (-b+√(b^2-4ac))/2a , X = (-b-√(b^2-4ac))/2a

यदि, $b^2 - 4ac = 0$ है तो दो बराबर और वास्तविक मूल होंगे।

यदि, $b^2 - 4ac < 0$ है तो ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है, जिसका वर्ग $b^2 - 4ac$ हो। अतः दिए हुए द्विघात समीकरण के इस स्थिति में कोई वास्तविक मूल नहीं हैं। क्योंकि $b^2 - 4ac$ यह निश्चित करता है कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वास्तविक हैं अथवा नहीं, $b^2 - 4ac$ को इस

द्विघात समीकरण का विविक्तकर कहते हैं।

अतः, द्विघात समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0$ के

(i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो

(ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो

(iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होता, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो

मूलों की प्रकृति पर आधारित उदाहरण

द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल

दिया गया समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है, जहाँ $a = 2, b = -4$ और $c = 3$ है।

इसलिए, विविक्तकार $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(3) = 16 - 24 = -8 < 0$ है। अतः दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक नहीं हैं।

क्या निम्न स्थिति संभव है? यदि है तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए। दो मित्रें की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।

हल:

उपरोक्त प्रश्न की संभावना को ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हम मान लेते हैं कि यदि एक की वर्तमान आयु x वर्ष है तो उस स्थिति में दूसरे की आयु $(20 - x)$ वर्ष होगी।

चार वर्ष पूर्व दोनों की आयु का गुणनफल $(x - 4) \times (20 - x - 4) = 48$

या $(x - 4) \times (16 - x) = 48$

या $16x - 64 + 4x - x^2 = 48$

सरल करने पर $20x - x^2 - 112 = 0$

इसको लिख सकते हैं $x^2 - 20x + 112 = 0$

यह एक द्विघात समीकरण है इसका विविक्तकर ज्ञात करते हैं।

$b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(1)(112) = 400 - 448 = -48 < 0$ है। अतः दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक नहीं हैं। इसलिए प्रश्न में व्यक्त कि गई स्थिति संभव नहीं है।

स्मरणीय तथ्य

1. द्विघाती सूत्रः द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल X = (-b±√(b^2-4ac))/2a के द्वारा निर्धारित होते हैं।

यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो।

2. एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ में,

दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो।

दो बराबर मूल (अर्थात् संपाती वास्तविक मूल) होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो और

कोई वास्तविक मूल नहीं होते हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो।

NCERT SOLUTIONS
प्रश्नावली 4.1 (पृष्ठ संख्या 82)

प्रश्न 1 जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण है।

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$
(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$
(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$
(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$
(v) $(2x - 1)2(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$
(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$
(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$
(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

उत्तर-

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 2x + 1 + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 1, b = 0$ और $c = 7$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अत :यह द्विघात समीकरण है।

(ii) $x^2 - 2x = - 6 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 1, b = - 4$ और $c = 6$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अत :यह द्विघात समीकरण है।

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

$\Rightarrow x^2 + x - 2x -2$

$= x^2 + 3x - x - 3$

$\Rightarrow x^2 - x^2 + x + x - 2x + 3x -2 + 3 = 0$

$\Rightarrow 2x - x - 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

$\therefore$ यह द्विघात समीकरण नहीं है।

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = x^2 + 5x$

$\Rightarrow 2x^2 - x^2 - 5x - 5x - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 1, b = -10$ और $c = -3$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अत :यह द्विघात समीकरण है।

(v) $(2x - 1)\,2(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

$\Rightarrow (2x - 1)(2x - 6) = (x + 5)(x - 1)$

$\Rightarrow 4x^2 - 12x - 2x + 6 = x^2 + 4x - 5$

$\Rightarrow 4x^2 - 14x + 6 = x^2 - x + 4x - 5$

$\Rightarrow 4x^2 - x^2 - 14x - 4x + 6 + 5 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 11 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 3, b = -18$ और $c = 11$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अत :यह द्विघात समीकरण है।

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 - 2x + 4$

$\Rightarrow x^2 - x^2 + 4x + 3x + 1 - 4 = 0$

$\Rightarrow 7x - 3 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

$\therefore$ यह द्विघात समीकरण नहीं है।

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

$\Rightarrow x^3 + 8 + 6 + 12x = 2x^3 - 2x$

$\Rightarrow 2x^3 - x^3 - 6 - 12x + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 - 10x - 8 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

$\therefore$ यह द्विघात समीकरण नहीं है।

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 + 6x^2 + 12x$

$\Rightarrow x^3 - x^3 - 4x^2 + 6x^2 - 12x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 2, b = -13$ और $c = 1$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अत :यह द्विघात समीकरण है।

प्रश्न 2 निम्न स्थिति को द्विघात समीकरणों के रूप में निरुपित कीजिए।

(i) एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 528 मीटर^2 है। क्षेत्र की लंबाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है। हमें भूखंड की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात करनी है।
(ii) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णांकों को ज्ञात करना है।
(iii) रोहन की माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है। उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल अब से तीन वर्ष पश्चात् 360 हो जाएगी। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करणी है।
(iv) एक रेलगाड़ी 480 किमी। की दुरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 किमी/घण्टा कम होती, तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घंटे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

उत्तर-

(i) एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल = 528 मीटर^2

माना आयताकार भूखंड की चौड़ाई = x मीटर

आयताकार भूखंड की लंबाई = $2x + 1$ मीटर

आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल = 528 मीटर^2

लंबाई x चौड़ाई= 528

$(2x + 1)x = 528$

$2x^2 + x = 528$

$2x^2 + x - 528 = 0$

$2x^2 + 33x - 32x - 528 = 0$

$x(2x + 33) - 16(2x + 33) = 0$

$(2x + 33)(x - 16) = 0$

$2x + 33 = 0$ तथा $x - 16 = 0$

$2x = -33$ तथा $x = 16$

$x = \frac{-33}{2}$ तथा $x = 16$

चूँकि आयताकार भूखंड की चौड़ाई= x मीटर^2 = 16 मीटर

आयताकार भूखंड की लंबाई = 2x+ 1 मीटर

= 2 × 16 + 1 मीटर

= 32 + 1 मीटर^2 = 33 मीटर^2

(ii) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल = 306

माना पहला धनात्मक पूर्णांक = x

दूसरा धनात्मक पूर्णांक = x + 1

दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल = 306

पहला धनात्मक पूर्णांक x दूसरा धनात्मक पूर्णांक = 306

$(x + 1)x = 306$

$x^2 + x = 306$

$x^2 + x - 306 = 0$

$2x^2 + 18x - 17x - 306 = 0$

$x(x +) - 17(x + 18) = 0$

$(x + 18)(x - 17) = 0$

$x + 18 = 0$ तथा $x - 17 = 0$

$x = -18$ तथा $x = 17$

चूँकि पहला धनात्मक पूर्णांक $= x = 17$

दूसरा धनात्मक पूर्णांक $= x + 1$

$= 17 + 1 = 18$

(iii) माना रोहन की वर्तमान आयु $= x$

रोहन की माँ की आयु $= x + 26$

तीन वर्ष पश्चात रोहन की आयु $= x + 3$

तीन वर्ष पश्चात रोहन की माँ की आयु $= x + 26 + 3 = x + 29$

दोनो की आयु का गुणनफल $= 306$

$(x + 29)(x + 3) = 306$

$x^2 + 29x + 3x + 87 = 306$

$x^2 + 32x + 87 = 306$

$x^2 + 32x = 273$

$x^2 + 32x - 273 = 0$

$x^2 + 39x - 7x - 273 = 0$

$x^2 + 39x - 7x - 273 = 0$

$x(x + 39) - 7(x + 39) = 0$

$(x + 39)(x - 7) = 0$

$x + 39 = 0$ तथा $x - 7 = 0$

$x = -39$ तथा $x = 7$

चूँकि रोहन की वर्तमान आयु = 7 वर्ष

रोहन की माँ की आयु= x + 26

= 7 + 26 = 33 वर्ष

(iv)

माना, रेलगाड़ी की चाल = x किमी/घण्टा

कुल दूरी = 480 किमी।

इसलिए, लिया गया समय $= \frac{480}{x}$ hrs

यदि इसकी चाल 8 किमी/घण्टा कम होती, तो लिया गया समय $= \frac{480}{x-8}$ hrs

प्रश्नानुसार,

$$\frac{480}{x-8} - \frac{480}{x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{480x-480(x-8)}{x-8x} = 3$$

$$\Rightarrow 480x - 480x + 3640 = 3(x-8)x$$

$$\Rightarrow 3640 = 3x^2 - 24x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 24x^2 - 3640 = 0$$

अतः रेलगाड़ी की चाल द्विघात समीकरण $3x^2 - 24x^2 - 3640 = 0$ संतुष्ट करती है।

प्रश्नावली 4.2 (पृष्ठ संख्या 85)

प्रश्न 1 गुणनखंड विधि से निम्न द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए-

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$
(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$
(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

उत्तर-

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$x^2 - 5x + 3x - 10 = 0$

$x(x - 5) + 2(x - 5) = 0$

$(x - 5)(x + 2) = 0$

$x - 5 = 0$ तथा $x + 2 = 0$

$x = 5$ तथा $x = -2$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

$2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$

$x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x + 2 = 0$ तथा $x - 3 = 0$

$x = -2$ तथा $x = 3$

(iii)

$$\sqrt{2x^2} + 7x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2x^2} + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$x(\sqrt{2x} + 5) - \sqrt{2}(\sqrt{2x} + 5) = 0$$

$$(\sqrt{2x} + 5)(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\sqrt{2x} + 5 = 0 \text{ तथा } x - \sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2x} = -5 \text{ तथा } x = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-5}{\sqrt{2}} \text{ तथा } x = \sqrt{2}$$

(iv)

$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

$\Rightarrow 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow 4x(4x - 1) - 1(4x - 1) = 0$

$\Rightarrow (4x - 1)(4x - 1) = 0$

$\Rightarrow (4x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow 4x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$

अत: दत्त समीकरण के अभीष्ट मूल $\frac{1}{4}$ एवं $\frac{1}{4}$ हैं।

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

$100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$

$x(10x - 1) - 1(10x - 1) = 0$

$(x - 1)(10x - 1) = 0$

$10x - 1 = 0$ तथा $10x - 1 = 0$

$10x = 1$ तथा $10x = 1$

$x = \frac{1}{1}0$ तथा $x = \frac{1}{10}$

प्रश्न 2 उदाहरण 1 में दी गई समस्याओं को हल कीजिए।

जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं और अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनपफल 124 है। हम जानना चाहेंगे कि आरंभ में उनके पास कितने कंचे थे।

उत्तर- जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल कंचों की संख्या हैं = 45

माना जॉन के पास कुल कंचों की संख्या हैं = x

जीवंती के पास कुल कंचों की संख्या हैं = $45 - x$

कुल कंचों पाँच-पाँच कंचे खो जाने के बाद

जॉन के पास कुल कंचों की संख्या हैं = $x - 5$

जीवंती के पास कुल कंचों की संख्या हैं = $45 - x - 5 = 40 - x$

शेष कंचों की संख्या का गुणनपफल है= 124

$(x - 5)(40 - x) = 124$

$40x - x^2 - 200 + 5x = 124$

$-x^2 + 40x + 5x - 200 - 124 = 0$

$-x^2 + 45x - 324 = 0$

$x^2 - 45x + 324 = 0$

$x^2 - 36x - 9x + 324 = 0$

$x(x - 36) - 9(x - 36) = 0$

$(x - 36)(x - 9) = 0$

$x - 36 = 0$ तथा $x - 9 = 0$

$x = 36$ तथा $x = 9$

चूँकि x के दो मान है इसलिए $x = 36$ तथा $x = 9$

प्रश्न 3 ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

उत्तर- संख्याओं का योग= 27

संख्याओं का गुणनफल= 182

माना पहली संख्या = x

दूसरी संख्या = x + 1

दोनों संख्या का गुणनफल = 182

$x(27 - x) = 182$

$27x - x^2 = 182$

$-x^2 + 27x - 182= 0$

$x^2 - 27x + 182 = 0$

$x^2 - 14x - 13x + 182 = 0$

$x(x - 14) - 13(x - 14) = 0$

$(x - 14)(x - 13) = 0$

$x - 14 = 0$ तथा $x - 13 = 0$

$x = 14$ तथा $x =13$

पहली संख्या = x = 13

दूसरी संख्या = x + 1

= 13 + 1 = 14

प्रश्न 4 दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।

उत्तर- दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल = 306

माना पहला धनात्मक पूर्णांक = x

दूसरा धनात्मक पूर्णांक= x + 1

दोनों क्रमागत संख्या के वर्गों का योग= 365

$(x)^2 + (x + 1)^2 = 365$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 365$

$2x^2 + 2x + 1 = 365$

$2x^2 + 2x + 1 - 365 = 0$

$2x^2 + 2x + 1 - 365 = 0$

$2x^2 + 2x - 364 = 0$

$2(x^2 + x - 182) = 0$

$x^2 + x - 182 = \frac{0}{2}$

$x^2 + x - 182 = 0$

$x^2 + 14x - 13x - 182 = 0$

$x(x + 14) - 13(x + 14) = 0$

$(x + 14)(x - 13) = 0$

$x + 14 = 0$ तथा $x - 13 = 0$

$x = -14$ तथा $x = 13$

चूँकि पहला धनात्मक पूर्णांक = x = 13

दूसरा धनात्मक पूर्णांक= x + 1 = 13 + 1 = 14

प्रश्न 5 एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी. कम है। यदि कर्ण 13 सेमी. का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- समकोण त्रिभुज का आधार = x सेमी.

समकोण त्रिभुज की ऊँचाई= x -7सेमी.

समकोण त्रिभुज में कर्ण = 13 सेमी.

पाईथागोरस प्रमेय के प्रयोग से

(कर्ण(^{2} = (ऊँचाई(^{2} + (आधार(^{2}

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(13)^2 = (x - 7)^2 + (x)^2$

$169 = x^2 - 14x + 49 + x^2$

$169 - 49 = 2x^2 - 14x$

$120 = 2(x^2 - 7x)$

$x^2 - 7x = \frac{2}{120}$

$x^2 - 7x - 60 = 0$

$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

$x(x - 12) + 5(x - 12) = 0$

$(x - 12)(x + 5) = 0$

$x - 12 = 0$ तथा $x + 5 = 0$

$x = 12$ तथा $x = -5$

चूँकि समकोण त्रिभुज का आधार = x सेमी.

= 12 सेमी.

समकोण त्रिभुज की ऊँचाई= x – 7 सेमी.

= 12 – 7 = 5 सेमी.

प्रश्न 6 एक कुटीर उधोग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है। एक विशेष दिन यह देखा गया

की प्रत्येक नाग की निर्माण लागत (रुपयों में) उस दिन के निर्माण किए बर्तनों की संख्या के दुगुने से 3 अधिक थी। यदि उस दिन की कुल निर्माण लागत 90 रूपए थी, तो निर्मित बर्तनों की संख्या और प्रत्येक नाग की लागत ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना उस दिन निर्मित बर्तनों की संख्या = x

प्रत्येक नाग की निर्माण लागत = 2x + 3

उस दिन की कुल निर्माण लागत = 90 रुपये

$x(2x + 3) = 90$

$2x^2 + 3x = 9$

$2x^2 + 3x - 90 = 0$

$2x^2 + 15x - 12x - 90 = 0$

$x(2x + 15) - 6(2x + 15) = 0$

$(2x + 15)(x - 6) = 0$

$2x + 15 = 0$ तथा $x - 6 = 0$

$x = -15$ तथा $x = 6$

माना उस दिन निर्मित बर्तनों की संख्या = x = 6

उ स दिन प्रत्येक निर्मित बर्तनों का लागत = 2x + 3

$= 2 \times 6 + 3 = 12 + 3$

= 15 रूपये

प्रश्नावली 4.3 (पृष्ठ संख्या 97)

प्रश्न 1 यदि निम्नलिखित द्विघात समीकरण के मूल का अस्तित्व हो तो इन्हें पूर्ण वर्ग बनाए की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$
(iii) $4x2 + 4\sqrt{3x} + 3 = 0$

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

उत्तर-

(i) $2x^2 – 7x + 3 = 0$

$a = 2, b = -7$ और $c = 3$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (7)^2 – 4 \times 2 \times 3$

$D = 49 - 24$

$D = 25$

$b^2 - 4ac > 0$ अर्थात $D > 0$ अत :इस समीकरण के दो वास्तविक एवं असमान मूल होंगे |

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

दोनों पक्षों में 8 से गुणा करने पर

$8(2x^2 - 7x + 3 = 0$

$16x^2 - 56x + 24 = 0$

$((4x)^2 - 2.4x.7 + (7)^2) - (7)^2 + 24 = 0$

$(a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2)$

$(4x - 7)^2 - 49 + 24 = 0$

$(4x - 7)^2 - 25 = 0$

$(4x - 7)^2 = 25$

$4x - 7 = 25$

$$4x - 7 = \sqrt{45}$$

$$4x - 7 = \pm 5$$

$$4x = 7 = \pm 5$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}, x = \frac{7 - 5}{4}$$

$$x = \frac{12}{4}, x = \frac{2}{4}$$

$$x = 3, x = \frac{1}{2}$$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

$a = 2$, $b = 1$ और $c = -4$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)$

$D = 1 + 24$

$D = 25$

$b^2 - 4ac > 0$

अत :इस समीकरण के दो वास्तविक और असमान मूल होंगे।

$2x^2 + x - 4 = 0$

दो से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{4}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[x^2 + 2.x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{-1-36}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{-33}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{-33}{16}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{33}}{4}, x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$$

(iii)

$$4x2 + 4\sqrt{3x} + 3 = 0$$

$a = 4, b = 4\sqrt{3}$ और $c = 3, D = b^2 - 4ac$

$$D = (4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3$$

$$D = 48 - 48$$

$$D = 0$$

$b^2 - 4ac = 0$ अर्थात $D = 0$

अत: इस समीकरण के दो वास्तविक और असमान मूल होंगे

$2x^2 + x - 4 = 0$

दो से भाग देने पर

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

$a = 2, b = 1, c = 4$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (1)^2 - 4 \times 2 \times 4$

$D = 1 - 32$

$D = -31$

$b^2 - 4ac < 0$ अर्थात $D < 0$

अत :इस समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

प्रश्न 2 उपर्युक्त प्रश्न 1 में दिए गए द्विघात समीकरणों के मूल, द्विघाती सूत्र का उपयोग करके, ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$
(iii) $4x2 + 4\sqrt{3x} + 3 = 0$

उत्तर-

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

द्विघाती सूत्र द्वारा-

$a = 2, b = -7, c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}, x = \frac{7 - 5}{4}$$

$$x = \frac{12}{4} = x = \frac{2}{4}$$

$$x = 3, x = \frac{1}{2}$$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

द्विघाती सूत्र द्वारा-

$a = 2, b = 1, c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2(-4)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}, x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$$

(iii)

$$4x2 + 4\sqrt{3x} + 3 = 0$$

द्विघाती सूत्र द्वारा-

$$a = 4, b = 4\sqrt{3}, c = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-48}}{8}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3}+0}{8}, x = \frac{-4\sqrt{3}-0}{8}$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3}}{8}, x = \frac{-4\sqrt{3}}{8}$$

$$x = \frac{-2\sqrt{3}}{4}, x = \frac{-2\sqrt{3}}{4}$$

अतः दिए गए समीकरण का मूल है। $\frac{-2\sqrt{3}}{4}$ और $\frac{-2\sqrt{3}}{4}$

प्रश्न 3 निम्न समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए-

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, x = 0$

(ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30} x = -4, 7$

उत्तर-

(i)

$$x - \frac{1}{x} = 3, x = 0$$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 3x$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$

a = 1, b = -3, c = -1

विघाती सूत्र से-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(\sqrt{3}) \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 4 \times -1 \times 3}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

(ii)

$$\Rightarrow \frac{x-7-(x+4)}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7-x+4}{x^2-7x+4x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{x^2-3x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28} = \frac{1}{30}$$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 = -30$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 + 30 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0$

$\Rightarrow x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0, X - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 2$ और $x = 1$

प्रश्न 4 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात् आयु के व्युत्क्रम का योग है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना रहमान की वर्तमान आय x वर्ष है।

तो प्रश्नानुसार, 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु = x - 3 वर्ष

आयु का व्युत्क्रम $= \frac{1}{x-3}$ वर्ष

5 वर्ष पश्चात् आयु का व्युत्क्रम $= \frac{1}{x+5}$ वर्ष

अतः $\frac{1}{x-3} + = \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x+5x-3}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+5x-3x-15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+2x-15} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 3(2x + 2)$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 6x + 6$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 6x - 15 - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$

$\Rightarrow x(x - 7) + 3(x - 7) = 0$

$\Rightarrow (x - 7)(x + 3) = 0$

$\Rightarrow x - 7 = 0, x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = 7$ और $x = -3$

अत :वर्त्तमान आयु धनात्मक संख्या 7 लेंगे। अत :रहमान की वर्त्तमान आयु 7 वर्ष है।

प्रश्न 5 एक क्लास टेस्ट में शेफाली के गणित और अंग्रेजी में प्राप्त किए गए अंकों का योग 30 है। यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिले होते, तो उनके अंकों का गुणनफल 210 होता। उसके द्वारा दोनों विषयों में प्राप्त किए अंक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना गणित में प्राप्त अंक x है।

इसलिए, अंग्रेजी में प्राप्त अंक $= 30 - x$

प्रश्नानुसार, $(x + 2)(30 - x - 3) = 210$

या $(x + 2)(27 - x) = 210$

या $27x - x^2 + 54 - 2x = 210$

या $25x - x^2 + 54 = 210$

या $x^2 - 25x + 210 - 54 = 0$

या $x^2 - 25x + 156 = 0$

या $x^2 - 12x - 13x + 156 = 0$

या $x(x - 12) - 13(x - 12) = 0$

या $(x - 12)(x - 13) = 0$

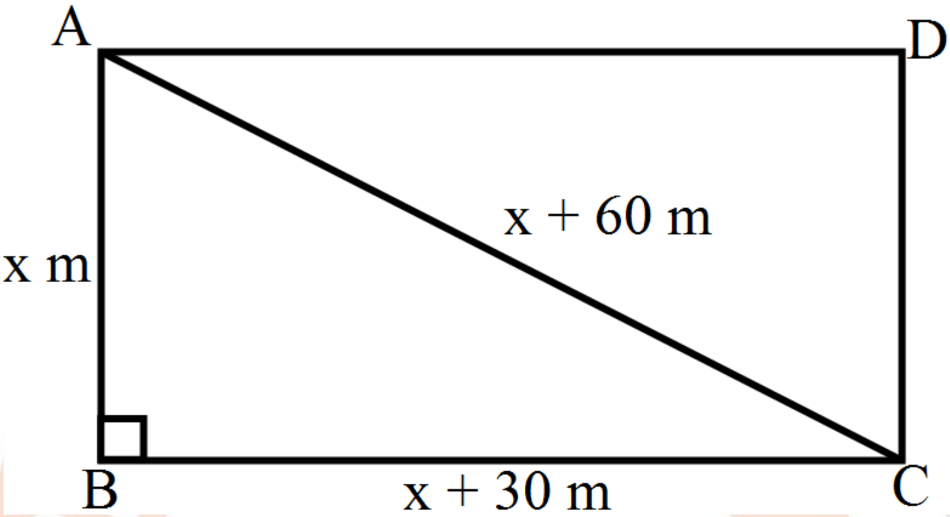
या $x - 12 = 0, x - 13 = 0$

या $x = 12$ अथवा $x = 13$

अब यदि x = 12 तो गणित में प्राप्त अंक = 12 और अंग्रेजी में प्राप्त अंक = 30 - 12 = 18

और यदि x = 13 तो गणित में प्राप्त अंक = 13 और अंग्रेजी में प्राप्त अंक = 30 - 13 = 17

प्रश्न 6 एक आयताकार खेत का विकर्ण उसकी छोटी भुजा से 60 मीटर अधिक लंबा है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुँजा से 30 मीटर अधिक हो, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।



उत्तर- माना सबसे छोटी भुजा = x मीटर

तो बड़ी भुजा = x + 30 मीटर और

विकर्ण = x + 60 मीटर

प्रश्नानुसार,

चूँकि ABCD एक आयत है जिसका प्रत्येक कोण समकोण है इसलिए ABC में, पैथागोरस प्रमेय के प्रयोग से-

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow (x + 60)^2 = (x)^2 + (x + 30)^2$

$\Rightarrow x^2 + 120x + 3600 = x^2 + x^2 + 60x + 900$

$\Rightarrow x^2 + 120x + 3600 = 2x^2 + 60x + 900$

$\Rightarrow 2x^2 - x^2 + 60x - 120x + 900 - 3600 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 60x - 2700 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 90x + 30x - 2700 = 0$

$\Rightarrow x(x - 90) + 30(x - 90) = 0$

$\Rightarrow (x - 90)(x + 30) = 0$

$\Rightarrow x - 90 = 0, x + 30 = 0$

$\Rightarrow x = 90$ और $x = -30$

चूँकि आयता की लंबाई धनात्मक होती है इसलिए $x = 90$ ऋणात्मक नहीं होती

अत :छोटी भुजा = 90 मीटर

तो बड़ी भुजा = 90 + 30 = 120 मीटर

और विकर्ण = 90 + 60 = 150 मीटर

प्रश्न 7 दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुणा है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना बड़ी संख्या = x

तो छोटी संख्या का वर्ग = 8x

प्रश्नानुसार,

बड़ी संख्या का वर्ग - छोटी संख्या का वर्ग = 180

$x^2 - 8x = 180$

या $x^2 - 8x - 180 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 18x + 10x - 180 = 0$

$\Rightarrow x(x - 18) + 10(x - 18) = 0$

$\Rightarrow (x - 18)(x + 10) = 0$

$\Rightarrow x - 18 = 0, x + 10 = 0$

$\Rightarrow x = 18$ और $x = -10$

अत :बड़ी संख्या 18 है, $x = -10$ नहीं लिया जा सकता।

अब) छोटी संख्या(^{2} = 8 × 18 = 144

छोटी संख्या = $\sqrt{144} = 12$

प्रश्न 8 एक रेलगाड़ी एक समान चाल से 360 किमी. की दुरी तय करती है। यदि यह चाल 5 किमी/घण्टा अधिक होती, तो वह उसी यात्रा में 1 घंटा कम समय लेती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना रेलगाड़ी की समान्य चाल = x किमी/घण्टा

तय दुरी = 360 किमी.

$$\text{लिया गया समय} = \frac{\text{दुरी}}{\text{चाल}}$$

अतः सामान्य लिया गया $= \frac{360}{x}$ घंटे

चाल बढ़ाने पर नई चाल $= x + 5\text{km/h}$

अतः नया लिया गया समय $= \frac{360}{x+5}$ घंटे

चाल बढ़ने से समय घट जाता है चाल घटा देने से लिया गया समय बढ़ जाता है।

$\frac{360}{x} > \frac{360}{x+5}$ प्रश्नानुसार $\frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = 1$

$$\Rightarrow 360\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 360\left(\frac{x+5-x}{x(x+5)}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 360\left(\frac{5}{x^2+5x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1800}{x^2+5x}\right) = 1$$

$x^2 + 5x = 1800$

$= x^2 + 5x - 1800 = 0$

$= x^2 + 5x - 1800 = 0$

$= x + 45x - 40x - 1800 = 0$

$= x(x + 45) - 40(x + 45) = 0$

$= (x + 45)(x - 40) = 0 =$

$= x + 45 = 0, x - 40 = 0$

$= x = -45$ और $x = 40$

चूँकि गाड़ी की चाल ऋणात्मक नहीं हो सकती है इसलिए चाल = 40 किमी/घण्टा

प्रश्न 9 दो पानी के नल एक - साथ एक हौज को घंटों में भर सकते हैं। बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में, कम व्यास वाले नल से 10 घंटे कम समय लेता है। प्रत्येक द्वारा अलग से हौज को भरने के समय ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना छोड़ा जाल टंस से अकेले x घंटे में भता हूँ।

तो बड़ा व्यास बाल नल टंकी भरेगा = $x - 10$ घंटे में

अब छोटा व्यास बाला नाम 1 घंटे में टंकी का $\frac{1}{x}$ भाग भरेगा

और बड़ा ब्यास बाला नल टंकी का $\frac{1}{x - 10}$ भाग भरेगा

दोनों मिलकर भरते है $9\frac{3}{8}$ घंटों में $= \frac{75}{8}$ घंटे में

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{x-10+x}{x(x-10)} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-10}{x(x-10)} = \frac{8}{75}$$

$\Rightarrow 8(x^2 - 10x) = 75(2x - 10)$

$\Rightarrow 8x^2 - 80x = 150x - 750$

$\Rightarrow 8x^2 - 80x - 150x + 750 = 0$

$\Rightarrow 8x^2 - 230x + 750 = 0$

$\Rightarrow 8x^2 - 200x - 30x + 750 = 0$

$\Rightarrow 8x(x - 25) - 30(x - 25) = 0$

$\Rightarrow (x - 25)(8x - 30) = 0$

$\Rightarrow x - 25 = 0, 8x - 30 = 0$

$\Rightarrow x = 25$ और $8x = 30$

$\Rightarrow x = 25$ और $x = \frac{30}{8}$

$x = \frac{30}{8}$ संभव नहीं है क्योंकि यह 10 घंटा से भी कम है(

अत :छोटा ब्यास वाला नल अकेला भरेगा - 25 घंटे में

तो बड़ा व्यास वाला नल भरेगा 25 - 10 = 15 घंटे में

प्रश्न 10 मैसूर और बैंगलोर के बीच के 132 किमी यात्रा करने में एक एक्सप्रेस रेलगाड़ी, सवारी गाड़ी से 1 घंटा समय कम लेती है (मध्य के स्टेशनों पर ठहरने का समय ध्यान में न लिया जाए)यदि एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल, सवारी गाड़ी की चाल से 11 किमी/घण्टा अधिक हो, तो दोनों रेलगाड़ी की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना सवारी गाड़ी की समान्य चाल = x किमी/घंटा

तो एक्सप्रेस गाड़ी की समान्य चाल = x + 11 किमी/घंटा

मैसूर और बैंगलोर की बीच की दुरी = 132 किमी/घंटा[

$$\text{सवारी गाड़ी द्वारा लिया गया समय} = \frac{\text{दुरी}}{\text{चाल}} = \frac{132}{x} \text{ घंटा}$$

जबकि एक्सप्रेस गाड़ी द्वारा लिया गया समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{132}{x+11}$ घंटा

चूंकि सवारी गाड़ी द्वारा लिया गया समय एक्सप्रेस गाड़ी से 1 घंटा अधिक है।

इसलिए, $\frac{132}{x} - \frac{132}{x+11} = 11$

$$\Rightarrow 132\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+11}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 132\left(\frac{x+11-x}{x(x+11)}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 132\left(\frac{11}{x^2(x+11)}\right) = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 11x = 132 \times 11$$

$$\Rightarrow x^2 + 11x = 1452$$

$$\Rightarrow x^2 + 11x - 1452 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 44x - 33x - 1452 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+44) - 33(x+44) = 0$$

$$\Rightarrow x(x+44)(x-33) = 0$$

$$\Rightarrow x(x+44) = 0(x-33) = 0$$

$$\Rightarrow x = -44 \text{ और } x = 33$$

-44 एक रेलगाड़ी की चाल नहीं हो सकता इसलिए x = 33 लेंगे

अत :सवारी गाड़ी की चाल = 33 किमी/घंटा और

एक्सप्रेस गाड़ी की चाल = 33 + 11 = 44 किमी/घंटा

प्रश्न 11 दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 468 मीटर^2 है। यदि उनके परिमापों का अन्तर 24 मीटर हो,

तो दोनों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना एक वर्ग की एक भुजा = x मीटर और दुसरे वर्ग की भुजा = y मीटर

पहला का परिमाप = 4x मीटर और दुसरे का परिमाप = 4y मीटर

प्रश्नानुसार,

स्थित) -I)

$$4x - 4y = 24$$

$$\Rightarrow x - y = \frac{24}{4} = 6$$

$$\Rightarrow x - y = 6$$

$$\Rightarrow x - y = 6 \ldots (1)$$

स्थित) -II)

$\Rightarrow x^2 + (x - 6)^2 = 468$ समीकरण) 1) से

$\Rightarrow x^2 + x - 12x + 36 = 468$

$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 36 - 468 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 12x - 432 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 216 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 18x + 12x - 216 = 0$

$\Rightarrow x(x - 18) + 12(x - 18) = 0$

$\Rightarrow (x - 18)(x + 12) = 0$

$\Rightarrow x - 18 = 0, x + 12 = 0$

$x = 18, x = -12$ (वर्ग की भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती इसलिए $x = -12$ नहीं ले सकते हैं(

पहले वर्ग की भुजा = 18 मीटर तो दुसरे की भुजा = 18 - 6 = 12 मीटर

प्रश्नावली 4.4 (पृष्ठ संख्या 100)

प्रश्न 1 निम्न द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

(ii) $3x^2 - 2\sqrt{3x} + 4 = 0$

(iii) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

उत्तर-

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2, b = -3$ और $c = 5$

$D = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5$

$= 9 - 40$

$= -31$

चूँकि D का ऋणात्मक मान यह बताता है कि $D < 0$ से अत :द्विघात समीकरण का कोई मूल नहीं है।

(ii)

$$3x2 - 4\sqrt{3x} + 4 = 0$$

$a = 3, b = -4\sqrt{3}$ और $c = 4$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-4\sqrt{3})2 - 4 \times 3 \times 4$$

$$= 48 - 48 = 0$$

चूँकि D = 0 है अत: इसके दो वास्तविक एवं समान मूल होंगे

द्विघाती सूत्र से-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-\sqrt{(-4\sqrt{3})} \pm \sqrt{0}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{6}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{6}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3} + 0}{6}, x = \frac{4\sqrt{3} + 0}{6}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{6} \text{ और } x = \frac{4\sqrt{3}}{6}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ और } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(iii) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

$a = 2, b = 6$ और $c = 3$

$D = b^2 - 4ac$

$= (6)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 36 - 24 = 12$

चूँकि D > 0 से अत :इस समीकरण के दो वास्तविक एवं असमान मूल होंगे

द्विघाती सूत्र से-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{12}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4} \text{ और } x = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{4} \text{ और } x = \frac{2(\sqrt{3} - 3)}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3} + 3}{2} \text{ और } x = \frac{\sqrt{3} - 3}{2}$$

प्रश्न 2 निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

उत्तर-

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

$a = 2$, $b = k$ और $c = 3$

चूँकि दिए गए समीकरण के दो बराबर मूल है अर्थात

$D = 0$

अतः $b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow (k)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 24 = 0$

$\Rightarrow k^2 = 24$

$\Rightarrow k = \sqrt{24}$

$\Rightarrow k = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

$\Rightarrow kx^2 - 2kx + 6 = 0$

$a = k, b = -2k, c = 6$

चूँकि दिए गए समीकरण के दो बराबर मूल है अर्थात

$D = 0$

अतः $b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow (-2k)^2 - 4 \times k \times 6 = 0$

$\Rightarrow 4k^2 - 24k = 0$

$\Rightarrow 4k^2 = 24k$

$\Rightarrow k = \frac{24k}{4k}$

$\Rightarrow k = 6$

प्रश्न 3 क्या एक ऐसी आम की बगिया बनाना संभव है जिसकी लंबाई, चौड़ाई से दुगुनी हो और उसका क्षेत्रफल 800 मीटर^2 हो? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना आम की बगिया की चौड़ाई = x मीटर

तो लंबाई = 2x मीटर

अब, लंबाई × चौड़ाई = क्षेत्रफल

$\Rightarrow 2x \times x = 800$ मीटर^2

$\Rightarrow 2x^2 = 800$ मीटर^2

$\Rightarrow x^2 = 400$ मीटर^2

$\Rightarrow x = \sqrt{400}$ मीटर^2

$\Rightarrow x = 20$ मीटर

अत :चौड़ाई = 20 मीटर और

लंबाई = 2x = 2 × 20 = 40 मीटर

हाँ, ऐसी आम की बगिया संभव है।

प्रश्न 4 क्या निम्न स्थिति संभव है? यदि है तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए। दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।

उत्तर- माना एक मित्र की वर्त्तमान आयु = x वर्ष

तो दुसरे मित्र की वर्त्तमान आयु = 20 - x वर्ष

4 वर्ष पूर्व उनकी आयु का गुणनफल=

$\Rightarrow (x - 4)(20 - x - 4) = 48$

$\Rightarrow (x - 4)(16 - x) = 48$

$\Rightarrow 16x - x^2 - 64 + 4x = 48$

$\Rightarrow 20x - x^2 - 64 - 48 = 0$

$\Rightarrow 20x - x^2 - 112 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 112 = 0$

इस समीकरण के मूल का अस्तित्व है या नहीं यह जाँच करेंगे।

a = 1, b = -20 और c = 112

$D = b^2 - 4ac$

$= (-20)^2 - 4(1)(112)$

$= 400 - 448 = -48$

चूँकि D < 0 है इसलिए इस समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है अत :यह संभव नहीं है।

प्रश्न 5 क्या परिमाप 80 मीटर तथा क्षेत्रफल 400 मीटर^2 के एक पार्क को बनाना संभव है? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना पार्क का लंबाई = x मीटर

और चौड़ाई = y मीटर

तो, 2(लंबाई + चौड़ाई = (परिमाप

2(x + y) = 80 मीटर

x + y = 40 मीटर

y = 40 - x मीटर

अत :चौड़ाई = 40 - x मीटर

अब, लंबाई × चौड़ाई = क्षेत्रफल

$x(40 - x) = 400$

$\Rightarrow 40x - x^2 = 400$

$\Rightarrow x^2 - 40x + 400 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 20x - 20x + 400 = 0$

$\Rightarrow x(x - 20) - 20(x - 20) = 0$

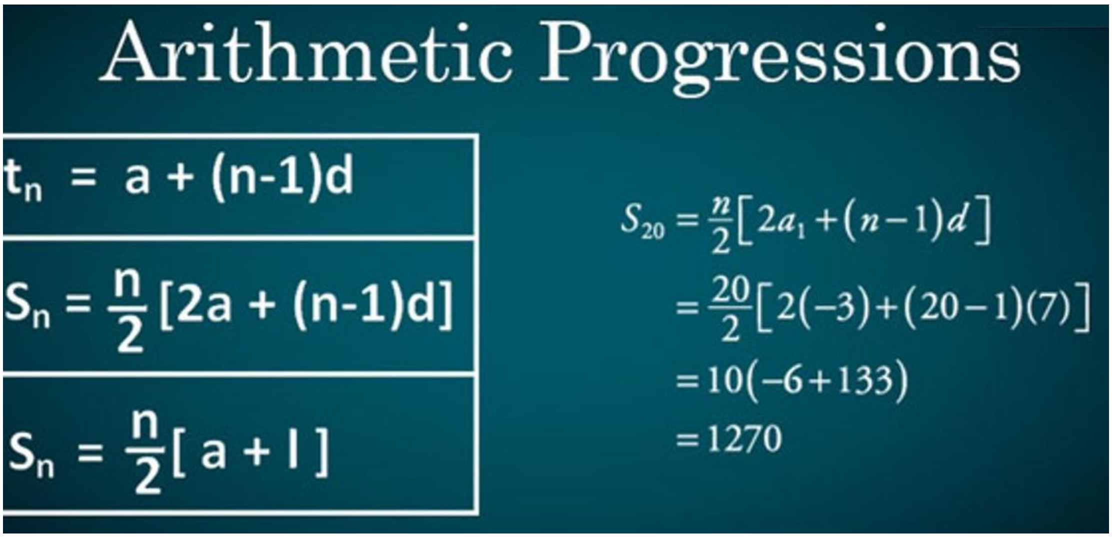
$\Rightarrow (x - 20)(x - 20) = 0$

$\Rightarrow x - 20 = 0, x - 20 = 0$

$\Rightarrow$ x = 20 और x = 20

अत :पार्क की लंबाई = 20 मीटर तो चौड़ाई = 40 - 20 = 20 मीटर

समांतर श्रेढ़ी क्या है



गणित में समान्तर श्रेढ़ी अथवा समान्तर अनुक्रम का अर्थ है, संख्याओं का एक ऐसाअनुक्रम या श्रेणी है जिसके दो क्रमागत पदो का अन्तर सामान या नियत होता है, उसे समान्तर श्रेढ़ी कहा जाता है।

दूसरे शब्दों में, संख्याओं की एक ऐसी सूची है जिसमें प्रत्येक पद अपने पद में एक निश्चित संख्या जोड़ने पर प्राप्त होती है, वह समांतर श्रेढ़ी कहलाता हैं।

समान्तर श्रेढ़ी का फार्मूला या सूत्र

सामान्यतः समान्तर श्रेढ़ी को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं: a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n एक समान्तर श्रेढ़ी कहलाता है। श्रेढ़ी की प्रत्येक संख्या को पद कहते हैं। जिसमें a_1 को प्रथम पद कहते हैं तथा a_n श्रेढ़ी का n वां पद है।

समान्तर श्रेणी में सार्व अंतर

किसी भी AP में पहले पद से जुड़ने या घटने वाली संख्या को सार्व अंतर कहा जाता है। समान्तर श्रेढ़ी के सार्व अंतर धनात्मक, ऋणात्मक तथा शून्य हो सकता है।

AP के प्रथम पद को a_1, दूसरे पद को a_2, ... nवें पद को a_n तथा सार्व अंतर को d से व्यक्त किया जाता है।

अतः $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots\ldots = a_n - a_{n-1} = d$ होता है।

अर्थात प्रथम पद में d जोड़कर AP प्राप्त किया जा सकता है. जैसे:-

a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... आदि।

समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप

एक समांतर श्रेढ़ी को निरूपित करती है, जहाँ a पहला पद है और d सार्व अंतर है। इसे समांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप कहते हैं।

कुछ उदाहरणों के माध्यम से समांतर श्रेढ़ी को समझने का प्रयास करते हैं:

उदाहरणार्थ, यदि प्रथम पद a = 6 है और सार्व अंतर d = 3 है तो

6, 9,12, 15, ... एक समांतर श्रेढ़ी है।

तथा यदि a = 6 है और d = – 3 है तो

6, 3, 0, -3, ... एक समांतर श्रेढ़ी है।

समांतर श्रेणी पर अतिरिक्त प्रश्न

प्रत्येक किलो मीटर के बाद का टैक्सी का किराया, जबकि प्रथम किलो मीटर के लिए किराया रु 15 है और प्रत्येक अतिरिक्त किलो मीटर के लिए किराया रु 8 है।

उत्तर:

प्रथम किलो मीटर के लिए किराया रु 15 है यह समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a_1 है

प्रश्नानुसार प्रत्येक अतिरिक्त किलो मीटर के लिए किराया रु 8 है। तो यह समांतर श्रेढ़ी का d सार्व अंतर है।

इसप्रकार, समांतर श्रेढ़ी

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots = a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots\ldots\ldots$

उपरोक्त श्रेढ़ी में a_1 और d का मान रखने पर प्राप्त होती है:

$= 15, 15 + 8, 15 + 2 \times 8, 15 + 3 \times 8, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 15, 23, 31, 39, \ldots\ldots\ldots\ldots$

यह एक समांतर श्रेढ़ी है।

निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ी के अगले दो पद लिखिए 4, 10, 16, 22, . . .

$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

यहाँ d = 6 है

इसलिए इस समांतर श्रेढ़ी के अगले दो पद 22 + 6 = 28 और 28 + 6 = 34 हैं।

प्रत्येक मीटर की खुदाई के बाद, एक कुँआ खोदने में आई लागत, जबकि प्रथम मीटर खुदाई की लागत रु 150 है और बाद में प्रत्येक मीटर खुदाई की लागत रु 50 बढ़ती जाती है।

प्रथम मीटर की खुदाई की लागत रु 150 है।

प्रश्नानुसार प्रत्येक अतिरिक्त मीटर की खुदाई के लिए लागत रु 50 है। तो यह समांतर श्रेढ़ी का d सार्व अंतर है।

इसप्रकार, समांतर श्रेढ़ी

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots = a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots\ldots\ldots$

उपरोक्त श्रेढ़ी में a_1 और d का मान रखने पर प्राप्त होती है:

$= 150, 150 + 50, 150 + 2 \times 50, 150 + 3 \times 50, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 150, 200, 250, 300, \ldots\ldots\ldots\ldots$

यह एक समांतर श्रेढ़ी है।

समांतर श्रेढ़ी के प्रकार

समांतर श्रेढ़ी को मुख्यतः दो प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

परिमित समान्तर श्रेढ़ी

एक समान्तर श्रेढ़ी जिसमें संख्याएँ सीमित होती हैं उसे परिमित समान्तर श्रेढ़ी कहते हैं। इस प्रकार की समान्तर श्रेढ़ी में अंतिम पद होता है।

उदाहरण – 5, 10, 15, 20, 25, 30 ....100 (अंतिम पद)।

अपरिमित समान्तर श्रेढ़ी

एक समान्तर श्रेढ़ी जिसमें अनंत संख्या में पद होते हैं उसे अपरिमित समान्तर श्रेढ़ी कहा जाता है। इस प्रकार की समान्तर श्रेढ़ी में अंतिम पद नहीं होता है।

उदाहरण: 10, 20, 30, 40, 50, 60 .... एक समांतर श्रेढ़ी है।

समान्तर श्रेढ़ी का N वाँ पद (व्यापक पद)

हमें समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप पता हैं जो कि इस तरह लिखा जाता है।

a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, ..., a + (n – 1) d

यहाँ, पहला पद a है। दूसरा पद ज्ञात करने के लिए पहले पद a में सार्व अंतर d जोड़ते हैं या हम कह सकते हैं कि सार्व अंतर d को (2 – 1) से गुणा कर रहे हैं और फिर पहले पद a में जोड़ रहे हैं।

$a_2 = a + d = a + (2 - 1) d$

तीसरा पद ज्ञात करने के लिए, उपरोक्त अनुसार हम सार्व अंतर d को (3 – 1) से गुणा कर रहे हैं और पहले पद a में जोड़ रहे हैं।

$a_3 = a + 2d = a + (3 - 1) d$

इसी तरह, समान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद ज्ञात करने के लिए सार्व अंतर d को (n – 1) से गुणा करेंगे और फिर पहले पद a में जोड़ेंगे जैसा व्यापक रूप में भी लिखा गया है।

$a_n = a + (n - 1) d$

यहाँ, a_n = n वाँ पद या इसको व्यापक पद भी कहते हैं।

यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी में m पद हैं, तो a_m इसके अंतिम पद को निरूपित करता है, जिसे कभी-कभी l द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।

अभ्यास के लिए प्रश्न

2, 7, 12, ... का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

यहाँ पर $a_1 = 2, a_2 = 7$

इसलिए, $d = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$

क्योंकि $a_n = a + (n - 1) d$

इसलिए, 10वां पद

$a_{10} = a_1 + (10 - 1)\ d$

$= 2 + 9 \times 5 = 47$

अतः 10वां पद है।

अतिरिक्त प्रश्नों के हल

21, 18, 15, ... का कौन-सा पद – 81 है? साथ ही क्या इस A. P. का कोई पद शून्य है? सकारण उत्तर दीजिए।

उत्तर:

यहाँ, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ और $a_n = -81$ है। हमें n ज्ञात करना है।

चूँकि $a_n = a + (n - 1)\ d$

अतः $-81 = 21 + (n - 1)(-3)$

या $-81 = 24 - 3n$

या $-105 = -3n$

अतः $n = 35$

इसलिए, दी हुई A. P. का 35वाँ पद – 81 है।

आगे, हम यह जानना चाहते हैं कि क्या कोई n ऐसा है कि $a_n = 0$ हो। यदि ऐसा कोई n

है तो

$21 + (n - 1)\ (-3) = 0$

अर्थात् $3(n - 1) = 21$

या $n = 8$

अतः 8वां पद 0 है।

वह A. P. निर्धारित कीजिए जिसका तीसरा पद 5 और 7वाँ पद 9 है।

हमें प्राप्त है

$a_3 = a + (3 – 1) d = a + 2d = 5$ (1)

और

$a_7 = a + (7 – 1) d = a + 6d = 9$ (2)

समीकरणों (1) और (2) के युग्म को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$a = 3, d = 1$

अतः वांछित A. P.: 3, 4, 5, 6, 7, ... है।

समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम N पदों का योग

एक समान्तर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योग ज्ञात करने के लिए सूत्र बना सकते हैं।

हम समान्तर श्रेढ़ी को पहले पद a और सार्व अंतर d के साथ n पदों के लिए निम्नानुसार लिखते हैं।

$a, a + d, a + 2d + \ldots\ldots\ldots + a + (n – 1) d$

समान्तर श्रेढ़ी के पहले n पदों के योग को S_n द्वारा निरूपित किया जाता है, इसलिए हम लिख सकते है:

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots\ldots + [a + (n – 2) d] + [a + (n – 1) d]$ (1)

उलटे क्रम में सभी पदों को फिर से लिखते है:

$Sn = [a + (n – 1) d] + [a + (n – 2) d] + \ldots\ldots\ldots + (a + 2d) + (a + d) + a$ (2)

अब समीकरण (1) और (2) दोनों को जोड़ने पर,

$S_n + S_n = [a + a + (n – 1) d] + [(a + d) + a + (n – 2) d] +\ldots\ldots+ [a + (n – 2) d + (a + d)] + [a + (n – 1) d + a]$

$2S_n = [2a + (n – 1) d] + [a + d + a + nd – 2d] +\ldots\ldots+ [a + nd – 2d + a + d] + [2a + (n – 1) d]$

$2S_n = [2a + (n – 1)d] + [2a + nd – d] +\ldots\ldots\ldots\ldots+ [2a + nd – d] + [2a + (n – 1) d]$

$2S_n = [2a + (n – 1)d] + [2a + (n – 1)d] +\ldots\ldots\ldots\ldots+ [2a + (n – 1) d] + [2a + (n – 1) d]$ {n बार}

$2S_n = [2a + (n - 1) d] \times n$

$S_n = [2a + (n - 1) d] \times n/2$

$S_n = n/2[2a + (n - 1) d]$

इसलिये, एक समान्तर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योग $S_n = n/2[2a + (n - 1) d]$ है।

दूसरे रूप में $S_n = n/2[a + a_n] = n/2[a + l]$

ध्यान देनें योग्य बात

परिणाम का यह रूप उस स्थिति में उपयोगी है, जब A. P. के प्रथम और अंतिम पद दिए हों तथा सार्व अंतर नहीं दिया गया हो।

A. P. का nवाँ पद

किसी A. P. का nवाँ पद उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम (n – 1) पदों के योग के अंतर के बराबर है।

अर्थात् $a_n = S_n - S_{n-1}$ है।

समांतर श्रेणी के योग का उदाहरण

8, 3, -2, ... के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर:

यहाँ a = 8, d = 3 – 8 = -5 और n = 22 है।

हम जानते हैं कि

$S_n = n/2[2a + (n - 1) d]$

अतः $S_{22} = 22/2[2 \times 8 + (22 - 1) (-5)]$

$= 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$

इसलिए, दी हुई A. P. के प्रथम 22 पदों का योग – 979 है।

यदि किसी A. P. के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है तो 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

यहाँ $S_{14} = 1050$, $n = 14$ और $a = 10$ हैं

चूँकि $S_n = n/2[2a + (n - 1) d]$

इसलिए, $1050 = 14/2[20 + 13d]$

अर्थात् $910 = 91d$

अतः $d = 10$

अतः $a_{20} = [10 + (20 - 1) 10] = 200$

अर्थात् 20वाँ पद 200 है।

24, 21, 18, ... के कितने पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो?

यहाँ $a = 24$ तथा $d = 21 - 24 = -3$ है और $S_n = 78$ है। हमें n ज्ञात करना है।

चूँकि $S_n = n/2[2a + (n - 1) d]$

अतः $78 = n/2[2 \times 24 + (n - 1) (-3)] = n/2[51 - 3n]$

$3n^2 - 51n + 156 = 0$

या $n^2 - 17n + 52 = 0$

या $(n - 4)(n - 13) = 0$

अतः $n = 4$ और k 13

n के ये दोनों मान संभव हैं और स्वीकार किए जा सकते हैं।

अतः, पदों की वांछित संख्या या तो 4 है या 13 है।

प्रथम N धन पूर्णांकों का योग

इस प्रकार, प्रथम n धन पूर्णांकों का योग का सूत्र

मान लीजिये $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n$ है

यहाँ $a = 1$ तथा $l = n$ है

इसलिए $S_n = n(1 + n) / 2$ या $S_n = n(n + 1) / 2$

से प्राप्त किया जाता है

समांतर श्रेढ़ी की उपयोगिता

इसका उपयोग पैटर्न के एक सेट को सामान्य बनाने के लिए किया जाता है, जिसे हम अपने दैनिक जीवन में देखते हैं। भोजन की तैयारी, यात्रा के लिए दूरी, समय और लागत का पता लगाना। कारों, ट्रकों, घरों, स्कूली शिक्षा या अन्य उद्देश्यों के लिए ऋण को समझना। खेल को समझना (खिलाड़ी और टीम के आँकड़े होने के नाते)

जैसा कि हमने पहले चर्चा की, अनुक्रम और श्रृंखला हमारे जीवन के विभिन्न पहलुओं में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। वे हमें किसी स्थिति या घटना के परिणाम की भविष्यवाणी, मूल्यांकन और निगरानी करने में मदद करते हैं और निर्णय लेने में हमारी बहुत मदद करते हैं।

किसी A.P. के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 है और उनका गुणनफल 8 है। इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

माना A.P. का प्रथम पद a_1 है तथा सार्व अंतर d है।

इसकिये $a_3 = a_1 + (3 – 1)\ d = a_1 + 2d$

$a_7 = a_1 + 6d$

प्रश्नानुसार

$a_3 + a_7 = a_1 + 2d + a_1 + 6d = 6$

या $a_1 + 4d = 3$ (1)

प्रश्नकी दूसरी शर्त के अनुसार

$a_3 \times a_7 = (a_1 + 2d) \times (a_1 + 6d) = 8$

या $a_1^2 + 8a_1d + 12d^2 = 8$ (2)

समीकरण 1 को इसप्रकार भी लिख सकते हैं $a_1 = 3 – 4d$ इस मान को समीकरण 2 में रखने पर

$(3 – 4d)^2 + 8(3 – 4d)\ d + 12d^2 = 8$

या $d = ½, -1/2$

यह मान समीकरण 1 में रखने पर

a_1 = 1, 5

S_{16} = ½ के लिए प्रथम 16 पदों का योग

$S_{16} = 8[2 + 15 \times ½] = 4[4 + 15] = 76$

यदि a_1 = 5 और d = -½ के लिए प्रथम 16 पदों का योग

$S_{16} = 8[10 + 15 \times -½] = 4[20 – 15] = 20$

अतः S_{16} के दो अलग-अलग मान 76, 20 हैं जो a_1 और d के दो अलग मानों के लिए प्राप्त हुए हैं।

किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिए 7 नकद पुरस्कार देने के लिए रु 700 की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से रु 20 कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न के अनुसार n = 7, d = -20 तथा S_7 = 700, हमें ज्ञात करना है प्रत्येक पुरस्कार की राशि कितनी है।

माना प्रथम पुरस्कार रु a है

इसलिए $S_7 = 7/2[2a + (7 – 1) (-20)] = 700$

या $2a – 120 = 200$

या $a = 320/2 = 160$

इसलिए प्रथम पुरस्कार रु 160 है। इसप्रकार द्वितीय रु 140, तृतीय रु 120, चतुर्थ रु 100, पंचम रु 80, छठा रु 60 तथा सातवाँ रु 40 है।

उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें D = 7 है और 22वाँ पद 149 है।

यहाँ d = 7 और a_{22} = 149

सूत्र के अनुसार $a_n = a_1 + (n – 1) d$

$a_{22} = a_1 + (22 – 1) 7 = 149$

या $a_1 = 149 – 147 = 2$

अब, $S_{22} = 22/2[4 + 21 \times 7] = 11 \times 151 = 1661$

अतः प्रथम 22 पदों का योग 1661 है।

स्मरणीय तथ्य

1. एक समांतर श्रेढ़ी संख्याओं की ऐसी सूची होती है, जिसमें प्रत्येक पद (प्रथम पद के अतिरिक्त) अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या d जोड़कर प्राप्त होता है। यह निश्चित संख्या d इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर कहलाती है। एक A. P. का व्यापक रूप a, a + d, a + 2d, a + 3d, . . . है।

2. संख्याओं की एक दी हुई सूची A. P. होती है, यदि अंतरों $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, . . ., से एक ही (समान) मान प्राप्त हो, अर्थात् k के विभिन्न मानों के लिए $a_k - a_{k-1}$ एक ही हो।

3. प्रथम पद a और सार्व अंतर d वाली A. P. का nवाँ पद (या व्यापक पद) a_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है: $a_n = a + (n - 1) d$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 5.1 (पृष्ठ संख्या 108)

प्रश्न 1 निम्नलिखित स्थिति में से किस स्थिति में संबद्ध संख्याओं की सूची A.P है और क्यों?

(i) प्रत्येक किलों मीटर के बाद टैक्सी का किराया, जबकि प्रथम किलो मीटर के लिए किराया 15 रुपये है और प्रत्येक अतिरिक्त किलो मीटर के लिए किराया 8 रुपये है।

(ii) किसी बेलन (cylinder) में उपस्थित हवा की मात्रा, जबकि वायु निकालने वाला पम्प प्रत्येक बार बेलन की हवा का $\frac{1}{4}$ भाग बाहर निकाल देता है।

(iii) प्रत्येक मीटर की खुदाई के बाद, एक कुआं खोदने में आई लागत, जबकि प्रथम मीटर खुदाई की लागत 150 रुपये है और बाद में प्रत्येक खुदाई की लागत 50 रुपये बढ़ती जाती है।

(iv) खाते में प्रत्येक वर्ष का मिश्रधन, जबकि 10000 रुपये की राशि 8% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा की जाती है।

उत्तर-

(i) प्रथम किलोमीटर का किराया = 15 रुपये

अतिरिक्त किलोमीटर का किराया = 8 रुपये

श्रृंखला- 15, 23, 31, 39 .....

जाँच-

a = 15

$d_1 = a_2 - a_1$

$= 23 - 15 = 8$

$d_2 = a_3 - a_2$

$= 31 - 23 = 8$

$d_3 = a_4 - a_3$

$= 39 - 31 = 8$

चूँकि सभी अंतरों का अंतर सामान है अर्थात सार्वअंतर = 8 है।

इसलिए दिया गया सूची A. P है।

(ii) माना बेलन में हवा की मात्रा 1 है।

$$T_2 = 1$$

$$\text{हवा निकाला} = \frac{1}{4}$$

$$T_2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4-1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\text{हवा निकाला} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$T_3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{16}$$

$$= \frac{12-3}{16}$$

$$= \frac{9}{16}$$

$$\text{हवा निकाला} = \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

$$T_4 = \frac{9}{16} - \frac{9}{64}$$

$$= \frac{36-9}{64}$$

$$= \frac{27}{64}$$

श्रंखला-

$$1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}$$

$$d_1 = \frac{3}{4} - 1$$

$$= \frac{-1}{4}$$

$$d_2 = \frac{9}{16} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{-3}{16}$$

यहाँ सार्व अंतर समान नहीं है इसलिए यह A.P नहीं है।

(iii) प्रथम मीटर का लागत = 150,

दुसरे मीटर खुदाई की लागत = 150 + 50 = 200

तीसरे मीटर खुदाई की लागत = 200 + 50 = 250

श्रृंखला- 150, 200, 250, 300 ....

जाँच-

$a = 150$

$d_1 = a_2 - a_1$

$= 200 - 150 = 50$

$d_2 = a_3 - a_2$

= 250 - 200 = 50

$d_3 = a_4 - a_3$

= 300 - 250 = 50

सार्व अंतर = 50

यहाँ सार्व अंतर समान है इसलिए यह श्रृंखला A.P है

(iv) पहले वर्ष की राशि = 10000

दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $= \frac{10000 \times 8 \times 1}{100} = 800$

दूसरे वर्ष की राशि = 10800

तीसरे वर्ष की राशि = 11664

श्रृंखला- 10000, 10800, 11664 ......

स्पष्ट है कि इस श्रृंखला का सार्व अंतर समान नहीं है अत :A.P नहीं है।

प्रश्न 2 दी हुई A.P के प्रथम चार पद लिखिए, जबकि प्रथम पद a और सार्व अंतर d निम्नलिखित हैं:

(i) a = 10, d = 10
(ii) a = –2, d = 0
(iii) a = 4, d = -3
(iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$
(v) a = -1.25, d = -0.25

उत्तर-

(i) a = 10

$a_2 = a + d$

⇒ 10 + 10

= 20

$a_3 = a + 2d$

⇒ 10 + 2 × 10

= 30

$a_4 = a + 3d$

$\Rightarrow 10 + 3 \times 10$

= 40

श्रृंखला: 10, 20, 30, 40 ......

प्रथम चार पद: 10, 20, 30 और 40

(ii) $a = -2$

$a_2 = a + d$

$\Rightarrow -2 + 0$

= -2

$a_3 = a + 2d$

$\Rightarrow -2 + 2 \times 0$

= -2

$a_4 = a + 3d$

$\Rightarrow -2 + 3 \times 0$

= -2

श्रृंखला: -2, -2, -2, -2 ......

प्रथम चार पद: -2, -2, -2 और- 2

(iii) $a = 4$

$a_2 = a + d$

$\Rightarrow 4 + -3$

= 1

$a_3 = a + 2d$

$\Rightarrow 4 + 2 \times -3$

$= -2$

$a_4 = a + 3d$

$\Rightarrow 4 + 3 \times -3$

$= -5$

श्रृंखला: 4, 1, -3, -5 .....

प्रथम चार पद: 4, 1, -3 और- 5

(iv)

$$a = -1$$

$$a_2 = a + d$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

$$a_3 = a + 2d$$

$$\Rightarrow -1 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 0$$

$$a_4 = a + 3d$$

$$\Rightarrow -1 + 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

श्रृंखला:

$$-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2} \ldots\ldots$$

प्रथम चार पद:

$$-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$$

(v) a = -1.25

$a_2 = a + d$

⇒ -1.25 + -0.25

= -1.5

$a_3 = a + 2d$

⇒ -1.25 + 2 × -0.25

= –1.75

$a_4 = a + 3d$

⇒ -1.25 + 3 × -0.25

= –2

श्रृंखला:

-1.25, -1.5, -1.75, -2 ……

प्रथम चार पद:

-1.25, -1.5, -1.75 और- 2

प्रश्न 3 निम्नलिखित एपी के लिए, पहला शब्द और सामान्य अंतर लिखें:

(i) 3, 1, -1, -3, ...
(ii) -5, -1, 3, 7, ...
(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots..$
(iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, ...

उत्तर-

(i) पहला शब्द 3 और सामान्य अंतर = $a_2 - a_1 = 1 - 3 = -2$ है।
(ii) पहला पद -5 और सामान्य अंतर = $a_2 - a_1 = (-1) - (-5) = 4$ है।
(iii) पहला पद $\frac{1}{3}$ और सामान्य अंतर = $a_2 - a_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
(iv) पहला शब्द 0.6 और सामान्य अंतर $a_2 - a_1 = (1.7) - (0.6) = 1.1$.

प्रश्न 4 निम्नलिखित में से कौन-कौन A.P हैं? यदि कोई A.P है, तो इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए और इनके तीन पद लिखिए।

(i) 2, 4, 8, 16, ...
(ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots..$
(iii) -1.2, -3.2, -5.2, -7.2, ...
(iv) -10, -6, -2, 2, ...
(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$
(vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...
(vii) 0, -4, -8, -12, ...
(viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \ldots.$
(ix) 1, 3, 9, 27, ...
(x) a, 2a, 3a, 4a, ...
(xi) $a, a_2, a_3, a_4, \ldots..$
(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots.$
(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots.$
(xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots.$
(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots.$

उत्तर-

(i) $a_2 - a_1$

$= 4 - 2 = 2$

$a_3 - a_2$

$= 8 - 4 = 4$

$a_4 - a_3$

$= 16 - 8 = 8$

एक के रूप $a_{k+1} - a_k$ एक ही नहीं है, यह एक एपी नहीं है।

(ii)

$$a_2 - a_1$$

$$= \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2$$

$$= 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3$$

$$= \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

एक $_{k+1} - a_k$ एक पूरे में समान है, यह एक AP है जिसका पहला पद = 2 और सामान्य अंतर $= \frac{1}{2}$

अगले तीन पद $4, 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

(iii) $a_2 - a_1 = -3.2 - (-1.2)$

$= -3.2 + 1.2 = -2$

$a_3 - a_2 = -5.2 - (-3.2) = -2$

$a_4 - a_3 = -7.2 - (-5.2) = -2$

चूँकि $a_{k+1} - a_k$ पूरे काल के लिए एक समान है, जिसमें पहले पद) a) = -1.2 और सामान्य अंतर है, (d) = -2

इस प्रकार अगले तीन पद हैं

$a_5 - a_4 + d = -7.2 - 2 = -9.2$

$a_6 - a_5 + d = -9.2 - 2 = -11.2$

$a_7 - a_6 + d = -11.2 - 2 = -13.2$

(iv) $a_2 - a_1 = -6 - (-10) = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - (-6) = 4$

$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 4$

एक $a_{k+1} - a_k$ एक पूरे में समान है, यह एक AP है जिसमें 1 st शब्द- = 10 और सामान्य अंतर, 4 है।

इस प्रकार अगले तीन पद हैं

$a_5 = a_4 + d = 2 + 4 = 6$

$a_6 = a_5 + d = 6 + 4 = 10$

$a_7 = a_6 + d = 10 + 4 = 14$

(v)

Here $a_2 - a_1$

$$= 3 + \sqrt{2} - 3 = \sqrt{2}$$

$a_3 - a_2$

$$= 3 + 2\sqrt{2} - \left(3 + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$$

$a_4 - a_3$

$$= 3 + 2\sqrt{2} - \left(3 + 2\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$$

इस समस्या में, a_{k+1} - a_k इस प्रकार दी गई सूची में से एक ही है के रूप में 3 और सामान्य अंतर) घ (के रूप में $\sqrt{2}$ पद के साथ एक एपी है।

इस प्रकार अगले तीन पद हैं

$a_5 - a_4 + d$

$$= \left(3 + 3\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$$

$$= 3 + 4\sqrt{2}$$

$a_6 - a_5 + d$

$$= \left(3 + 4\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$$

$$= 3 + 5\sqrt{2}$$

$a_7 - a_6 + d$

$$= \left(3 + 5\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$$

$$= 3 + 6\sqrt{2}$$

(vi) यहाँ,

$a_2 - a_1 = 0.22 - 0.2 = 0.02$

$a_3 - a_2 = 0.222 - 0.22 = 0.002$

$a_4 - a_3 = 0.2222 - 0.222 = 0.0002$

इसलिए $a_{k+1} - a_k$ पूरे भर में समान नहीं है, इसलिए यह AP नहीं है

(vii) यहाँ,

$a_2 - a_1 = -4 - 0 = -4$

$a_3 - a_2 = -8 - (-4) = -4$

$a_4 - a_3 = -12 - (-8) = -4$

यहाँ $a_{k+1} - a_k$ पूरे भर में समान है, इसलिए यह $1^{st} = 0$ और सामान्य अंतर- = 4 वाला एक AP है

इस प्रकार अगले तीन पद हैं

$a_5 - a_4 + d = -12 + (-4) = -16$

$a_6 - a_5 + d = -16 + (-4) = -20$

$a_7 - a_6 + d = -20 + (-4) = -24$

(viii)

$a_2 - a_1$

$= -\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = 0$

$a_3 - a_2$

$= -\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = 0$

$a_4 - a_3$

$= -\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = 0$

यहाँ $a_{k+1} - a_k = 0$ पूरे लिस्ट में समान है इसलिए सूची 1st शब्द = $\frac{-1}{2}$ और सामान्य अंतर d = 0।

इस प्रकार अगले तीन पद हैं

$a_5 - a_4 + d$

$= \frac{-1}{2} + 0 = \frac{-1}{2}$

$a_6 - a_5 + d$

$= \frac{-1}{2} + 0 = \frac{-1}{2}$

$a_7 - a_6 + d$

$= \frac{-1}{2} + 0 = \frac{-1}{2}$

(ix) यहाँ 1st term (a) = 1

$a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$

$a_3 - a_2 = 9 - 3 = 6$

$a_4 - a_3 = 27 - 9 = 18$

चूँकि $a_{k+1} - a_k$ समान नहीं है, इसलिए यह एक AP नहीं है

(x) यहाँ,

$a_2 - a_1 = 2a - a = a$

$a_3 - a_2 = 3a - 2a = a$

$a_4 - a_3 = 4a - 3a = a$

चूँकि $a_{k+1} - a_k$ एक समान नहीं है, यह एक AP है जिसका पहला पद = a और सामान्य अंतर =a है

इस प्रकार अगले तीन पद हैं

$a_5 = a_4 + d = 4a + a = 5a$

$a_6 = a_5 + d = 5a + a = 6a$

$a_7 = a_6 + d = 6a + a = 7a$

(xi) यहाँ,

$a_2 - a_1 = a^2 - a = a(a - 1)$

$a_3 - a_2 = a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$

$a_3 - a_2 = a^4 - a^3 = a^3(a - 1)$

चूँकि $a_{k+1} - a_k$ समान नहीं है, इसलिए यह एक AP नहीं है

(xii)

$a_2 - a_1$

$= \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

$a_3 - a_2$

$= \sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

$a_4 - a_3$

$= \sqrt{32} - \sqrt{18} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

चूँकि a_{k+1} - a_k एक समान नहीं है, यह एक AP है जिसका पहला पद $= \sqrt{2}$ और सामान्य अंतर $= \sqrt{2}$ है

इस प्रकार अगले तीन पद हैं

$a_5 = a_4 + d$

$= \sqrt{32} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}$

$a_6 = a_5 + d$

$= 5\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$

$a_7 = a_6 + d$

$= 6\sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 7\sqrt{2}$

(xiii)

यहाँ

$a_2 - a_1$

$= \sqrt{6} - \sqrt{3}$

$= \sqrt{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

$a_3 - a_2$

$= \sqrt{9} - \sqrt{6}$

$= 3 - \sqrt{6}$

$= \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

$a_4 - a_3$

$= \sqrt{12} - \sqrt{9}$

$= 2\sqrt{3} - 3$

$= \sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right)$

चूँकि $a_{k+1} - a_k$ समान नहीं है, इसलिए यह एक AP नहीं है।

(xiv) $a_2 - a_1 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$

$a_3 - a_2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$a_4 - a_3 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$

चूँकि $a_{k+1} - a_k$ समान नहीं है, इसलिए यह एक AP नहीं है

(xv) यहाँ,

$a_2 - a_1 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$

$a_3 - a_2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$

$a_4 - a_3 = 73 - 7^2 = 73 - 49 = 24$

चूँकि $a_{k+1} - a_k$ एक समान नहीं है, यह एक AP है जिसका पहला पद = 1 और सामान्य अंतर =24 है

इस प्रकार अगले तीन पद हैं

$a_5 = a_4 + d$

= 73 + 24

= 97

$a_6 = a_5 + d$

= 97 + 24

= 121

$a_7 = a_6 + d$

= 121 + 24

= 145.

प्रश्नावली 5.2 (पृष्ठ संख्या 116-118)

प्रश्न 1 निम्नलिखित सारणी में, रिक्त स्थानों को भरिए, जहाँ A.P का प्रथम पद a, सार्व अंतर d और nवाँ पद a_n है:

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	–18	. . .	10	0
(iii)	. . .	–3	18	–5
(iv)	–18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

उत्तर-

(i)

a	d	n	a_n
7	3	8	**28**

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_8 = 7 + (8 - 1)3$

$= 7 + 7 \times 3$

$= 7 + 21$

$= 28$

(ii)

a	d	n	a_n
-18	**2**	10	0

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_{10} = -18 + (10 - 1)d$

$0 = -18 + 9d$

$9d = 18$

$d = \frac{18}{9} = 2$

(iii)

a	d	n	a_n
46	-3	18	-5

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_{18} = a + (18 - 1)d$

$-5 = a + 17(- 3)$

$-5 + 51 = a$

a = 46

(iv)

a	d	n	a_n
-18	2.5	**10**	3.6

$a_n = a + (n - 1)d$

$3.6 = -18.9 + (n - 1)2.5$

$3.6 + 18.9 = (n - 1)2.5$

$(n - 1)2.5 = 22.5$

$$n - 1 = \frac{22.5}{2.5}$$

$n = 9 + 1$

$n = 10$

प्रश्न 2 निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए और उसका औचित्य दीजिए:

(i) A.P. 10, 7, 4, ... का 30 वाँ पद है-

a. 97
b. 77
c. -77
d. -87

(ii)

A.P: $-3, -\frac{1}{2}, 2 \ldots\ldots$ का 11 वाँ पद है:

a. 28

b. 22

c. -38

d. $-48\frac{1}{2}$

उत्तर-

(i)

c. -77

हल:-

a = 10, d = 7 - 10 = -3

30 वाँ पद = ?

$a_{30} = a + 29d$

= 10 + 29(-3)

= 10 - 87

= -77

(ii)

b. 22

हल:

$a = -3$

$d = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{-1+6}{2} = \frac{5}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$= -3 + 10\left(\frac{5}{2}\right)$

$= -3 + 25$

$= 22$

प्रश्न 3 निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ी में, रिक्त खानों (boxes) के पदों को ज्ञात कीजिए।

(i) 2, $\square$, 26

(ii) $\square$, 13, $\square$, 3

(iii) 5, $\square$, $\square$, $9\frac{1}{2}$

(iv) -4, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 6

(v) $\square$, 38, $\square$, $\square$, $\square$, -22

उत्तर-

(i)

2, **14**, 26.

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$$= \frac{2+26}{2} = \frac{28}{2}$$

$$= 14$$

(ii) **18**, 13, **8**, 3.

पहले दिए गए एपी के सामान्य शब्द और सामान्य अंतर को क्रमश: a और b होने दें।

दूसरा पद = 13

⇒ a + (2 - 1) d = 13

⇒ a + d = 13 ... (i)

चौथा पद = 3

⇒ a + (4 - 1) d = 3

⇒ a + 3D = 3 ...(ii)

समाधान) i) और) ii), हमें मिलता है

a = 18

d = -5

इसलिए,

तीसरा पद = a + (3 - 1) d

= a + 2d

= 18 + 2(-5)

= 18 - 10 = 8

इसलिए, बक्से में छूटे हुए शब्द 18 और 8 हैं।

(iii)

$$5, 6\frac{1}{2}, 8, 9\frac{1}{2}$$

बता दें कि दिए गए AP का सामान्य अंतर d है।

a = 5

4वें पद $= 9\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 5 + (4 - 1)d = \frac{19}{2}$$

$$\left[\therefore a_n = a + (n - 1)d\right]$$

$$\Rightarrow 3d = \frac{19}{2} - 5$$

$$\Rightarrow 3d = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

इसलिए,

द्वितीय पद $= 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$

और, तीसरा शब्द $= \frac{13}{2} + \frac{3}{2} = 8$

इसलिए, बक्से में छूटे हुए शब्द $6\frac{1}{2}$ और 8.

(iv) 4, **-2**, **2**, **2**, **4**, 6

बता दें कि दिए गए AP का सामान्य अंतर d है।

a = -4

6वें पद = 6

$$\Rightarrow -4 + (6 - 1)d = 6$$

$$\left[\because a_n = a + |n - 1|d\right]$$

$$\Rightarrow -4 + 5d = 6$$

$$\Rightarrow 5d = 6 + 4$$

$$\Rightarrow 5d = 10$$

$$\Rightarrow d = \frac{10}{5}$$

$$\Rightarrow d = 2$$

इसलिए,

दूसरा कार्यकाल- = 4 + 2 = -2

तीसरा पद- = 2 + 2 = 0

चौथा पद = 0 + 2 = 2

और, पांचवां शब्द = 2 + 2 = 4

इसलिए, बक्से में छूटे हुए शब्द हैं

-2, 2, 2, 4

(v) **<u>53</u>**, 38, **<u>23</u>**, **<u>8</u>**, **<u>-7</u>**, -22.

पहले शब्दों और दिए गए A.P. के सामान्य अंतर को क्रमश: और d होने दें।

दूसरा पद = 38

$$\Rightarrow a + (2 - 1)d = 38$$

$$\left[\therefore a_n = a + (n - 1)d\right]$$

⇒ a + d = 38 .... (i)

⇒ छठा पद- = 22

⇒ a + (6 - 1)d = -22

⇒ a + 5d = -22 .... (ii)

समाधान) i) और) ii), हमें मिलता है

a = 53d = -15

इसलिए,

तीसरा कार्यकाल = 53 + (3 - 1)(-15)

$$\left[\therefore a_n = a + (n-1)d\right]$$

= 53 - 30 = 23

चौथा कार्यकाल = 53 + (4 - 1)(-15)

$$\left[\therefore a_n = a + (n-1)d\right] = 8$$

पांचवां कार्यकाल = 53 + (5 - 1)(-15)

$$\left[\therefore a_n = a + (n-1)d\right] = -7$$

इसलिए, बक्से में अनुपलब्ध शब्द हैं

53, 23, 8, -7

प्रश्न 4 A.P. 3, 8, 13, 18, ... का कौन सा पद 78 है?

उत्तर- a = 3,

d = 8 – 3 = 5,

$a_n = 78$

$a_n = a + (n - 1)d$

78 = 3 + (n - 1)5

78 - 3 = (n - 1)5

75 = (n - 1)5

$$n - 1 = \frac{75}{5}$$

$$n - 1 = 15$$

$$n = 15 + 1$$

$$n = 16$$

अत: 16 वाँ पद 78 है।

प्रश्न 5 निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों में से प्रत्येक श्रेढ़ी में कितने पद हैं?

(i) 7, 13, 19, ... , 205

(ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13 \; \ldots\ldots, -47$

उत्तर-

(i) a = 7,

d = 13 - 7 = 6,

a_n = 205

a_n = a + (n - 1)d

205 = 7 + (n - 1)6

205 - 7 = (n - 1)6

198 = (n - 1)6

$$n - 1 = \frac{198}{6}$$

$$n - 1 = 33$$

$$n = 33 + 1$$

$$n = 34$$

इस श्रेढ़ी में 34 पद हैं।

(ii)

$$a = 18,$$

$$d = \frac{31}{2} - 18 = \frac{31-36}{2} = \frac{-5}{2},$$

$$a_n = -47$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$-47 = 18 + (n-1)\frac{-5}{2}$$

$$-47 - 18 = (n-1)\frac{-5}{2}$$

$$-65 = (n-1)\frac{-5}{2}$$

$$n - 1 = -65 \times \frac{-2}{5}$$

$$n - 1 = -13 \times -2$$

$$n = 26 + 1$$

$$n = 27$$

इस श्रेणी में 27 पद है।

प्रश्न 6 क्या A.P., 11, 8, 5, 2 .... का एक पद -150 है? क्यों?

उत्तर- a = 11,

d = 8 - 11 = -3 और a_n = -150

a_n = a + (n - 1)d

-150 = 11 + (n - 1)-3

-150 - 11 = (n - 1)-3

-161 = (n - 1)-3

$$n - 1 = \frac{-161}{-3}$$

$$n - 1 = 53.66$$

$$n = 53.66 + 1$$

$$n = 54.66$$

यहाँ n एक भिन्नात्मक संख्या है जो n के लिए संभव नहीं है

इसलिए- 150 दिए गए A.P का पद नहीं है

प्रश्न 7 उस A.P का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

उत्तर- 31वाँ पद = ?

$a_{11} = 38$

$\Rightarrow a + 10d = 38$ ...... (1)

$a_{16} = 73$

$\Rightarrow a + 15d = 73$ ...... (2)

समी. (2) में से) 1) घटाने पर

a + 15d - (a + 10d)

= 73 - 38

a + 15d - a - 10d

= 35

5d = 35

$d = \frac{35}{5} = 7$

d = 7

समी. (1) में d का मान 7 रखने पर

$a + 10d = 38$

$a = 10(7) = 38$

$a = 38 - 70$

$a = -32$

अब, $a_{31} = a + 30d$

$\Rightarrow a_{31} = -32 + 30(7)$

$\Rightarrow a_{31} = -32 + 210$

$\Rightarrow a_{31} = 178$

अत :31 वाँ पद 178 है|

प्रश्न 8 एक A.P में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर- A.P में 50 पद हैं

अत :$n = 50$

$a_3 = 12$

$\Rightarrow a + 2d = 12$ ...... (1)

और अंतिम पद 106 है।

$a_n = 106$

या $a_{50} = 106$

$\Rightarrow a + 49d = 106$ ...... (2)

समी. (2) में से) 1) घटाने पर

$a + 49d - (a + 2d)$

$= 106 - 12$

$a + 49d - a - 2d$

= 94

47d = 94

$d = \frac{94}{47} = 2$

d = 2

समी. (1) में d का मान 2 रखने पर

a + 2d = 12

a = 2(2) = 12

a = 12 - 4

a = 8

अब, $a_{29} = a + 28d$

$\Rightarrow a_{29} = 8 + 28(2)$

$\Rightarrow a_{29} = 8 + 56$

$\Rightarrow a_{29} = 64$

अत :29 वाँ पद 64 है

प्रश्न 9 यदि किसी A.P के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और -8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा?

उत्तर- $a_3 = 4$

$\Rightarrow a + 2d = 4$ ...... (1)

और नौवा पद- 8 है।

$a_9 = -8$

$\Rightarrow a + 8d = -8$ ...... (2)

समी. (2) में से) 1) घटाने पर

a + 8d - (a + 2d) = -8 - 4

a + 8d - a - 2d = -12

6d = -12

$d = \frac{-12}{6} = -2$

d = -2

समी. (1) में d का मान 2 रखने पर

a + 2d = 4

a = 2(-2) = 4

a = 4 + 4

a = 8

अत :a = 8, और d = -2

माना n वाँ पद शून्य है|

$a_n = 0$

$a_n = a + (n - 1)d$

⇒ 0 = 8 + (n - 1)-2

⇒ -8 = (n - 1)-2

$\Rightarrow n - 1 = \frac{-8}{-2}$

⇒ n - 1 = 4

⇒ n = 4 + 1

= 5

अत :5 वाँ पद शून्य है।

प्रश्न 10 किसी A.P का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- चूँकि 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है।

$\therefore a_{17} - a_{10} = 7$

$\Rightarrow a + 16d - (a + 9d) = 7$

$\Rightarrow a + 16d - a - 9d = 7$

$\Rightarrow 7d = 7$

$\Rightarrow d = 1$

सार्व अंतर = 1

प्रश्न 11 A.P. 3, 15, 27, 39, ... का कौन-सा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा?

उत्तर- $a = 3$,

$d = 15 - 3 = 12$

$a_{54} = a + 53d$

$= 3 + 53(12)$

$= 3 + 636$

$= 639$

वह पद जो 54 वें पद से 132 अधिक होगा

$a_n = a_{54} + 132$

$= 639 + 132$

$= 771$

$a_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow 771 = 3 + (n - 1)12$

$\Rightarrow 771 – 3 = (n - 1)12$

$\Rightarrow 768 = (n - 1)12$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{768}{12}$

$\Rightarrow n - 1 = 64$

$\Rightarrow n = 64 + 1 = 65$

अत :65वाँ पद 54वें पद से 132 अधिक है।

प्रश्न 12 दो समांतर श्रेढ़ियों का सार्व अंतर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अंतर 100 है, तो इनके 1000वें पदों का अंतर क्या होगा?

उत्तर- माना प्रथम A.P का प्रथम पद = a

और दुसरे A.P का प्रथम पद = a′ है |

और सार्व अंतर d है] चूँकि सार्व अंतर समान है [दिया है

प्रश्नानुसार,

$a_{100} - a'_{100} = 100$

$a + 99d - (a' + 99d) = 100$

$a + 99d - a' - 99d = 100$

$a - a' = 100$ .... (1)

$a_{1000} - a'_{1000} = a + 999d - (a' + 999d)$

$= a + 999d - a' - 999d$

$= a + a'$

चूँकि $a + a' = 100$ है समी. (1) से

इसलिए, 1000वें पदों का अंतर भी 100 है।

प्रश्न 13 तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

उत्तर- तीन अंको की संख्या 100 .... 999 के बीच होती है |

अत :7 से विभाज्य संख्यायें है

105, 112, 119, ... 994

इससे हमें एक A.P प्राप्त होता है |

$\therefore$ a = 105, d = 7 और a_n = 994

$a_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow 994 = 105 + (n - 1)7$

$\Rightarrow 994 - 105 = (n - 1)7$

$\Rightarrow 889 = (n - 1)7$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{889}{7}$

$\Rightarrow n - 1 = 127$

$\Rightarrow n = 127 + 1 = 128$

अत :तीन अंकों वाली 7 से विभाज्य संख्या 128 हैं

प्रश्न 14 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं?

उत्तर- 10 और 250 के बीच 4 के गुणज के लिए A.P है

12, 16, 20, ... 248

$\therefore$ a = 12, d = 4 और a_n = 248

$a_n = a + (n - 1)\, d$

$\Rightarrow 248 = 12 + (n - 1)4$

$\Rightarrow 248 - 12 = (n - 1)4$

$\Rightarrow 236 = (n - 1)4$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{236}{4}$

$\Rightarrow n - 1 = 59$

$\Rightarrow n = 59 + 1 = 60$

10 और 250 के बीच 4 के गुणजों की संख्या 60 हैं।

प्रश्न 15 n के किस मान के लिए, दोनों समांतर श्रेढ़ियों 63, 65, 67, ... और 3, 10, 17, ... के n वें पद बराबर होंगे?

उत्तर- प्रथम A.P: 63, 65, 67, ...

जिसमें, a = 63, d = 65 - 63 = 2

$a_n = a + (n - 1)d$

$= 63 + (n - 1)2$

$= 63 + 2n - 2$

$= 61 + 2n$ .... (1)

द्वितीय A.P: 3, 10, 17, ...

जिसमें, a = 3, d = 10 - 3 = 7

$a_n = a + (n - 1)d$

$= 3 + (n - 1)7$

$= 3 + 7n - 7$

$= -4 + 7n$ .... (1)

चूँकि n वाँ पद बराबर हैं, इसलिए) 1) तथा) 2) से

$61 + 2n = -4 + 7n$

$61 + 4 = 7n - 2n$

$5n = 65$

$n = \frac{65}{5}$

$n = 13$

अत :दोनों A.P का 13 वाँ पद बराबर हैं।

प्रश्न 16 वह A.P. ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है।

उत्तर- माना प्रथम पद = a, और सार्व अंतर = d तो,

$a_3 = 16$

$a + 2d = 16$ .... (1)

$a_7 - a_5 = 12$

$\Rightarrow a + 6d - (a + 4d) = 12$

$\Rightarrow a + 6d - a - 4d = 12$

$\Rightarrow 2d = 12$

$\Rightarrow d = 6$

अब d का मान समीकरण) 1) में रखने पर'

$a + 2d = 16$

$a + 2(6) = 16$

$a + 12 = 16$

$a = 16 - 12$

$a = 4$

$a, a + d, a + 2d, a + 3d$ ......

$\Rightarrow 4, 4 + 6, 4 + 2(6), 4 + 3(6)$, ...

अत :अभीष्ट A.P $\Rightarrow$ 4, 10, 16, 22 ...

प्रश्न 17 A.P. 3, 8, 13, ..., 253 में अंतिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया गया A.P. 3, 8, 13, ..., 253 है

प्रथम पद की ओर से $a = 3, d = 8 - 3 = 5$

परन्तु अंतिम पद से $a = 253, n = 20$,

और सार्व अंतर d = -5, [चूँकि अंतिम पद से d का मान ऋणात्मक हो जायेगा[

$a_{20} = a + 19d$

= 253 + 19(-5)

= 253 - 95

= 158

अत :अंतिम पद से 20 वाँ पद 158 है।

प्रश्न 18 किसी A.P. के चौथे और 8वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है। इस A.P. के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $a_4 + a_8 = 24$

या a + 3d + a + 7d = 24

या 2a + 10d = 24

या 2(a + 5d) = 24

या $a + 5d = \frac{24}{2} = 12$

या a + 5d = 12 .... (1)

इसी प्रकार,

$A_6 + a_{10} = 44$

या a + 5d + a + 9d = 44

या 2a + 14d = 44

या 2(a + 7d) = 44

या $a + 7d = \frac{44}{2} = 22$

या a + 7d = 22 ...(2)

समीकरण) 2) में से) 1) घटाने पर

$(a + 7d) - (a + 5d) = 22 - 12$

या $a + 7d - a - 5d = 10$

या $2d = 10$

या $d = 5$

समीकरण) 1) में $d = 5$ रखने पर

$a + 5(5) = 12$

या $a + 25 = 12$

या $a = 12 - 25$

या $a = -13$

अत :A.P. के प्रथम 3 पद है:

$-13, -13 + 5, -13 + 2(5)$

$-13, -8, -3$

प्रश्न 19 सुब्बा राव ने 1995 में D 5000 के मासिक वेतन पद कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन D 7000 हो गया?

उत्तर- दिए गए सुचना से हमें एक A.P प्राप्त होता है

A.P: 5000, 5200, 5400, ... 7000

$a = 5000, d = 200, a_n = 7000$

$a_n = a + (n - 1)d$

$7000 = 5000 + (n - 1)200$

$7000 – 5000 = (n - 1)200$

$2000 = (n - 1)200$

$$(n-1) = \frac{2000}{200}$$

n - 1 = 20

n = 20 + 1

n = 21 वर्ष

अत :21 वर्ष बाद उसका वेतन 7000 हो जायेगा।

1995 + 21 = 2016 में हो जायेगा।

प्रश्न 20 रामकली ने किसी वर्ष के प्रथम सप्ताह में D 5 की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत D 1.75 बढ़ाती गई। यदि n वें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत D 20.75 हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिए।

उत्तर- इस सुचना से एक A.P प्राप्त होती है

A.P: 5, 6.75, 8.50, ..., 20.75

A = 5, d = 1.75, a_n = 20.75

$a_n = a + (n - 1)d$

20.75 = 5 + (n - 1)1.75

20.75 - 5 = (n - 1)1.75

15.75 = (n - 1)1.75

$(n - 1) = \frac{15.75}{1.75}$

n - 1 = 9

n = 9 + 1

n = 1

प्रश्नावली 5.3 (पृष्ठ संख्या 124-126)

प्रश्न 1 निम्नलिखित समांतर श्रेढियों का योग ज्ञात कीजिए-

(i) 2, 7, 12, ..., 10 पदों तक
(ii) -37, -33, -29, ... , 12 पदों तक
(iii) 0.6, 1.7, 2.8, ... , 100 पदों तक

(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots\ldots\ldots\ldots$, 11 पदों तक

उत्तर-

(i) a = 2,

d = 7 - 2 = 5,

n = 10

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2 \times 2 + (10-1)5\right]$$

$$= 5(4 + 9 \times 5)$$

$$= 5(4 + 45)$$

$$= 5(49)$$

$$= 245$$

(ii) a = -37,

d = -33 - (-37) = -33 + 37 = 4,

n = 12

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left[-37 \times 2 + (12-1)4\right]$$

$$= 6(-74 + 11 \times 4)$$

$$= 6(-74 + 44)$$

$$= 6(-30)$$

$$= -180$$

(iii) a = 0.6,

d = 1.7 - 0.6 = 1.1,

n = 100,

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$S_{100} = \frac{100}{2}\left[0.6 \times 2 + (100-1)1.1\right]$$

$$= 50(1.2 + 99 \times 1.1)$$

$$= 50(1.2 + 108.9)$$

$$= 50(110.1)$$

$$= 5505$$

(iv)

$$a = \frac{1}{15},$$

$$d = \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{5-4}{60} = \frac{1}{60},$$

$$n = 11$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$S_{11} = \frac{11}{2}\left[2 \times \frac{1}{15} + (11-1)\frac{1}{60}\right]$$

$$= \frac{11}{2}\left(\frac{2}{15} + 10 \times \frac{1}{60}\right)$$

$$= \frac{11}{2}\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{11}{2}\left(\frac{4+5}{30}\right)$$

$$= \frac{11}{2} \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{33}{20}$$

प्रश्न 2 नीचे दिए हुए योगफालों को ज्ञात कीजिये-

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots\ldots + 84$

(ii) 34 + 32 + 30 + ... + 10

(iii) -5 + (-8) + (-11) + ... + (-230)

उत्तर-

(i)

$a = 7,$

$d = \frac{21}{2} - 7 = \frac{7}{2},$

$a_n = 84$

$a_n = a + (n-1)d$

$84 = 7 + (n-1)\frac{7}{2}$

$84 - 7 = (n-1)\frac{7}{2}$

$77 = (n-1)\frac{7}{2}$

$n - 1 = 77 \times \frac{7}{2}$

$n - 1 = 22$

$n = 22 + 1$

$n = 23$

$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$S_{23} = \frac{23}{2}\left[2 \times 7 + (23-1)\frac{7}{2}\right]$

$= \frac{23}{2}\left[14 + 22 \times \frac{7}{2}\right]$

$= \frac{23}{2}(14 + 77)$

$= \frac{23}{2}(91)$

$= \frac{2093}{2}$

$= 1046\frac{1}{2}$

(ii) a = 34,

d = 32 - 34 = -2,

a_n = 10

a_n = a + (n -1)d

10 = 34 + (n - 1)-2

10 - 34 = (n - 1)-2

-24 = (n - 1)-2

$$n - 1 = \frac{-24}{-2}$$

$$n - 1 = 12$$

$$n = 12 + 1$$

$$n = 13$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times 34 + (13 - 1) - 2\right]$$

$$= \frac{13}{2}(68 - 24)$$

$$= \frac{13}{2}(44)$$

$$= 13 \times 22$$

$$= 286$$

(iii) a = –5,

d = (-8) - (-5) = -8 + 5 = -3,

$a_n = -230$

$a_n = a + (n - 1)d$

$-230 = -5 + (n - 1)-3$

$-230 + 5 = (n - 1)-3$

$-225 = (n - 1)-3$

$$n - 1 = \frac{-225}{-3}$$

$$n - 1 = 75$$

$$n = 75 + 1$$

$$n = 76$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right]$$

$$S_{13} = \frac{76}{2}\left[2 \times -5 + (76 - 1) - 3\right]$$

$$= \frac{76}{2}\left[(-10 + 75(-3) - 24\right]$$

$$= 38(-235)$$

$$= -8930$$

प्रश्न 3 एक A.P. में,

(i) $a = 5$, $d = 3$ और $a_n = 50$ दिया है। n और S_n ज्ञात कीजिए।
(ii) $a = 7$ और $a_{13} = 35$ दिया है। d और S_{13} ज्ञात कीजिए।
(iii) $a_{12} = 37$ और $d = 3$ दिया है। a और S_{12} ज्ञात कीजिए।
(iv) $a_3 = 15$ और $S_{10} = 125$ दिया है। d और a_{10} ज्ञात कीजिए।
(v) $d = 5$ और $S_9 = 75$ दिया है। a और a_9 ज्ञात कीजिए।
(vi) $a = 2$, $d = 8$ और $S_n = 90$ दिया है। n और a_n ज्ञात कीजिए।

(vii) $a = 8$, $a_n = 62$ और $S_n = 210$ दिया है। n और d ज्ञात कीजिए।

(viii) $a_n = 4$, $d = 2$ और $S_n = -14$ दिया है। n और a ज्ञात कीजिए।

(ix) $a = 3$, $n = 8$ और $S = 192$ दिया है। d ज्ञात कीजिए।

(x) $l = 28$, $S = 144$ और कुल 9 पद हैं। a ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) $an = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow 50 = 5 + (n - 1)3$

$\Rightarrow 50 - 5 = (n - 1)3$

$\Rightarrow 45 = (n - 1)3$

$$\Rightarrow (n - 1) = \frac{45}{3} = 15$$

$\Rightarrow n = 15 + 1$

$\Rightarrow n = 16$

S_n जहाँ $n = 16$ है तो

$$S_{16} = \frac{16}{2}\left[2(5) + (16 - 1)3\right]$$

$$= 8\left[10 + (15)3\right]$$

$$= 8\left[10 + 45\right]$$

$$= 8 \times 55$$

$$= 440$$

अतः $n = 16$ और $S_n = 440$ है।

(ii)

$a = 7,$

$a_{13} = 35$

$a_{13} = a + 12d$

$35 = 7 + 12d$

$12d = 35 - 7$

$12d = 28$

$d = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$

अब, $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times 7 + (13-1)\frac{7}{3}\right]$

$= \frac{13}{2}\left[14 + (12)\frac{7}{3}\right]$

$= \frac{13}{2}\left[14 + 4 \times 7\right]$

$$= \frac{13}{2}\left[14 + 28\right]$$

$$= \frac{13}{2} \times 42$$

$$= 13 \times 21$$

$$= 273$$

अतः $d = \frac{7}{3}$ और $S_{13} = 273$ है।

(iii) $a_{12} = 37$ और $d = 3$ दिया है।

$\Rightarrow a + 11d = a_{12}$

$\Rightarrow a + 11(3) = 37$

$\Rightarrow a + 33 = 37$

$\Rightarrow a = 37 - 33$

$\Rightarrow a = 4$

अब, $S_{12} = \frac{12}{2}[2a + 11d]$

$$= 6[2 \times 4 + 11 \times 3]$$

$$= 6[8 + 33]$$

$$= 6[41]$$

$$= 246$$

अतः $a = 4$ और $S_{12} = 246$ है।

(iv) $a_3 = 15$ और $S_{10} = 125$ दिया है।

$a + 2d = a_3$

$a + 2d = 15 \ldots\ldots (i)$

$S_{10} = 125$

$\frac{10}{2}[2a + 9d] = 125$

$5[2a + 9d] = 125$

$[2a + 9d] = \frac{125}{5}$

$2a + 9d = 25 \ldots\ldots\ (ii)$

प्रतिस्थापन विदी से समीकरण) i) और) ii) का हल करने पर समीकरण) i) से

a + 2d = 15

⇒ a = 15 - 2d

अब a का मान समीकरण) ii) में रखने पर

⇒ 2a + 9d = 25

⇒ 2(15 - 2d) + 9d = 25

⇒ 30 - 4d + 9d = 25

⇒ 5d = 25 -30

⇒ 5d = -5

⇒ d = -1

d का मान समीकरण) i) में रखने पर

⇒ a = 15 - 2(-1)

⇒ a = 15 + 2

⇒ a = 17

$a_{10} = a + 9d$

$= 17 + 9(-1)$

$= 17 - 9$

$= 8$

अतः $d = -1$ और $a_{10} = 8$ है।

(v) $d = 5$ और $S_9 = 75$ दिया है

$S_9 = 75$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}\left[2a + 8d\right] = 75$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}\left[2a + 8 \times 5\right] = 75$$

$$\Rightarrow 2a + 40 = 75 \times \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow 2a + 40 = 25 \times \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2a + 40 = \frac{50}{3}$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{50}{3} - 40$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{50-120}{3}$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{-70}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-35}{3}$$

$$a_9 = a + 8d$$

$$\Rightarrow \frac{-35}{3} + 40$$

$$\Rightarrow \frac{-35+120}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{85}{3}$$

अतः $a = \frac{-35}{3}$ और $a_9 = \frac{85}{3}$ है।

(vi) a = 2, d = 8 और S_n = 90 दिया है।

$S_n = 90$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = 90$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2(2) + (n-1)8\right] = 90$$

$\Rightarrow n[4 + (8n - 8)] = 180$

$\Rightarrow n[8n - 4] = 180$

$\Rightarrow 8n^2 - 4n - 180 = 0$

$\Rightarrow 2n^2 - n - 45 = 0$

$\Rightarrow 2n^2 - 10n + 9n - 45 = 0$

$\Rightarrow 2n(n - 5) + 9(n - 5) = 0$

$\Rightarrow (n - 5)(2n + 9) = 0$

$\Rightarrow (n - 5) = 0, (2n + 9) = 0$

$\Rightarrow n = 5$ और $2n = -9$

$\Rightarrow n = 5$ और $n = \frac{-9}{2}$

अतः n = 5

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_5 = 2 + (5 - 1)8$

$a_5 = 2 + (4)8$

$a_5 = 2 + 32$

$a_5 = 34$

अतः $n = 5$ और $a_5 = 34$

(vii) $a = 8$, $a_n = 62$ और $S_n = 210$ दिया है।

$S_n = 210$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(a + 1) = 210$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(8 + 62) = 210$$

$$\Rightarrow n(70) = 210 \times 2$$

$$\Rightarrow n = \frac{210 \times 2}{70}$$

$\Rightarrow n = 3 \times 2$

$\Rightarrow n = 6$

$a_n = 62$

$a_n = a + (n - 1)d = 62$

$\Rightarrow 8 + (6 - 1)d = 62$

$\Rightarrow 5d = 62 - 8$

$\Rightarrow 5d = 54$

$$\Rightarrow d = \frac{54}{5}$$

अतः अंतिम पद = 62 और सार्वअंतर $= \frac{54}{5}$

(viii) $a_n = 4$

$\Rightarrow a + (n - 1)2 = 4$

$\Rightarrow a + 2n - n = 4$

$\Rightarrow a + 2n = 4 + 2$

$\Rightarrow a = 6 - 2n$ .....(i)

अब, $S_n = -14$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right] = -14$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2(6 - 2n) + (n - 1)2\right] = -14$$

$\Rightarrow n[2(6 - 2n) + (n - 1)2] = -28$

$\Rightarrow n[12 - 4n + 2n - 2] = -28$

$\Rightarrow n[10 - 2n] = -28$

$\Rightarrow 10n - 2n^2 = -28$

$\Rightarrow 2n^2 - 10n - 28 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 5n - 14 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 7n + 2n - 14 = 0$

$\Rightarrow n(n - 7) + 2(n - 7) = 0$

$\Rightarrow (n - 7)(n + 2) = 0$

$\Rightarrow (n - 7) = 0, (n + 2) = 0$

$\Rightarrow n = 7$ और $n = -2$ (not applicable क्योंकि n हमेशा धनात्मक होता है(

अतः $n = 7$

$n = 7$ का मान) i) में रखने पर

a = 6 - 2n .... (i)

a = 6 - 2(7)

a = 6 - 14

a = -8

अतः n = 7 और n = -8 है।

(ix) a = 3, n = 8 और S = 192 दिया है।

चूँकि $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$\Rightarrow 192 = \frac{8}{2}(3 + a_n)$

$\Rightarrow 192 = 4(3 + a_n)$

$\Rightarrow (3 + a_n) = \frac{192}{4}$

$\Rightarrow (3 + a_n) = 48$

$\Rightarrow a_n = 48 - 3$

$\Rightarrow a_n = 45$

अब, a + (n - 1)d = 45

⇒ 3 + 7d = 45

$\Rightarrow$ 7d = 45 - 3

$\Rightarrow$ 7d = 42

$$\Rightarrow d = \frac{42}{7}$$

$$\Rightarrow d = 6$$

अतः d = 6 है।

(x)

$$S_n = \frac{n}{2}(a + 1)$$

$$\Rightarrow 144 = \frac{9}{2}(a + 28)$$

$$\Rightarrow (a + 28) = 144 \times \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow (a + 28) = 16 \times 2$$

$$\Rightarrow (a + 28) = 32$$

$$\Rightarrow a = 32 - 28$$

$$\Rightarrow a = 4$$

अतः a = 4 है।

प्रश्न 4 636 योग प्राप्त करने के लिए, A.P. 9, 17, 25 .... के कितने पद लेने चाहिए?

उत्तर- दिया है : A.P. 9, 17, 25 ....

a = 9, d = 17 – 9 = 8, S_n = 636 और n = ?

अब, S_n = 636

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]=636$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2(9)+(n-1)8\right]=636$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[18+8n-8]=636$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[18+8n-8]=636$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[10+8n]=636$$

$$\Rightarrow n[10+8n]=1272$$

$$\Rightarrow 10n+8n^2=1272$$

$$\Rightarrow 10n+8n^2-1272=0$$

$$\Rightarrow 8n^2+10n-1272=0$$

$$\Rightarrow 4n^2+5n-636=0$$

$$\Rightarrow 4n^2+53n-48n-636=0$$

$$\Rightarrow n(4n+53)-12(4n-53)=0$$

$$\Rightarrow (4n+53)(n-12)=0$$

$\Rightarrow n = \frac{-53}{4}$, (लागू नहीं, क्योकि हमेशा धनात्मक होता है।)

अतः n = 12 पद लेंगे।

प्रश्न 5 किसी A.P. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है- $a = 5, a_n = 45$ और $S_n = 400$

अब, $a_n = 45$

$\Rightarrow a + (n - 1)d = 45$

$\Rightarrow 5 + (n - 1)d = 45$

$\Rightarrow (n - 1)d = 45 – 5$

$$\Rightarrow d = \frac{40}{n-1} \ldots . \text{(i)}$$

अब, $S_n = 400$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = 400$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2(5) + (n-1)\left(\frac{40}{n-1}\right)\right] = 400$$ (समीकरण (i) से)

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[10 + 40] = 400$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} \times 50 = 400$$

$$\Rightarrow 25n = 400$$

$$\Rightarrow n = \frac{400}{25} = 16$$

समीकरण (i) n = 16 रखने पर

$$d = \frac{40}{n-1} \ldots . \text{(i)}$$

$$= \frac{40}{16-1}$$

$$= \frac{40}{15}$$

$$= \frac{8}{3}$$

पदों को संख्या 16 और सार्व $\frac{8}{3}$ अंतर है।

प्रश्न 6 किसी A.P. के प्रथम और अंतिम पद क्रमशः 17 और 350 हैं। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं और इनका योग क्या है?

उत्तर- $a_1 = 17$, $a_n = 350$ और $d = 9$

अब, $a_n = 350$

$\Rightarrow a + (n - 1)d = 350$

$\Rightarrow 17 + (n - 1)9 = 350$

$\Rightarrow (n - 1)9 = 350 - 17$

$\Rightarrow (n - 1)9 = 333$

$$\Rightarrow n - 1 = \frac{333}{9}$$

$\Rightarrow n - 1 = 37$

$\Rightarrow n = 37 + 1$

$\Rightarrow n = 38$

अतः पदो की संख्या 38 है।

$$S_n = \frac{n}{2}(a) + a_n$$

$$= \frac{38}{2}(17 + 350)$$

$$= 19 \times 367$$

$$= 6973$$

इन 38 पदों का योग 6973 है।

प्रश्न 7 एक A.P. में, a = 8, a_n = 62 और S_n = 210 दिया है। n और d ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है-

a_{22} = 149 d = 7 और n = 22

a_{22} = a + 21d

149 = a + 21×7

149 = a + 147

a = 149 – 147

a = 2

$$S_{22} = \frac{22}{2}(a + a_n)$$

$$= 11(2 + 149)$$

$$= 11 \times 151$$

$$= 1661$$

A.p. के प्रथम 22 पदों का योग 1661 है।

प्रश्न 8 उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।

उत्तर- दिया है-

$a_2 = 14$

$\Rightarrow a + d = 14$ .... (i)

$a_3 = 18$

$d = a_3 - a_2$

$= 18 - 14$

$= 4$

d का मान समीकरण) i) में रखने पर

$\Rightarrow a + d = 14$

$\Rightarrow a + 4 = 14$

$\Rightarrow a = 14 - 4$

$\Rightarrow a = 10$

योगफल के सूत्र से

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$S_{51} = \frac{51}{2}\left[2(10) + (51-1)4\right]$$ जहाँ n = 51

$$= \frac{51}{2}\left[20 + (50)4\right]$$

$$= \frac{51}{2}[20 + 200]$$

$$= \frac{51}{2}[220]$$

$$= 21 \times 110$$

$$= 5610$$

अतः प्रथम 51 पदों का योग 5610 है।

प्रश्न 9 यदि किसी A.P. के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है-

प्रथम 7 पदों का योग 49 है।

अतः $S_7 = 49$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}\left[2a + (7 - 1)d\right] = 49$$

$$\Rightarrow 2a + 6d = 49 \times \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow 2(a + 3d) = 7 \times 2$$

$$\Rightarrow a + 3d = 7 \ldots\ldots (i)$$

अब, प्रथम 17 पदों का योग 289 है

अतः $S_{17} = 289$

$$\Rightarrow \frac{17}{2}\left[2a + (17-1)d\right] = 289$$

$$\Rightarrow 2a + 16d = 289 \times \frac{2}{17}$$

$$\Rightarrow 2(a + 8d) = 17 \times 2$$

$$\Rightarrow a + 8d = 17 \ldots\ldots (ii)$$

समीकरण (ii) में से (i) घटाने पर (विलोपन विधि)

$$\begin{array}{rcll} a + 8d & = & 17 & \ldots\ldots\ldots\ldots (ii) \\ a + 3d & = & 7 & \ldots\ldots\ldots\ldots (i) \\ (-) \quad (-) & & (-) & \\ \hline 5d & = & 10 & \end{array}$$

$$\Rightarrow d = \frac{10}{5}$$

$$\Rightarrow d = 2$$

d का मान समीकरण (i) में रखने पर

$\Rightarrow a + 3d = 7$

$\Rightarrow a + 3(2) = 7$

$\Rightarrow a + 6 = 7$

⇒ a = 7 - 6

⇒ a = 1

n पदों का योग के लिए

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2(1) + (n-1)2\right]$$

$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$

$$= \frac{n}{2} \times 2n$$

$$= n^2$$

अतः इस A.P के प्रथम n पदों का योग n^2 है।

प्रश्न 10 दर्शाइए कि $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ से एक A.P. बनती है, यदि a_n नीचे दिए अनुसार परिभाषित है:

(i) $a_n = 3 + 4n$
(ii) $a_n = 9 - 5n$

साथ ही, प्रत्येक स्थिति में, प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) $a_n = 3 + 4n$

n = 1 रखने पर

$a_1 = 3 + 4(1)$

= 3 + 4

= 7

n = 2 रखने पर

$a_2 = 3 + 4(2)$

$= 3 + 8$

$= 11$

n = 3 रखने पर

$a_3 = 3 + 4(3)$

$= 3 + 12$

$= 15$

अतः प्राप्त A.P. 7, 11, 15 .... , 3 + 4n

अब, A = 7, d = 11 - 7 = 4

प्रथम 15 पदों का योग $S_{15} = \frac{15}{2}\left[2a + (15-1)d\right]$

$$= \frac{15}{2}\left[2(7) + (14)4\right]$$

$$= \frac{15}{2}[14 + 56]$$

$$= \frac{15}{2}[70]$$

$$= 15 \times 35$$

$$= 525$$

अतः प्रथम 15 पदों का योग 525 है।

(ii) $a_n = 9 - 5n$

n = 1 रखने पर

$a_1 = 9 - 5(1)$

$= 9 - 5$

= 4

n = 2 रखने पर

$a_2 = 9 - 5(2)$

= 9 - 10

= -1

n = 3 रखने पर

$a_3 = 9 - 5(3)$

= 9 - 15

= -6

अतः प्राप्त A.P. 4, -1, -6 .... , 9 - 5n

अब, A = 4, d = -1 - 4 = -5

प्रथम 15 पदों का योग $S_{15} = \frac{15}{2}\left[2a + (15 - 1)d\right]$

$$= \frac{15}{2}\left[2(4) + (14) - 5\right]$$

$$= \frac{15}{2}\left[8 + (-70)\right]$$

$$= \frac{15}{2}[-62]$$

$$= 15 \times -31$$

$$= -465$$

अतः प्रथम 15 पदों का योग -465 है।

प्रश्न 11 यदि किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इसका प्रथम पद (अर्थात् S_1) क्या है? प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी प्रकार, तीसरे, 10वें और nवें पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है

$S_n = 4n - n^2$ .... (i)

n की जगह n - 1 रखने पर

$S_{n-1} = 4(n - 1) - (n - 1)^2$

$= 4n - 4 - (n^2 - 2n + 1)$

$= 4n - 4 - n^2 + 2n - 1$

$= -n^2 + 6n - 5$............... (ii)

अत :n वाँ पद) $a_n) = S_n - S_{n-1}$

=> $(a_n) = S_n - S_{n-1}$

हल: प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है

$S_n = 4n - n^2$ .... (i)

n की जगह n – 1 रखने पर

$S_{n-1} = 4(n - 1) - (n - 1)^2$

$= 4n - 4 - (n^2 - 2n + 1)$

$= 4n - 4 - n^2 + 2n - 1$

$= -n^2 + 6n - 5$ .... (ii)

अत :n वाँ पद) $a_n) = S_n - S_{n-1}$

$\Rightarrow (a_n) = S_n - S_{n-1}$

$\Rightarrow (a_n) = 4n - n^2 - (-n^2 + 6n - 5)$

$\Rightarrow (a_n) = 4n - n^2 + n^2 - 6n + 5$

$\Rightarrow (a_n) = -2n + 5$

अब, $S_1 = 4(1) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$

प्रथम दो पदों का योग) $S_2) = 4(2) - (2)^2 = 8 - 4 = 4$

$(a_n) = -2n + 5$

दूसरा पद) $a_2) = -2(2) + 5 = -4 + 5 = 1$

तीसरा पद) $a_3) = -2(3) + 5 = -6 + 5 = -1$

10 वाँ पद) $a_{10}) = -2(10) + 5 = -20 + 5 = -15$

$(a_n) = 4n - n^2 - (-n^2 + 6n - 5)$

$\Rightarrow (a_n) = 4n - n^2 + n^2 - 6n + 5$

$\Rightarrow (a_n) = -2n + 5$

अब, $S_1 = 4(1) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$

प्रथम दो पदों का योग) $S_2) = 4(2) - (2)^2 = 8 - 4 = 4$

$(a_n) = -2n + 5$

दूसरा पद) $a_2) = -2(2) + 5 = -4 + 5 = 1$

तीसरा पद) $a_3) = -2(3) + 5 = -6 + 5 = -1$

10 वाँ पद) $a_{10}) = -2(10) + 5 = -20 + 5 = -15$

प्रश्न 12 ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं।

उत्तर- प्रथम 6 से विभाज्य धन पूर्णांक

6, 12, 18, 24, ... 40 पदों तक

$a = 6, d = 12 - 6 = 6$ और $n = 40$

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2a + 39d]$$

$$= 20[2(6) + 39(6)]$$

$$= 20[12 + 234]$$

$$= 20[246]$$

$$= 4920$$

अतः 6 से विभाज्य प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग 4920 है।

प्रश्न 13 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर- 8 के गुणज :8, 16, 24, 32, ...

अतः a = 8, d = 8 n -15

$$S_{15} = \frac{15}{2}[2a + 14d]$$

$$= \frac{15}{2}[2(8) + 14(8)]$$

$$= \frac{15}{2}[16 + 112]$$

$$= \frac{15}{2}[128]$$

$$= 15 \times 64$$

$$= 960$$

अतः 8 के प्रथम 15 गुणजों का योगफल 960 है।

प्रश्न 14 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर- 0 और 50 के बीच की विषम संख्या:

1, 3, 5, 7, ... 49.

अतः a = 1, d = 3 - 1 = 2

और $a_n = 49$

$\Rightarrow a + (n - 1)d = 49$

$\Rightarrow 1 + (n - 1)2 = 49$

$\Rightarrow (n - 1)2 = 49 – 1$

$$\Rightarrow (n-1) = \frac{48}{2}$$

$$\Rightarrow n-1 = 24$$

$$\Rightarrow n = 24 + 1 = 25$$

$$S_{25} = \frac{25}{2}\left[2a + 24d\right]$$

$$= \frac{25}{2}\left[2(1) + 24(2)\right]$$

$$= \frac{25}{2}[2 + 48]$$

$$= \frac{25}{2}[50]$$

$$= 25 \times 25$$

$$= 625$$

0 और 50 के बीच की विषम संख्याओ का योग 625 है।

प्रश्न 15 निर्माण कार्य से सम्बन्धी किसी ठेके में, एक निश्चित तिथि के बाद कार्य को विलंब से पूरा करने के लिए, जुर्माना लगाने का प्रावधन इस प्रकार है: पहले दिन के लिए 200 रुपये, दूसरे दिन के लिए 250 रुपये, तीसरे दिन के लिए 300 रुपये इत्यादि, अर्थात् प्रत्येक उतरोत्तर दिन का जुर्माना अपने से ठीक पहले दिन के जुर्माने से 50 रुपये अधिक है। एक ठेकेदार को जुर्माने के रूप में कितनी राशि अदा करनी पड़ेगी, यदि वह इस कार्य में 30 दिन का विलंब कर देता है?

उत्तर- जुर्माने की राशि से A.P के रूप में व्यक्त करने पर

200, 250, 300, 350, ... 30

अतः a = 200, d = 250 - 200 = 50 n = 30 दिनों तक

30 में अदा की गई जुर्माने की राशि

$$S_{30} = \frac{30}{2}[2a + 29d]$$

$$= \frac{30}{2}\left[2(200) + 29(50)\right]$$

$$= 15(400 + 1450)$$

$$= 15(1850)$$

$$= 27750$$

अतः 30 दिनों में जुर्माने के रूप में दी गई राशि रूपये 27750 है।

प्रश्न 16 किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिए 7 नकद पुरस्कार देने के लिए 700 रूपये की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से 20 रूपये कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है-

n = 7, S_7 = 700 और d = -20

माना प्रथम पुरस्कार a है, तो

S_7 = 700

$$\Rightarrow \frac{7}{2}[2a + 6d] = 700$$

$$\Rightarrow \left[2a + 6(-20)\right] = 700 \times \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow 2a - 120 = 100 \times 2$$

$$\Rightarrow 2(a - 60) = 100 \times 2$$

$$\Rightarrow a - 60 = 100$$

$$\Rightarrow a = 100 + 60$$

$$\Rightarrow a = 160$$

अतः प्रथम पुरस्कार 160 है और इसके बाद अन्य पुरस्कार 20 कम है।

इसलिए: 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 है। `

प्रश्न 17 एक स्कूल के विद्यार्थियों ने वायु प्रदुषण कम करने के लिए स्कूल के अन्दर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोंचा । यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक अनुभाग अपनी कक्षा की संख्या के बराबर पेड़ लगाएगा । उदाहरणार्थ, कक्षा I का एक अनुभाग एक पेड़ लगाएगा, कक्षा II का एक अनुभाग 2 पेड़ लगाएगा, कक्षा III का एक अनुभाग 3 पेड़ लगाएगा, इत्यादि और ऐसा ही कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा । प्रत्येक कक्षा के तीन अनुभाग हैं । इस विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

उत्तर- कक्षा 1 से 12 तक प्रत्येक अनुभाग इस प्रकार पेड़ लगाता है।

अत :1, 2, 3, 4, ... 12

चूँकि प्रत्येक कक्षा के तीन अनुभाग है ।

अत :अब प्रत्येक कक्षा द्वारा लगाए गए पेड़ हो जायेंगे ।

इसलिए, 3(1), 3(2), 3(3), 3(4) .... 3(12)

या 3, 6, 9, 12, ... 36

a = 3, d = 3 और n = 12

कुल पेड़ों की संख्या = S_{12}

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left[2a + 11d\right]$$

$$= \frac{12}{2}\left[2(3) + 11(3)\right]$$

$= 6(6 + 33)$

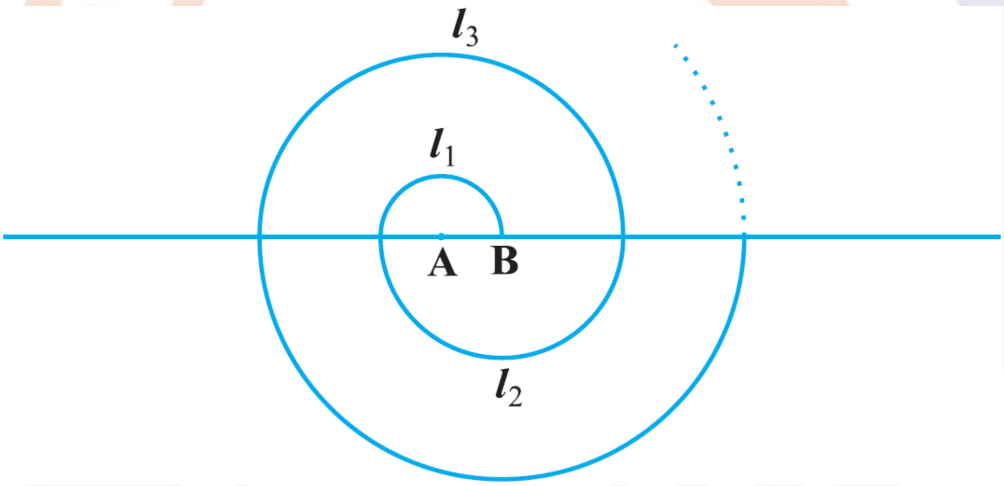
$= 6 \times 39$

$= 234$

अतः कुल 234 पेड़ लगाय गए।

प्रश्न 18 केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी-बारी से केन्द्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5cm, 1.0cm, 1.5cm, 2.0cm .... वाले उत्तरोत्तर अर्धवृतों को खींचकर एक सर्पिल (spiral) बनाया गया है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। तेरह क्रमागत अर्धवृतों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई क्या है?

$\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ लीजिये}\right)$



उत्तर-

दिया है अर्धवृतों की लम्बाईयाँ l_1, l_2, l_3, l_4 क्रमशः इत्यादि अर्धवृत्त हैं।

साथ ही दिया है-

r_1 = 0.5cm, r_2 = 1.0cm, r^3 = 1.5cm, r_4 = 2.0cm

अब, $l_1 = \frac{1}{2} \times 2\pi r_1$

$= \pi r_1 = \frac{22}{7} \times 0.5 = \frac{11}{7}\text{cm}$

$$l_2 = \pi r_2 = \frac{22}{7} \times 1 = \frac{22}{7} \text{cm}$$

$$l_3 = \pi r_3 = \frac{22}{7} \times 1.5 = \frac{33}{7} \text{cm}$$

$$l_4 = \pi r_4 = \frac{22}{7} \times 2 = \frac{44}{7} \text{cm}$$

अतः इससे प्राप्त A.P $\frac{11}{7}, \frac{22}{7}, \frac{33}{7}, \frac{44}{7}$

इसलिए $a = \frac{11}{7}, d = \frac{11}{7}$ और n = 13

सर्पिल की कुल लम्बाई = $l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ .... 13 पदों तक

$$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}\left[2a + (13-1)d\right]$$

$$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}\left[2\left(\frac{11}{7}\right) + 12\left(\frac{11}{7}\right)\right]$$

$$= \frac{13}{2}\left[\frac{22}{7} + \frac{132}{7}\right]$$

$$= \frac{13}{2}\left[\frac{22+132}{7}\right]$$

$$= \frac{13}{2}\left[\frac{154}{7}\right]$$

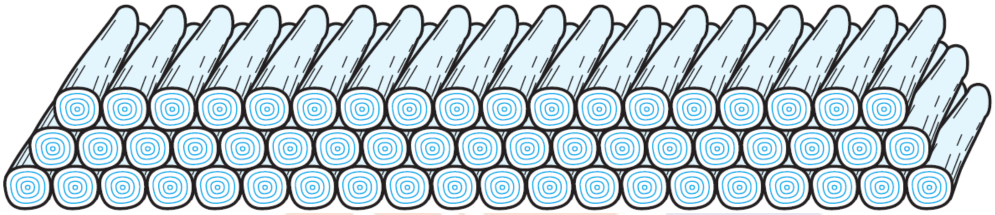
$$= \frac{13}{2} \times 22$$

$$= 13 \times 11$$

$$= 143$$

अतः इन 13 क्रमागत अर्धवृतो से बने इस सर्पिल की कुल लम्बाई 143cm है।

प्रश्न 19 200 लट्ठों (logs) को ढेरी के रूप में इस प्रकार रखा जाता है। सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 18 लट्ठे, इत्यादि (देखिए आकृति)। ये 200 लठ्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?



उत्तर- 20, 19, 18, 17, ...

कुल लठ्ठों की संख्या (S_n) = 200, a = 20 और d = 19 - 20 = -1

$S_n = 200$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = 200$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[2(20) + (n-1) - 1\right] = 200$$

$\Rightarrow n[40 - n + 1] = 400$

$\Rightarrow n[41 - n] = 400$

$\Rightarrow 41n - n^2 = 400$

$\Rightarrow n^2 - 41n + 400 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 16n - 25n + 400 = 0$

$\Rightarrow n(n - 16) - 25(n - 16) = 0$

$\Rightarrow (n - 16)(n - 25) = 0$

$\Rightarrow n - 16 = 0, n - 25 = 0$

$\Rightarrow n = 16, n = 25$

यदि n = 16 है तो

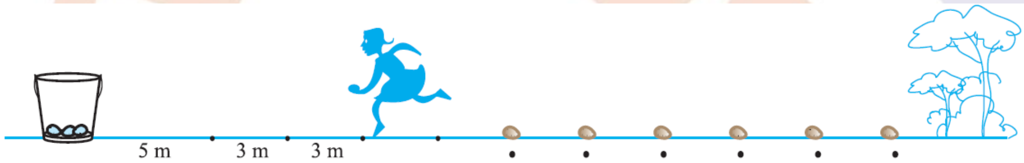
$a_{16} = a + 15d = 20 + 15(-1) = 20 - 15 = 5$

यदि n = 25 है तो

$a_{25} = a + 24d = 20 + 24(-1) = 20 - 24 = -4$

यहाँ- 4 संभव नहीं है अत :अंतिम अर्थात सबसे उपरी पंक्ति में लठ्ठों की संख्या 5 है और पंक्तियों की संख्या 16 है।

प्रश्न 20 एक आलू दौड़ (potato race) में, प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी हुई है, जो पहले आलू से 5m की दूरी पर है, तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3m की दूरियों पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं (देखिए आकृति) । प्रत्येक प्रतियोगी बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है, उसे लेकर वापस आकर दौड़कर बाल्टी में डालती है, दूसरा आलू उठाने के लिए वापस दौड़ती है, उसे उठाकर वापस बाल्टी में डालती है, और वह ऐसा तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रतियोगी को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?



उत्तर- पहले आलु तक दौड़कर जाने और आने में तय दुरी = 2 × 5 = 10m

दूसरे आलु तक दौड़कर जाने और आने में तय दुरी = 2(5 + 3) = 16m

इसी प्रकार, तीसरे आलु को उठाकर बाल्टी में डालने तक तय दुरी= 2(5 + 3 + 3) = 22m

अतः इस प्रकार A.P. 10, 16, 22, 28 .... प्राप्त होता है।

यहाँ, a = 10, d = 16 -10 = 6 और n = 10

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2a + (10 - 1)d\right]$$

$$= \frac{10}{2}[2 \times 10 + 9 \times 6]$$

$$= 5[20 + 54]$$

$$= 5 \times 74$$

$$= 370m$$

अतः प्रतियोगी को 370m दौड़ना पड़ेगा।

प्रश्नावली 5.4 (पृष्ठ संख्या 127-128)

प्रश्न 1 A.P: 121, 117, 113, ... , का कौन - सा पद सबसे पहला ऋणात्मक पद होगा? [संकेत: $a_n<0$ के लिए n ज्ञात कीजिए]

उत्तर- हमे प्राप्त है की एक AP का प्रथम पद) a) = 121 और सर्वांअंतर) d) = 117 - 121 = -4

$\therefore a_n = a + (n - 1)d = 121 + (n - 1) \times (-4)$

प्रथम ऋणात्मक पद के लिए $a_n < 0 \Rightarrow (125 - 4n) < 0$

$\Rightarrow 125 < 4n$

$$\Rightarrow \frac{125}{4} < n$$

$$\Rightarrow 33\frac{1}{4} < n \text{ or } n > 31\frac{1}{4}$$

इस प्रकार AP का 32वाँ पद ऋणात्मक होगा।

प्रश्न 2 किसी A.P. के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 है और उनका गुणनफल 8 है। इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर- यहाँ, $T_3 + T_7 = 6$ और $T_3 \times T_7 = 8$

माना प्रथम = (a) और सर्वान्तर = d

$\therefore T_3 = a + 2d$ और $T_7 = a + 6d$

$\because T_3 + T_7 = 6$

$\therefore (a + 2d) + (a + 6d) = 6$

$\Rightarrow 2a + 8d = 6$

$\Rightarrow a + 4d = 3$ ...... (1)

पुनः $T_3 \times T_7 = 8$

$\therefore (a + 2d) \times (a + 6d) = 8$

$\Rightarrow (a + 4d - 2d) \times (a + 4d + 2d) = 8$

$\Rightarrow [(a + 4d) - 2d] \times [(a + 4d) + 2d] = 8$

$\Rightarrow [(3) - 2d] \times [(3) + 2d] = 8$ [(1) से[

$\Rightarrow 3^2 - (2d)^2 = 8$

$\Rightarrow 9 - 4d^2 = 8$

$\Rightarrow -4d^2 = 8 - 9 = -1$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow d = \pm\frac{1}{2}$$

जब $d = \frac{1}{2}$ तो (1) से हमे प्राप्त होता है: $a + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

$\Rightarrow a + 2 = 3$ or $a = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow d^2 = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow d = \pm\frac{1}{2}$

जब $d = \frac{1}{2}$ तो (1) से हमे प्राप्त होता है: $a + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

⇒ a + 2 = 3 or a = 3 - 2 = 1

अब $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$, का प्रयोग करने पर,

$S_{16} = \frac{16}{2}\left[2(1) + (16-1) \times \frac{1}{2}\right]$

$= 8\left[2 + \frac{15}{2}\right] = 16 + 60 = 76$

अर्थात प्रथम 16 पदों का योग = 76

जब, $d = -\frac{1}{2}$ तो (1) से हमे प्राप्त होता है:

$a + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

⇒ a - 2 = 3

⇒ a = 5

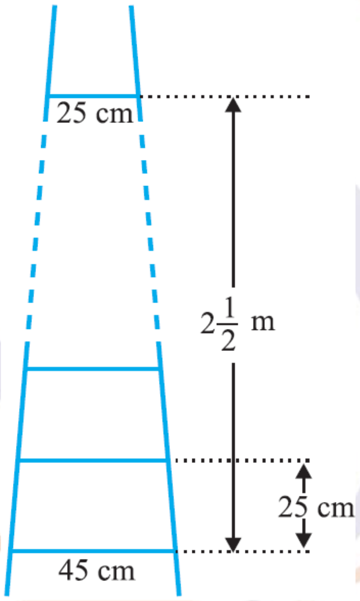
पुनः प्रथम 16 पदों का योग: $S_{16} = \frac{16}{2}\left[2(5) + (16-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

$= 8\left[10 + \left(\frac{-15}{2}\right)\right]$

$= 80 - 60 = 20$

अर्थात प्रथम 16 पदों का योग = 20

प्रश्न 3 एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25cm की दुरी पर हैं डंडों की लंबाई एक समान रूप से घटती जाती है तथा सबसे निचले डंडे की लंबाई 45cm है और सबसे ऊपर वाले डंडे की लंबाई 25cm है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दुरी $2\frac{1}{2}$m है, तो डंडों को बनाने के लिए लकड़ी की कितनी लंबाई की आवश्यकता होगी ? [**संकेत:** डंडों की संख्या $= \frac{250}{25} + 1$ हैं]



उत्तर-

यहाँ, ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दुरी $= 2\frac{1}{2}$ मी.

$= \frac{5}{2} \times 100$ सेमी.

= 250 सेमी.

क्रमागत दो डाँडो के बीच की दुरी = 25 सेमी.

$\therefore$ डंडो की संख्या $= \left[\frac{250}{25} + 1\right] = 10 + 1 = 11$

सबसे निचकले डंडे की लम्बाई (अर्थात पहले डंडे की लम्बाई) = 45 सेमी.

सबसे ऊपरी डंडे की लम्बाई (अर्थात 11 वे डंडे की लम्बाई) = 25 सेमी.

माना डंडो की एक समान घटने वाली लम्बाई = x सेमी.

$\therefore$ सभी डंडो की कुल लम्बाई = 45 सेमी. + (45 - x) सेमी. + (45 - 2x) सेमी. + ... 25 सेमी.

चूँकि 45, (45 - x), (45 - 2x), ... 25 एक A.P. है।

जिसमे प्रथम पद (a) = 45,

अंतिम पद = 25,

पदों की संख्या = 11

अब $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ का प्रयोग करने पर $S_{11} = \frac{11}{2}(45 + 25)$

$= \frac{11}{2} \times 70 = 11 \times 35 = 385$

⇒ डंडो की कुल लम्बाई = 385 सेमी.

प्रश्न 4 एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप से संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइए कि x का एक ऐसा मान है x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग उसके बाद वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। x का मान ज्ञात कीजिए। [संकेत : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$ है।]

उत्तर- हमे प्राप्त है की

मकानों की क्रमागत संख्या = 1, 2, 3, 4, 5, ..., 49

ये संख्याएँ A.P. में इस प्रकार है की

प्रथम पद) a) = 1,

सार्व अन्तर) d) = 2 - 1 = 1

पदों की संख्या) n) = 49

माना किसी, एक मकान की अंकित संख्या = x

इससे पहले वाले मकान पर अंकित संख्या = x - 1

इससे आगे वाले मकानों की संख्या = 49 - x

अब, मकान नम्बर x से पहले के मकानों की संख्याओं का योग ज्ञात करने लिए

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ का प्रयोग करने पर

$S_{x-1} = \frac{x-1}{2}[2(1) + (x - 1 - 1) \times 1]$

$= \frac{x-1}{2}[2 + x - 2]$

$= \frac{x-1}{2}[x] = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$

मकान संख्या x से आगे के मकानों की संख्याओं का योग

(x + 1), (x + 2), (x + 3), ..., 49

$\therefore$ इन मकान संख्याओ (जो की AP में है) के लिए:

प्रथम पद (a) = x + 1,

अंतिम पद (l) = 49

$\therefore S_n = \frac{n}{2}[a + l]$ का प्रयोग करने पर,

$$S_{49-x} = \frac{49-x}{2}[(x+1)+49]$$

$$= \frac{49-x}{2}[x+50]$$

$$= \frac{49x}{2} - \frac{x^2}{2} + (49 \times 25) - 25x$$

$$= \left(\frac{49x}{2} - 25x\right) - \frac{x^2}{2} + (49 \times 25) - 25x$$

$$= \frac{-x}{2} - \frac{x^2}{2} + (49 \times 25)$$

प्रश्न के अनुसार

से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग = से बाद के मकानों की संख्याओ का योग

अर्थात

$$S_{n-1} = S_{49-x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{-x^2}{2} + (49 \times 25)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = (49 \times 25)$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2} = (49 \times 25)$$

$$\Rightarrow x^2 = (49 \times 25)$$

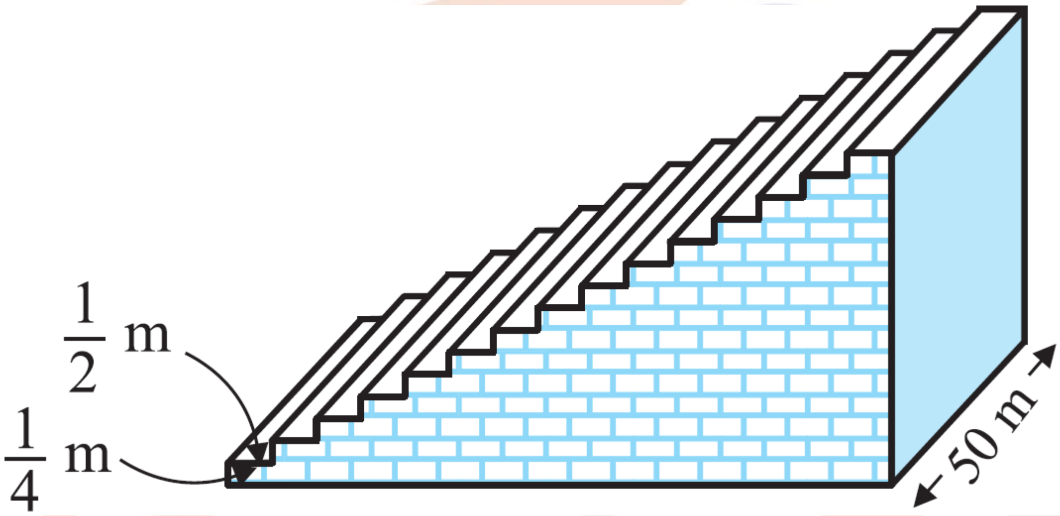
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{49 \times 25}$$

$$\Rightarrow x = \pm(7 \times 5) = \pm 35$$

परन्तु x एक ऋणात्मक संख्या नहीं हो सकता, x = 35

प्रश्न 5 एक फुटबॉल के मैदान में एक छोटा चबूतरा है जिसमें 15 सीढीयाँ बनी हुई हैं। इन सीढीयों में से प्रत्येक की लंबाई 50m है वह ठोस कंक्रीट (concrete) की बनी है प्रत्येक सीढ़ी में $\frac{1}{4}$ m की चौड़ाई है और $\frac{1}{2}$ m का फैलाव (चौड़ाई) है | (देखिए आकृति 5.8)। इस चबूतरे को बनाने में लगी कंक्रीट का कुल आयतन परिकलित कीजिए।

[संकेत : पहली सीढ़ी को बनाने में लगी कंक्रीट का आयतन $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 m^3$ है।]



उत्तर-

पहली सीढ़ी के लिए:

लम्बाई = 50 मी.,

चौड़ाई = 1 मी. और ऊँचाई = 1 मी.

∴ पहली सीढ़ी को बनाने में लगी कंक्रीट का आयतन

= लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= 50 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ मी.

दूसरी सीढ़ी के लिए:

लम्बाई = 50 मी.

चौड़ाई $= \frac{1}{2}$ मी.

और ऊँचाई $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$ मी. $= \left(2 \times \frac{1}{4}\right)$ मी.

$\therefore$ दूसरी सीढ़ी को बनाने में लगी कंक्रीट का आयतन

= लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= 50\text{m} \times \frac{1}{2}\text{m} \times \left(\frac{1}{4} \times 2\right)\text{m}$

$= \left(\frac{25}{4} \times 2\right)$ मी.^{3}

तीसरी सीढ़ी के लिए:

लम्बाई = 50 मी.,

चौड़ाई $= \frac{1}{2}$ मी. और

ऊँचाई $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$ मी. $= \left(\frac{1}{4} \times 3\right)$ मी.

$\therefore$ तीसरी सीढ़ी को बनाने में लगी कंक्रीट का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= 50\text{m} \times \frac{1}{2}\text{m} \times \left(\frac{1}{4} \times 3\right)\text{m}$

$= \left(\frac{25}{4} \times 3\right)$

इस प्रकार, पहली, दूसरी, तीसरी, ... पन्द्रहवीं सीढ़ीयों को बनाने में लगे कंक्रीट का आयतन (मी.^{3} में) क्रमश:

$$\left(\frac{25}{4} \times 1\right), \left(\frac{25}{4} \times 2\right), \left(\frac{25}{4} \times 3\right), \ldots\ldots\ldots, \left(\frac{25}{4} \times 15\right)$$

स्पष्ट है कि ये संख्याएँ एक A.P. में हैं जिसमें

प्रथम पद $(a) = \frac{25}{4}$

सार्व अन्तर $(d) = \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$

पदों की संख्या $(n) = 15$

$\therefore S_n = \frac{n}{2}[(2a) + (n-1)d]$ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2\left(\frac{25}{4}\right) + (15-1) \times \frac{25}{4}\right]$$

$$= \frac{15}{2}\left[\frac{25}{2} + 14 \times \frac{25}{2} \times \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{15}{2} \times \frac{25}{2}\left[1 + \frac{14}{2}\right]$$

$$= \frac{375}{4} \times 8$$

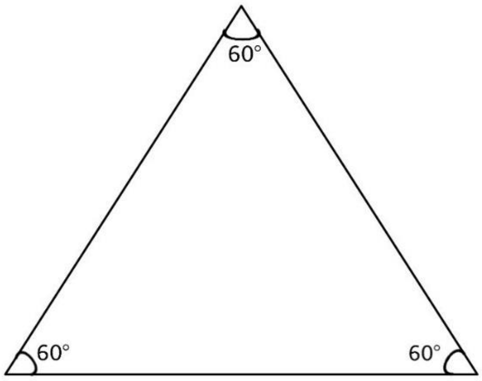
$$= 375 \times 2 = 750$$

= 15 सीढ़ियों के बनाने में लगे कंक्रीट का आयतन 750 मी.^{3} है।

अतः कंक्रीट का अभीष्ट आयतन = 750 मी.^{3}

त्रिभुज क्या है

तीन रेखाखण्डों से घिरी हुई समतलीय आकृति त्रिभुज कहलाती है। त्रिभुज को Δ से निरूपित किया जाता है। एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं। त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।



ΔABC एक समकोणिक त्रिभुज है।
यह एक न्यूनकोण त्रिभुज भी है।

त्रिभुजों का वर्गीकरण

त्रिभुजों का वर्गीकरण निम्नलिखित दो आधार पर किया जा सकता है:

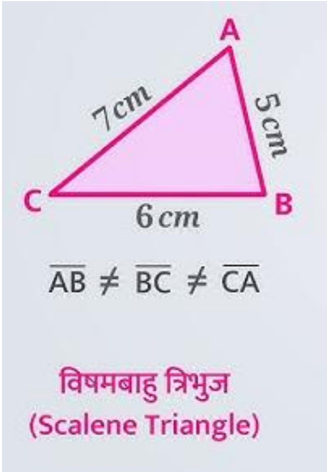
(i) भुजाओं के आधार पर

(ii) कोणों के आधार पर

भुजाओं के आधार पर त्रिभुज

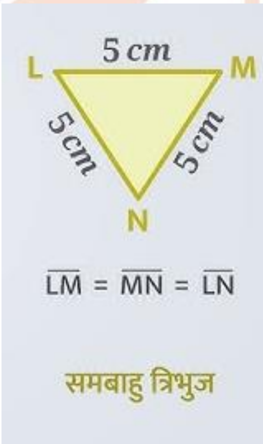
भुजाओं के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

- विषमबाहु त्रिभुज



- समद्विबाहु त्रिभुज

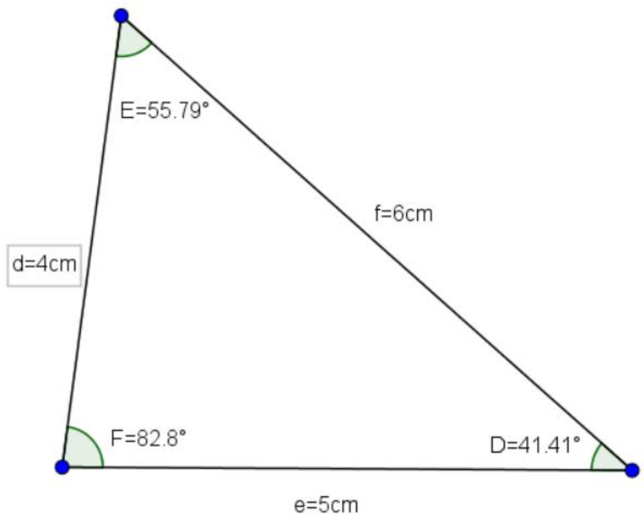
- समबाहु त्रिभुज



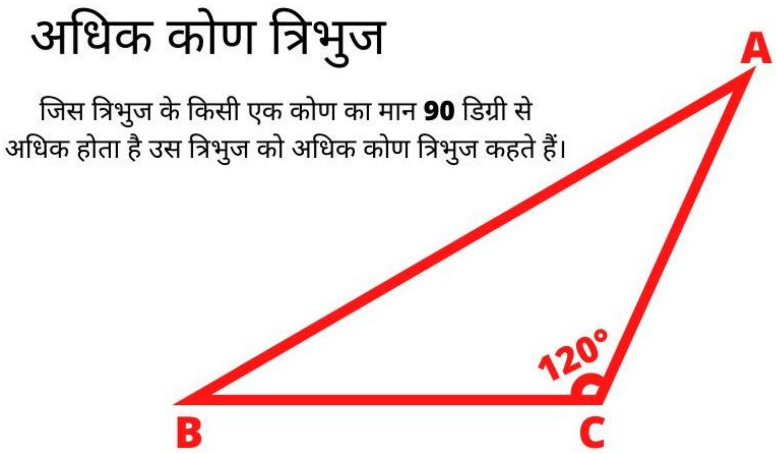
कोणों के आधार पर त्रिभुज

कोणों के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

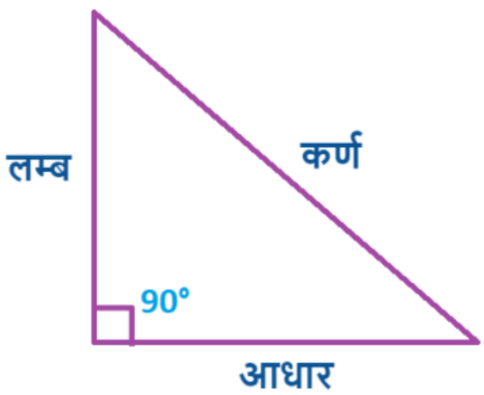
- न्यून कोण त्रिभुज



- अधिक कोण त्रिभुज



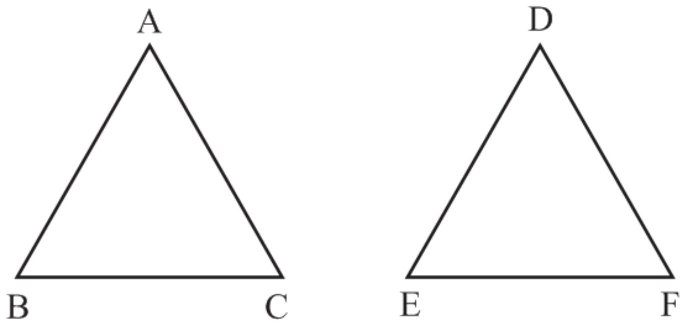
- समकोण त्रिभुज



सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परंतु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

सर्वांगसम त्रिभुज

जब दो त्रिभुज की सारी भुजाओं एवं कोणों का माप समान होता है तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



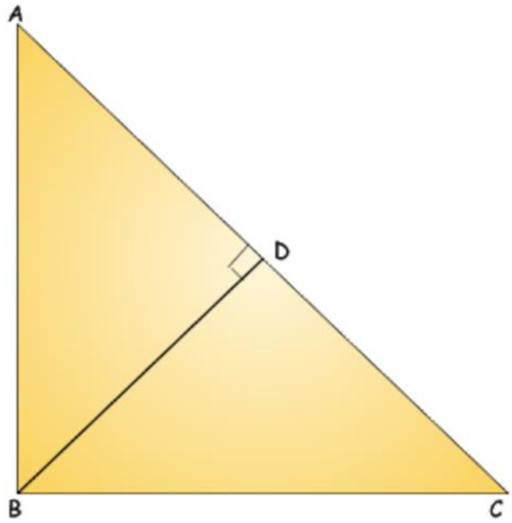
समरूप त्रिभुज

दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि

(i) यदि दो त्रिभुजों में, संगत कोण समान हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

(ii) यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

(iii) यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा उन कोणों को बनाने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

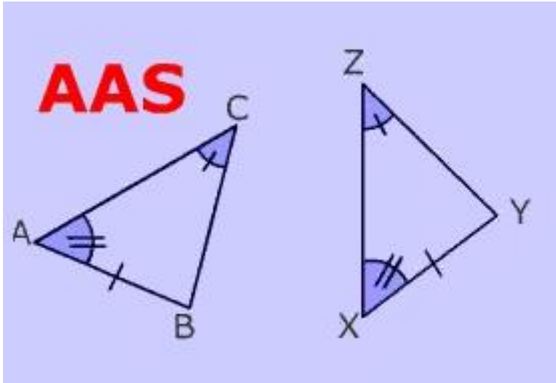


सर्वांगसमता के प्रकार

(i) AAS (कोण-कोण-भुजा):

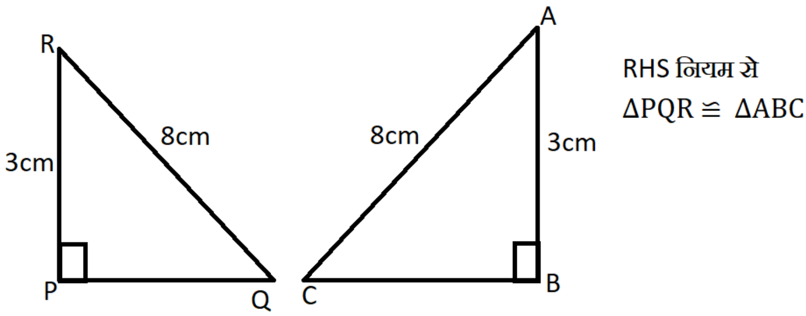
यदि दो त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म माप में बराबर हों, और संगत गैर-शामिल भुजाओं का एक युग्म

लंबाई में बराबर हो, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। ...



(ii) RHS (समकोण-कर्ण-पक्ष):

यदि दो समकोण त्रिभुजों के कर्णों की लंबाई समान है, और छोटी भुजाओं का एक युग्म लंबाई में समान है, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



(समकोण त्रिभुज में RHS सर्वांगसमता नियम)

कोणों के आधार पर त्रिभुज के प्रकार

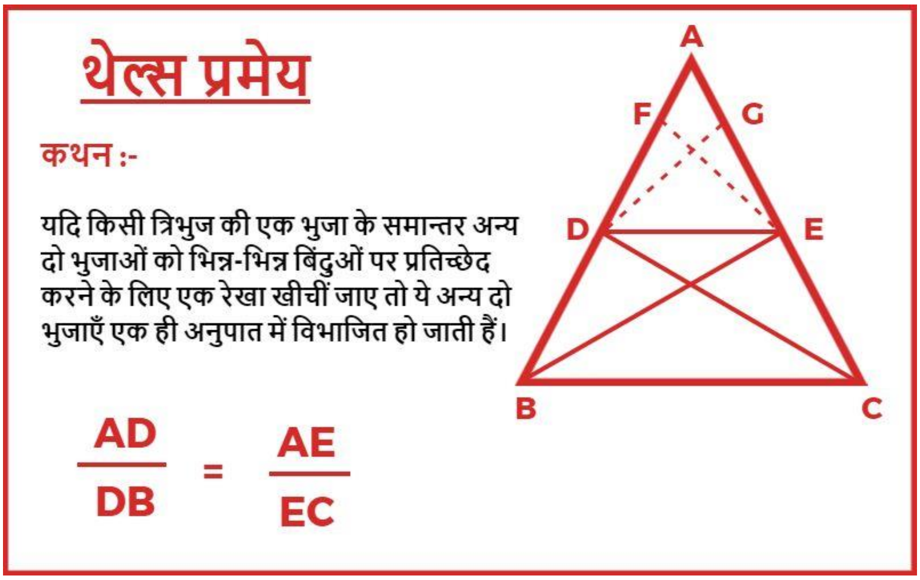
कोणों के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं:

1. **न्यून कोण त्रिभुज:** (उस त्रिभुज को कहते हैं जिसके तीनों कोण, न्यूनकोण (90° से कम) हों।)
2. **अधिक कोण त्रिभुज:** (उस त्रिभुज को कहते हैं जिसका कोई एक कोण, अधिककोण (90° से अधिक) हो।)
3. **समकोण त्रिभुज:** (जिसका एक कोण 90 अंश का (अर्थात, समकोण) हो।)

थेल्स (Thales) के प्रमेय

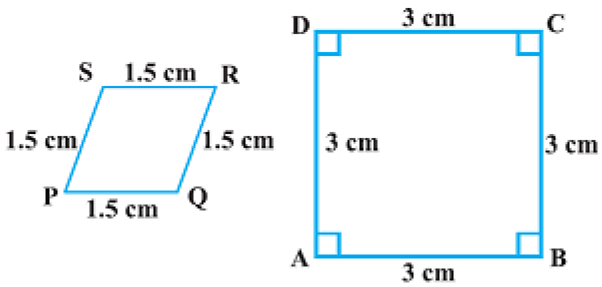
ज्यामिति में थेल्स के प्रमेय (Thales' theorem) के अनुसार किसी भी वृत्त के परिधि पर स्थित तीन बिन्दुओं A, B तथा C हो तो कोण ABC का मान ९० अंश होगा यदि AC उस वृत्त का कोई व्यास हो।

यह प्रमेय 'अन्तःनिर्मित कोण प्रमेय' (inscribed angle theorem) का एक विशेष रूप है।



प्रश्न

बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं:



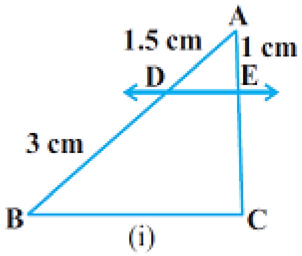
हल:

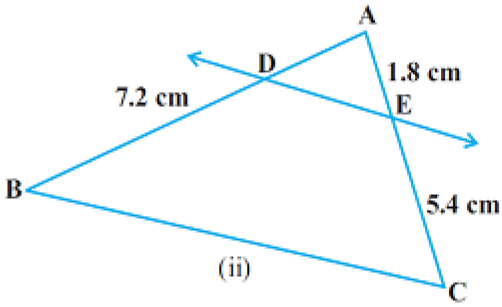
दिये गये चतुर्भुज समरूप नहीं है।

चूँकि दोनों आकृतियों के संगत भुजा समानुपाती हैं परंतु संगत कोण बराबर नहीं हैं।

प्रश्न

आकृति (i) और (ii) में, DE||BC है। (i) में EC और (ii) में AD ज्ञात कीजिए:





हल:

दिया गया है:

चित्र (i) में

AD = 1.5 cm

BD = 3 cm

AE = 1 cm

तथा DE || BC

तब EC = ?

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

चित्र से AD, DB तथा AE का मान रखने पर,

$$\frac{1.5\ cm}{3\ cm} = \frac{1\ cm}{EC}$$

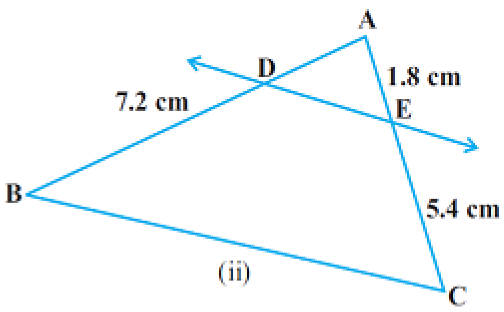
बज्र गुणन (Cross multiplication) करने पर हम पाते हैं कि

$$EC \times 1.5\ cm = 3\ cm \times 1\ cm$$

$$\Rightarrow EC = \frac{3\ cm \times 1\ cm}{1.5\ cm}$$

$$\Rightarrow EC = 2\ cm$$

चित्र (ii) में:



DB = 7.2 cm

AE = 1.8 cm

EC = 5.4 cm तथा

DE || BC

तब, AD=?

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

DB, AE तथा EC का मान रखने पर, हम पाते हैं कि

$$\frac{AD}{7.2\ cm} = \frac{1.8\ cm}{5.4\ cm}$$

बज्र गुणन (Cross multiplication) करने पर हम पाते हैं कि

$$AD = \frac{1.8\ cm \times 7.2\ cm}{5.4\ cm}$$

$$\Rightarrow AD = 2.4\ cm$$

अत: (i) में EC = 2 cm और (ii) में AD = 2.4 cm उत्तर

प्रश्न

किसी △ PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमश: बिन्दु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF || QR है:

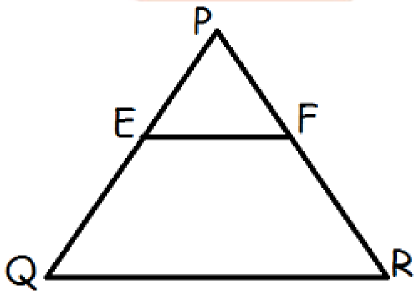
(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

(iii) PQ =1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm, और PF = 0.36 cm

हल:

मान लिया कि दिया गया त्रिभुज चित्र के अनुसार है,



(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF || QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अब, $\frac{PE}{EQ} = \frac{3.9\ cm}{3\ cm}$

$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = 1.3$

तथा, $\frac{PF}{FR} = \frac{3.6\ cm}{2.4\ cm}$

$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{3}{2} = 1.5$

यहाँ चूँकि $\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$

अत: EF ∦ QR उत्तर

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF || QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अब, $\frac{PE}{EQ} = \frac{4}{4.5}$

तथा, $\frac{PF}{FR} = \frac{8}{9} = \frac{4}{4.5}$

अत: $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

अत: EF || QR उत्तर

(iii) PQ =1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm, और PF = 0.36 cm

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

यदि EF || QR, तो

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अब, $\frac{PE}{EQ} = \frac{0.18\ cm}{PQ - PE}$

$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{0.18\ cm}{1.28\ cm - 0.18\ cm}$

$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{0.18}{1.10}$

तथा, $\frac{PF}{FR} = \frac{0.36\ cm}{PR - PF}$

$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{0.36\ cm}{2.56\ cm - 0.36\ cm}$

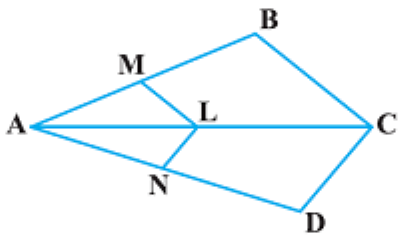
$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{0.36}{2.20} = \frac{0.18}{1.10}$

अत: EF ॥ QR **उत्तर**

प्रश्न

आकृति में यदि LM || CB और LN || CD हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$



हल:

दिया गया है, LM ∥ CB

अत: $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ AML

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC} \text{ ---------- (i)}$$

पुन: दिया गया है, LN ∥ CD

अत: $\triangle$ACD ~ $\triangle$ALN

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार हम जानते हैं कि

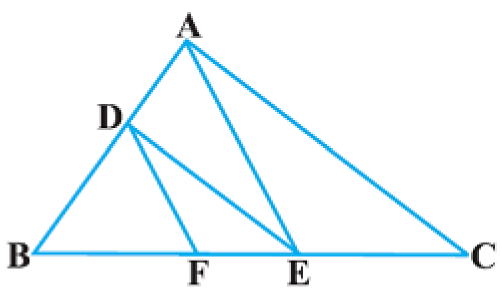
$$\frac{AN}{AD} = \frac{AL}{AC} \text{ ---------- (ii)}$$

अत: समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$ प्रमाणित।

प्रश्न

दिये गये आकृति में DE ∥ AC और DF ∥ AE है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$



हल:

दिया गया है, DE ∥ AC

अत: △ ABC ~ △ DBE

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{BE}{EC}=\frac{BD}{DA}$$ -------------- (i)

पुन: दिया गया है, DF ∥ AE

अत:

△ ABE ~ △ DBF

अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

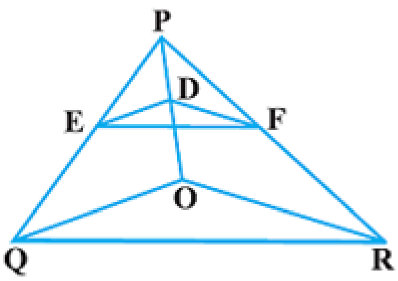
$$\frac{BF}{FE}=\frac{BD}{DA}$$ --------------- (ii)

अत: समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{BF}{FE}=\frac{BE}{EC}$$ प्रमाणित।

प्रश्न

आकृति में DE ∥ OQ और DF∥OR है। दर्शाइए कि EF ∥ QR है।



हल:

दिया गया है, DE ∥ OQ

अत: △ POQ में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \text{ -------(i)}$$

पुन: दिया गया है, DF ∥ OR

अत: △ POR में ,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO} \text{ ------------- (ii)}$$

अब समीकरण (i) तथा (ii) के द्वारा,

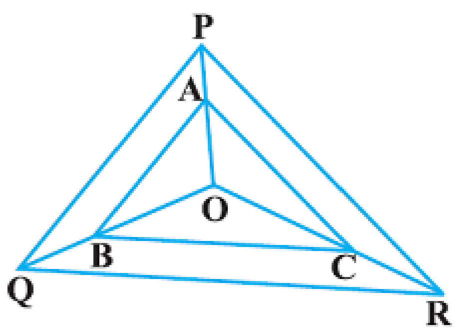
$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अत: आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम के अनुसार

EF ∥ QR प्रमाणित।

प्रश्न

दिये गये आकृति में क्रमश: OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि AB ∥ PQ और AC ∥ PR है। दर्शाइए कि BC ∥ QR है।



हल:

दिया गया है, AB ∥ PQ

अत: △ OPQ में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ} \text{ ---------------- (i)}$$

पुन: दिया गया है, AC ‖ PR

अत: △ ORP में,

थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के अनुसार

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \text{ ---------------- (i)}$$

अब समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

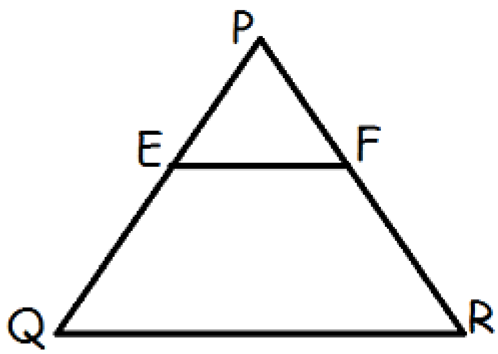
अत: थेल्स (Thales) के प्रमेय अर्थात आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय विलोम के अनुसार

BC ‖ QR प्रमाणित

प्रश्न

प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गए रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए कि आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं)

हल:



मान लिया कि PQR एक त्रिभुज है, तथा बिन्दु E इस त्रिभुज के PQ भुजा पर मध्य बिन्दु है।

अत: PE = EQ (चूँकि E इस भुजा का मध्य बिन्दु है)

अब EF रेखा त्रिभुज की भुजा QR के समानांतर खींची गई।

अब चूँकि EF ‖ QR

अत: $\frac{PF}{FR} = \frac{PE}{EQ}$

$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{PE}{PE}$

[∵ PE = EQ]

$\Rightarrow \frac{PF}{FR} = 1$

बज्र गुणन करने पर हम पाते हैं कि

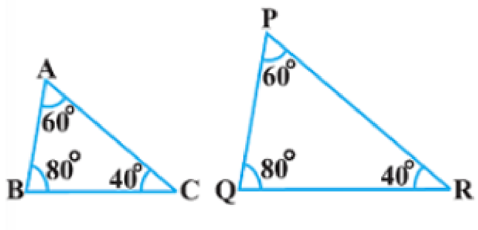
$PF = FR$

अत: EF रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा AR को समद्विभाजित करती है। प्रमाणित

प्रश्न

बताइए कि दिये गये आकृति में दिये गये त्रिभुजों के युग्मों में से कौन कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i)



हल:

दिये गये त्रिभुजों में,

$$\angle A = \angle P = 60^o$$

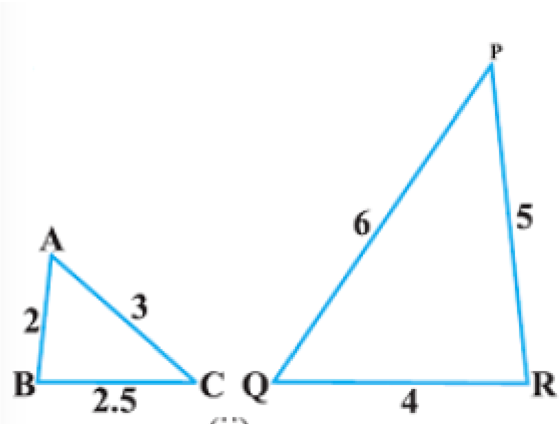
$$\angle B = \angle Q = 80^o$$

तथा

$$\angle C = \angle R = 40^o$$

अत: AAA के द्वारा △ ABC ~ △ PQR

(ii)



(ii)

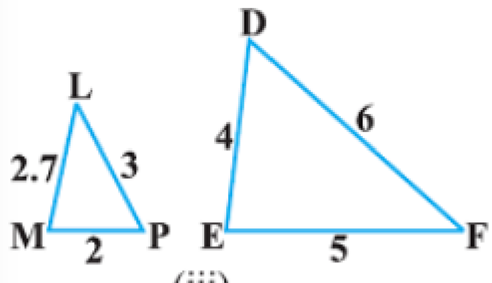
हल:

दिये गये त्रिभुजों में,

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{AC}{QP} = \frac{1}{2}$$

अत: SSS के द्वारा △ ABC ~ △ PQR

(iii)



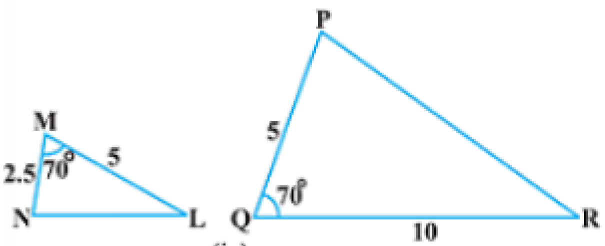
(iii)

हल:

चूँकि दिये गये दोनों त्रिभुजों की भुजाएं न तो बराबर हैं और न ही अनुपात में हैं।

अत: △ LMP ≁ △ DEF

(iv)



(iv)

हल:

दिये गये त्रिभुजों में

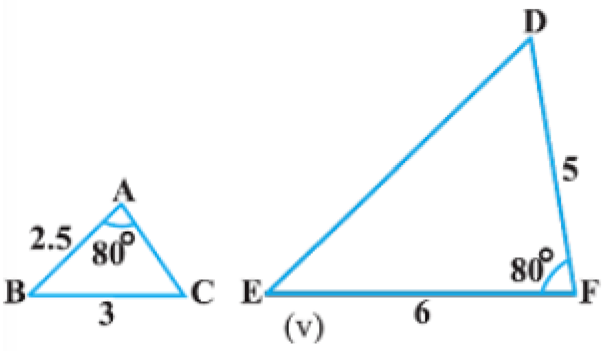
$\angle M = \angle Q = 70^o$

तथा, $\dfrac{MN}{PQ} = \dfrac{ML}{QR}$

अत: SAS के प्रमेय के अनुसार,

△ MNL ~ △ PQR

(v)

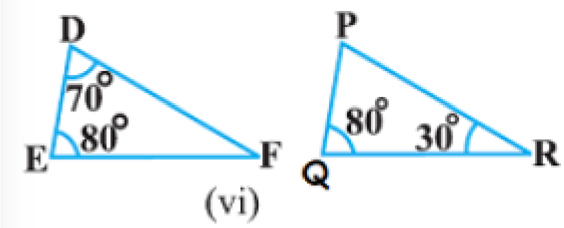


हल:

चूँकि संबंधित भुजाएं समान अनुपात में नहीं हैं,

अत: △ ABC ≁ △ DEF

(vi)



हल:

△ DEF में

$\angle F = 180^o - \left(70^{\oplus} 80^o\right)$

$\Rightarrow \angle F = 30^o$

△ PQR में

$\angle P = 180^o - (80^{\oplus}30^o)$

$\Rightarrow \angle P = 70^o$

चूँकि दिये गये त्रिभुजों के कोण बराबर हैं,

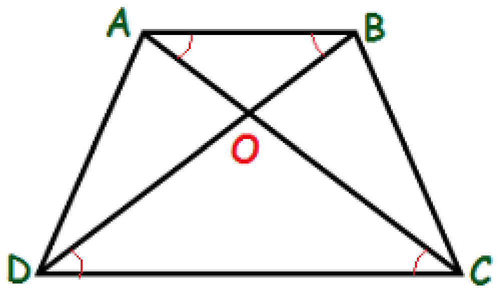
अत: AAA के अनुसार

△ DEF ~ △ PQR

प्रश्न

समलंब ABCD, जिसमें AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ हैं

हल:



मान लिया कि दिया गया समलंब ABCD है।

जिसमें AB || DC है, तथा विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अब △ DOC तथा △ BOA में,

$\angle CDO = \angle ABO$ [चूँकि AB || CD अत: ये एकांतर अंत: कोणों के युग्म हैं]

फिर,

$\angle DCO = \angle BAO$

[चूँकि AB || CD अत: ये एकांतर अंत: कोणों के युग्म (Pairs of alternate interior angles) हैं]

तथा,

$\angle DOC = \angle BOA$

[उर्ध्वाकार सम्मुख कोण हैं।]

अत: AAA (कोण-कोण-कोण) कसौटी के द्वारा

$\triangle$ DOC ~ $\triangle$ BOA

चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजा समानुपाती होते हैं।

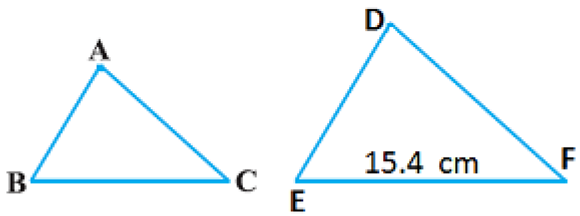
अत: $\dfrac{DO}{BO} = \dfrac{OC}{OA}$

$\Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ **प्रमाणित**

प्रश्न

मान लिजिए कि $\triangle$ AB ~ $\triangle$DEF है और इनके क्षेत्रफल क्रमश : 64 cm^2 और 121 cm^2 हैं। यदि EF = 15.4 cm हो, तो BC ज्ञात कीजिए।

हल:



मान लिया कि ABC तथा DEF दो त्रिभुज हैं।

दिया गया है,

$\triangle$ ABC ~ $\triangle$ DEF

ar (ABC) = 64 cm^2

ar (DEF) = 121 cm^2

तथा, EF = 15.4 cm

अत: BC = ?

हम जानते हैं कि यदि दो त्रिभुज ABC तथा DEF समरूप हों, तो

$$\frac{ar(ABC)}{ar(DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ar(ABC)}{ar(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{64cm^2}{121cm^2} = \left(\frac{BC}{15.4cm}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{BC}{15.4cm}\right) = \sqrt{\frac{64cm^2}{121cm^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{15.4cm} = \frac{8}{11}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4cm}{11} = 11.2cm$$

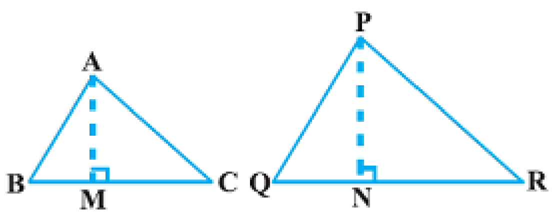
अत: BC = 11.2 cm उत्तर

प्रश्न

यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

हल:

मान लिया कि ABC तथा PQR दो सर्वांगसम त्रिभुज हैं।



हम जानते हैं कि, यदि

△ ABC ~ △ PQR

तो, $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

दिया गया है, ar (ABC) = ar(PQR)

अत: $1 = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

अब यदि $\frac{AB}{PQ} = 1$

$\therefore AB = PQ$

उसी तरह, BC = QR तथा CA = RP

अत: SSS (भुजा-भुजा-भुजा) कसौटी के आधार पर

$\triangle ABC \cong \triangle PQR$

अर्थात दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं प्रमाणित

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 6.1 (पृष्ठ संख्या 135-136)

प्रश्न 1 कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए:

(i) सभी वृत्त ______ होते है (सर्वांगसम, समरूप)
(ii) सभी वर्ग ______ होते हैं (समरूप, सर्वांगसम)
(iii) सभी ______ त्रिभुज समरूप होते है (समबाहु, समद्विबाहु)
(iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि उनके संगत कोण ______ हो तथा उनकी संगत ______ भुजाएँ हों (बराबर, समानुपाती)

उत्तर-

(i) सभी वृत्त **समरूप** होते है

(ii) सभी वर्ग **समरूप** होते हैं
(iii) सभी **समबाहु** त्रिभुज समरूप होते है
(iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि उनके संगत कोण **बराबर** हो तथा उनकी संगत **समानुपाती** भुजाएँ हों

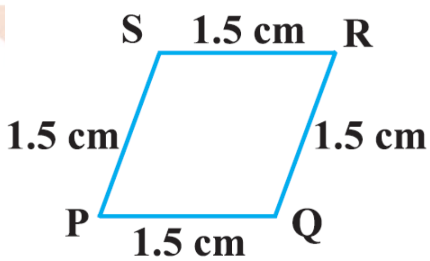
प्रश्न 2 निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए:

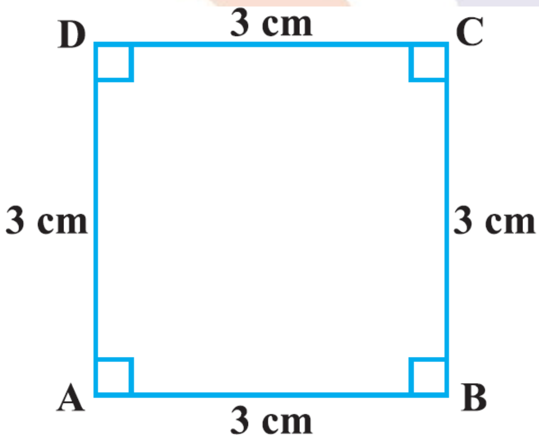
1. समरूप आकृतियाँ
2. ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं

उत्तर-

1. दो सौ रुपये के नोट।
2. दो पाँच रुपये के सिक्के।

प्रश्न 3 बताइए की निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप है या नहीं:

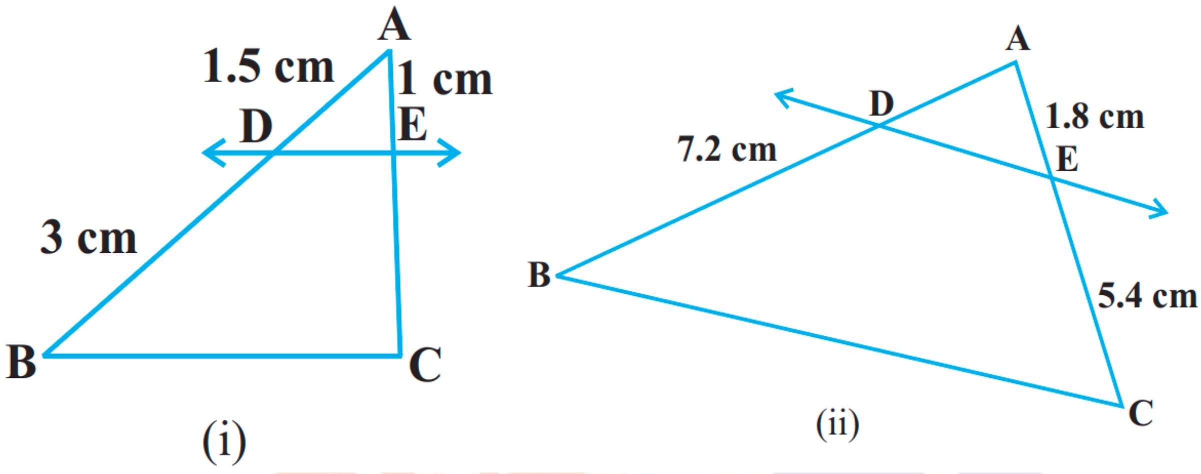




उत्तर- नहीं, क्योंकि संबंधित कोण समान नहीं हैं।

प्रश्नावली 6.2 (पृष्ठ संख्या 135-136)

प्रश्न 1 आकृति (i) और (ii) में, DE || BC में AD ज्ञात कीजिए:



उत्तर-

1. $\triangle ABC$ में

$DE \,||\, BC$ दिया है।

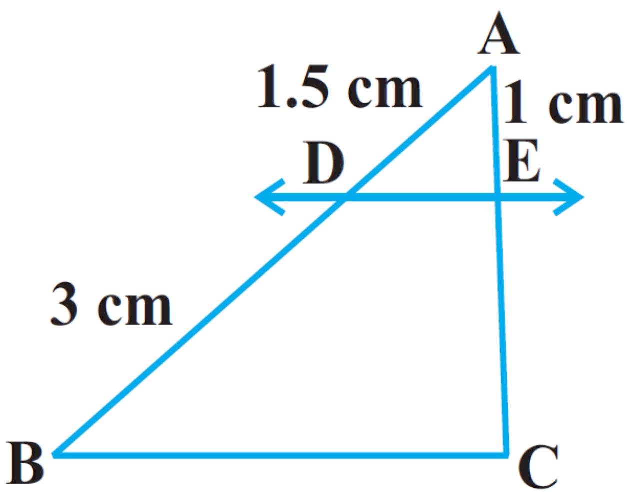
$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

$\Rightarrow \frac{1.5}{2} = \frac{1}{CE}$

$\Rightarrow 1.5CE = 3$

$\Rightarrow CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$

$\Rightarrow CE = 2$



2. $\triangle ABC$ में

$DE \parallel BC$ दिया है।

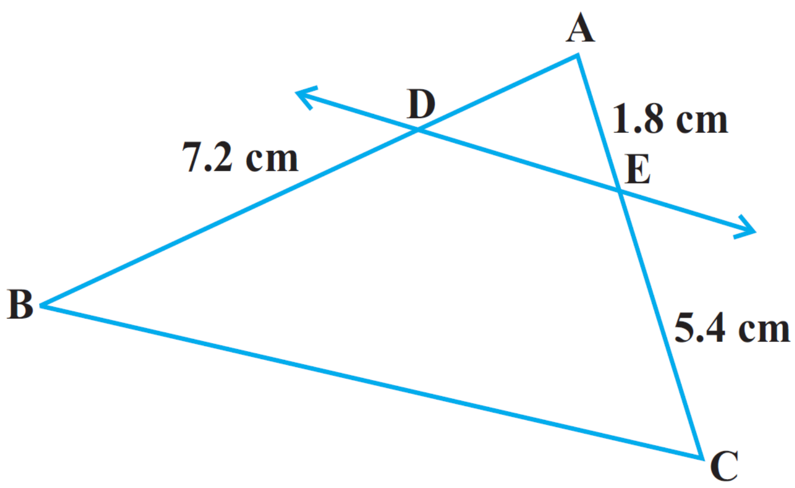
अतः आधरभूतिक समानुपातिक (BPT) से

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4}$$

$$\Rightarrow EC = 2.4 \text{ cm}$$



प्रश्न 2 किसी त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं| निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF || QR है

(i) PE = 3.9cm, EQ= 3cm, PF = 3.6 और FR= 2.4cm
(ii) PE = 4cm, QE = 4.5cm, PF = 8cm और RF = 9cm
(iii) PQ = 1.28cm, PR = 2.56cm, 0.18cm और PF = 0.36cm

उत्तर-

(i)

$\text{PE} = 3.9\text{cm},\ \text{EQ},\ \text{PF} = 3.6$ और $\text{FR} = 2.4\text{cm}$

$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

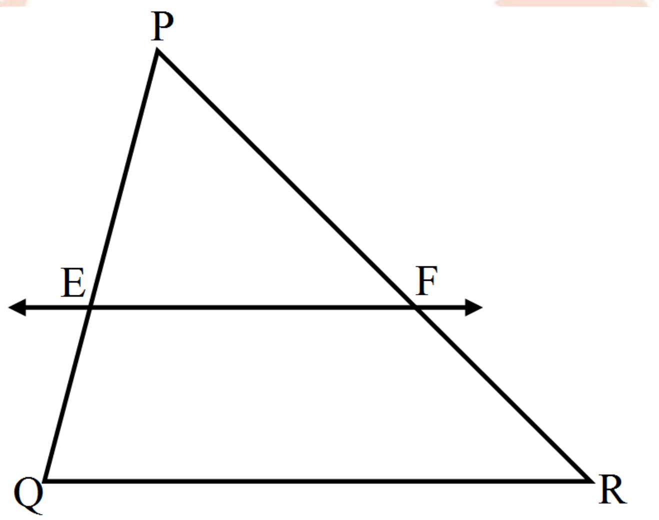
$\Rightarrow \frac{3.9}{3} = \frac{3.6}{2.4}$

$\Rightarrow \frac{39}{30} = \frac{36}{24}$

$\Rightarrow \frac{13}{10} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{13}{10} \neq \frac{3}{2}$

इसलिए, EF || QR नहीं है



(ii)

$$PE = 4cm,\ QE = 4.5cm,\ PF = 8cm \text{ और } FR = 9cm$$

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

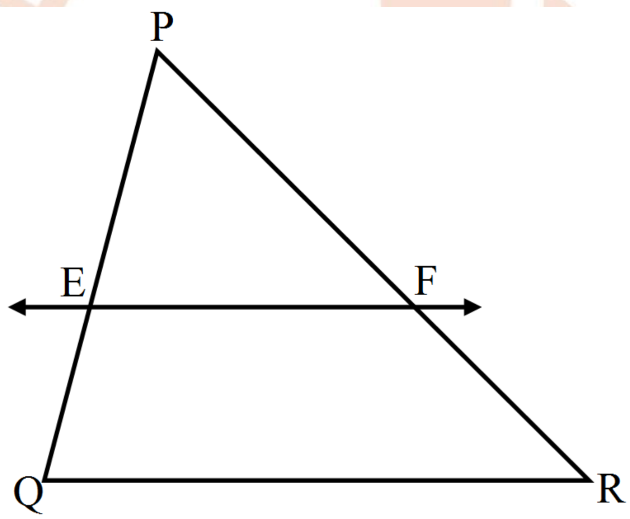
$$\Rightarrow \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से,

इसलिय EF || QR है



(iii)

$$PQ = 1.28cm,\ PR = 2.56cm,\ PE = 0.18cm \text{ और } PF = 0.36cm$$

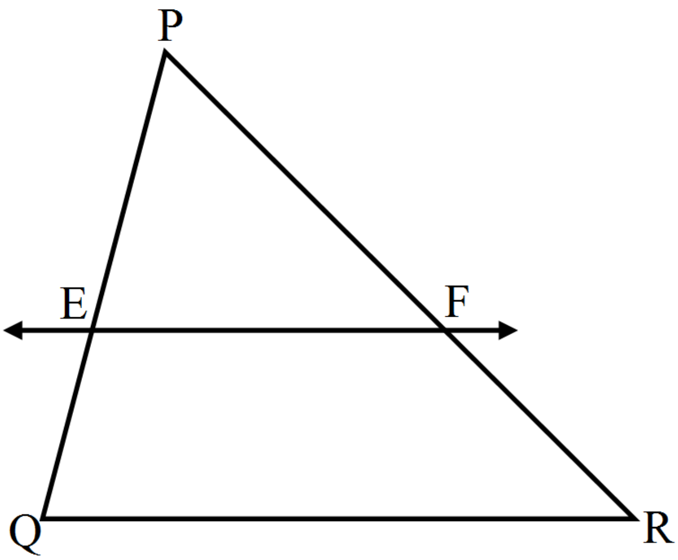
$$\therefore \frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{0.18}{1.28} = \frac{0.36}{2.56}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{64} = \frac{9}{64}$$

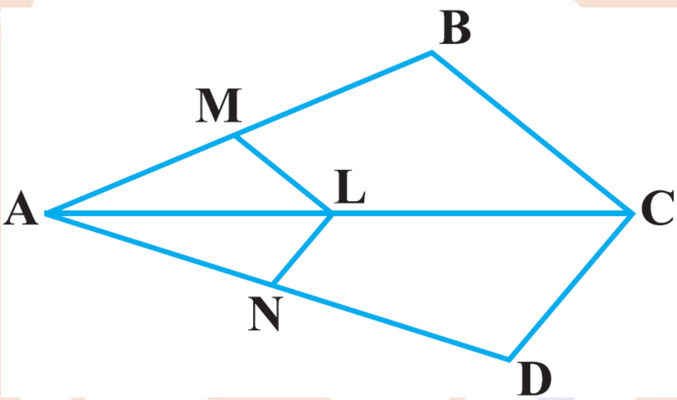
अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से,

इसलिय EF || QR है



प्रश्न 3

आकृति में दिय $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो तो सिद्ध कीजिए की $\frac{AM}{AM} = \frac{AN}{AD}$ है।



उत्तर-

$\triangle ABC$ में

$ML \parallel BC$ दिया है

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AL}{CL} \ldots (1)$

$\triangle ACD$ में

$NL \parallel DC$ दिया है।

अतः आधारबुटिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{CL} \ldots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{ND}$$

व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{BM}{AM} = \frac{ND}{AN}$$

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

$$\frac{BM}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$$

$$\frac{BM+AM}{AM} = \frac{ND+AN}{AN}$$

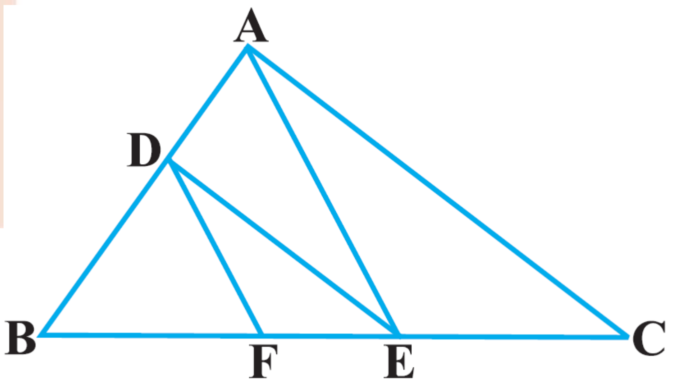
$$\frac{AB}{AB} = \frac{AD}{AN}$$

पुनः व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$

प्रश्न 4

आकृति में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AF$ है सिद्ध कीजिए की $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।



उत्तर-

$\triangle ABC$ में

$DE \parallel AC$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC} \ldots (1)$$

$\triangle ABE$ में

$DF \parallel AE$ दिया है।

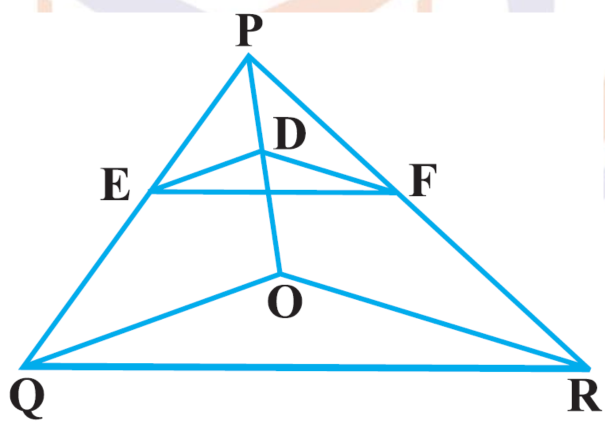
अतः आधरभूतिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FE} \ldots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BF}{EC}$$

प्रश्न 5 आकृति में DE || OQ और OR है दर्शाइय की EF || QR है।



उत्तर-

$\triangle POQ$ में

$DE \parallel OQ$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \ldots (1)$$

$\triangle POR$ में

$DF \parallel OR$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{PF}{ER} = \frac{PD}{DO} \ldots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

इसलिए आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

$EF \parallel QR$

प्रश्न 6 आकृति में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्तिथ बिंदु A, B और C इस प्रकार है की AB || PQ और AC || PR है। दर्शाइए की BC || QR है।

उत्तर-

$\triangle POQ$ में

$AB \parallel PQ$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ} \ldots (1)$$

$\triangle POR$ में

$AC \parallel PR$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \ldots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

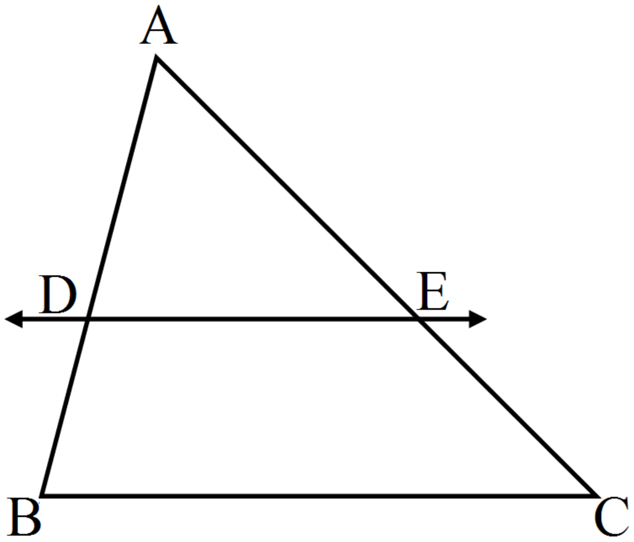
$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

चुकी भुजायए समानुपातिक है।

$BC \parallel QR$ इति सिद्ध

प्रश्न 7 प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है| (याद कीजिए की आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)

उत्तर-



दिया है: ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजा AB का मध्य-बिंदु D है और DE || BC है।

सिद्ध करना है: $\mathrm{AE} = \mathrm{EC}$

प्रमाण: $\triangle \mathrm{ABC}$ में

$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} \ldots (1)$ दिया है।

$\mathrm{DE} \,||\, \mathrm{BC}$ दिया है।

अतः आधरभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से,

$\because \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{CE}}$

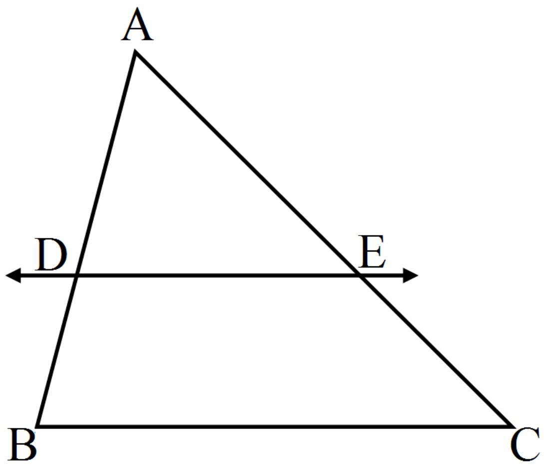
अथवा $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CE}} \ldots (1)$

अथवा $\frac{1}{1} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CE}}$

$\Rightarrow \mathrm{AE} = \mathrm{EC}$ इति सिद्ध

प्रश्न 8 प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए की एक त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है| (याद कीजिए की आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं)

उत्तर-



दिया है: ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजा AB तथा AC का मध्य-बिंदु D क्रमश E है।

सिद्ध करना है: $DE \| BC$

प्रमाण: $\triangle ABC$ में

$$AD = BD \ldots (1)$$

$$AE = EC \ldots (2)$$

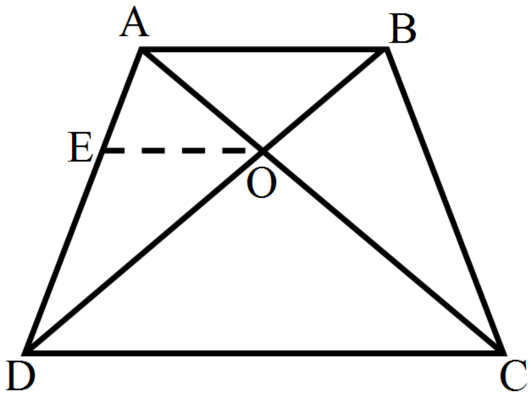
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

अथवा $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AE} = \frac{1}{1}$

समीकरण (1) तथा (2) से,

प्रश्न 9 ABCD एक समलंब है जिसमे AB || DC है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है। दर्शाइ की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

उत्तर-



दिया है: ABCD समलब है जिसमे,

AB || CD है। और विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है।

इसीप्रकार, $\triangle ABD$ में

$$EO \parallel CD \ldots (3)$$

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \ldots (5)$$

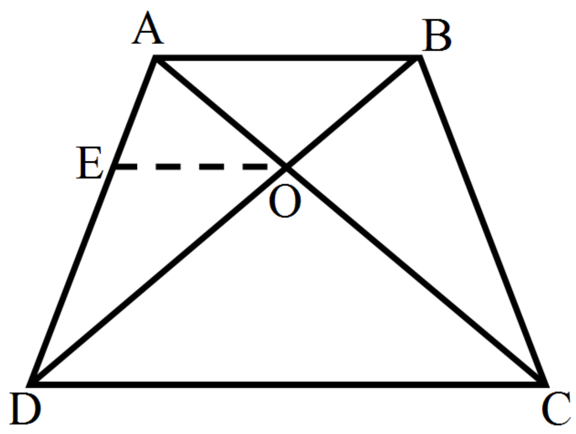
समीकरण (4) तथा (4) से

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

अथवा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ [एकांतरानुवात लगाने पर] इति सिद्ध

प्रश्न 10 एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते है की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए की ABCD एक समलब है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमे विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है।

और $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है

सिद्ध करना है: ABCD एक समलंब है।

रचना: बिंदु O से AB || EO खींचा।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \ldots (1)$$

जबकी, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ [एकांतरानुवात लगाने पर] इति सिद्ध

अथवा $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \ldots (2)$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$$

$\triangle ACD$ की सगत खंड की भुजाये समानुपाती है। इसलिए आधारबुटिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम प्रमेय से,

$$EO \parallel CD \ldots (3)$$

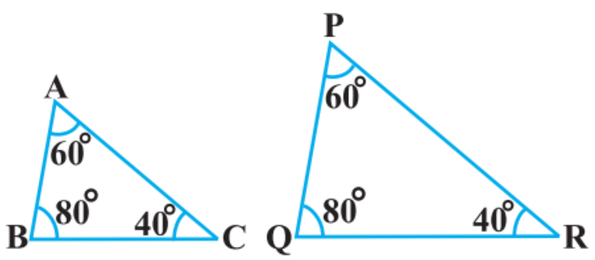
और,

$$AB \parallel CD$$

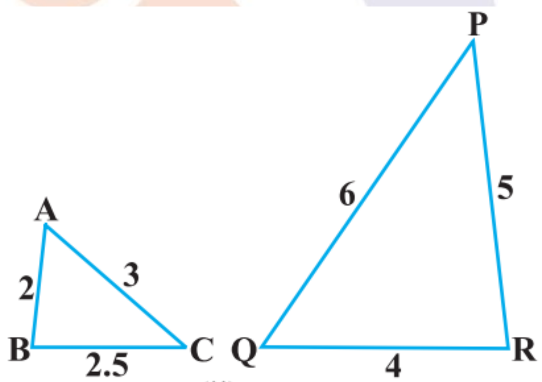
अतः ABCD एक समलब है इति सिद्ध

प्रश्नावली 6.3 (पृष्ठ संख्या 153-155)

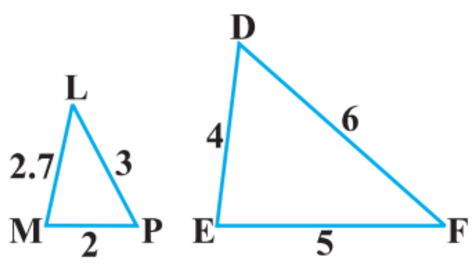
प्रश्न 1 बताइए कि आकृति में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देनें में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए



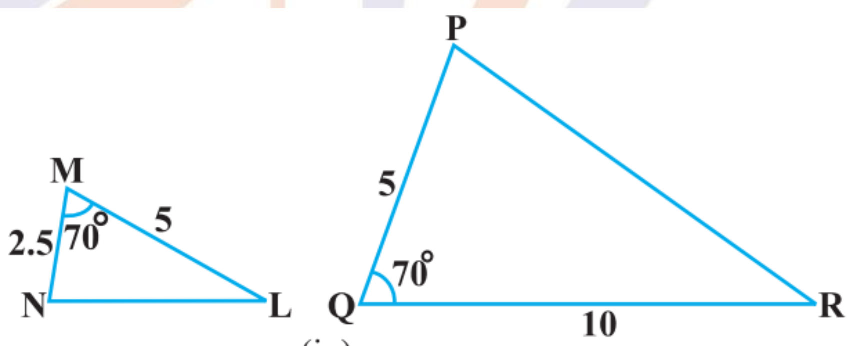
(i)



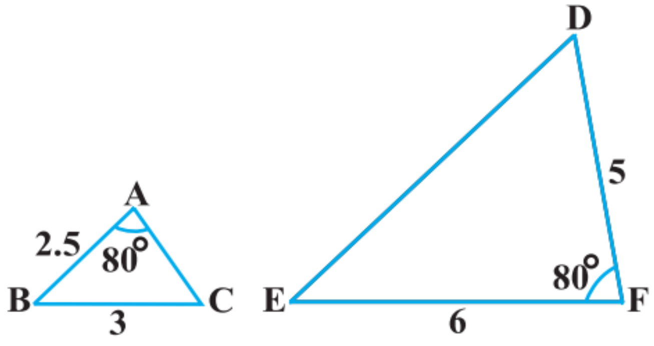
(ii)



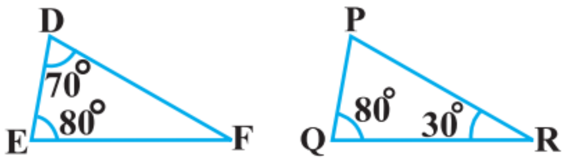
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

उत्तर-

(i)

$\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$\angle ABC = \angle PQR = 80^\circ$

$\angle BAC = \angle QPR = 60^\circ$

$\angle ACB = \angle PQR = 8 = 40^\circ$

$\therefore$ AAA समरूपता कसौटी से

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$

(ii)

$\triangle ABC$ तथा $\triangle QRP$ में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{BC} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ SSS समरूपता कसौटी से

$\triangle ABC \cong \triangle QRP$

(iii) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।
(iv) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।
(v) त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है

(vi)

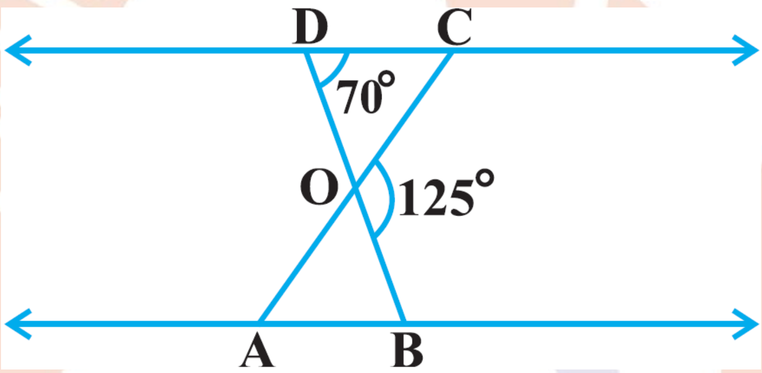
$\triangle ABC$ तथा $\triangle QRP$ में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ SSS समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \cong \triangle QRP$$

प्रश्न 2 आकृति में, △ODC ~ △OBA, △BOC = 125° और ∠CDO = 70° है| ∠DOC, ∠DCO और ∠OAB ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

$$\angle DOC + \angle BOC = 180^\circ \text{ (रैखिक युग्म)}$$

$$\Rightarrow \angle DOC + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 180^\circ = 125^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$$

अब $\triangle DOC$ में,

$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 0 = 180^\circ$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$

$\Rightarrow 125^\circ \angle DCO = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$

$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$

$\triangle ODC \sim \triangle OBA$ (दिया है)

$\therefore \angle OAB = \angle DCO = 55^\circ$

समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं|

प्रश्न 3 ABCD, जिसमे AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए की $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OC}$ है।

उत्तर-

दिया है: समलब ABCD,

जिसमे $AB \parallel CD$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिछेदक करते है।

सिद्ध करना है: $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OC}$

प्रमाण: $AB \parallel CD$ दिया है।

$\therefore \angle ABO = \angle DCO \ldots (1)$

$\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

$\angle ABO = \angle DCO \ldots (1)$

$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

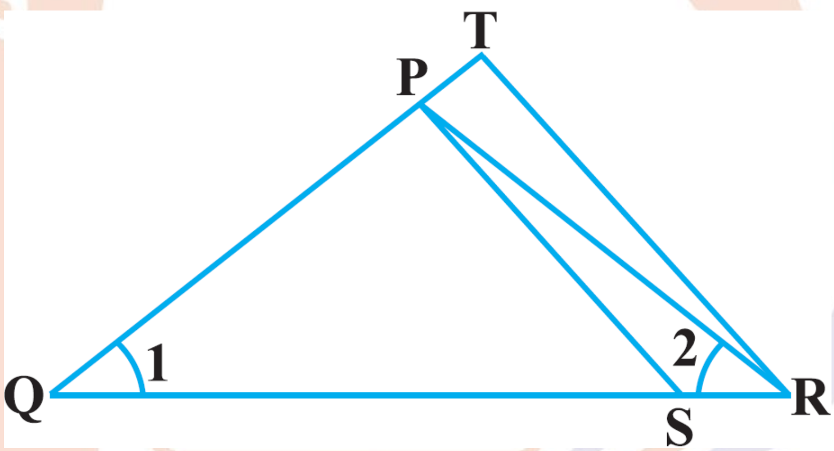
A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle AOB \sim \triangle COD$

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ समरूप त्रिभुज के सगत भुजा समानुपाती होते है।

प्रश्न 4

आकृति 3.36 में $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। दर्शाइए की $\angle PQS \sim \angle TQR$ है।



उत्तर-

दिया है: $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है।

सिद्ध करना है: $\triangle PQS \sim \triangle TQR$

प्रमाण: $\triangle PQR$ में,

$\angle 1 = \angle 2$ (दिया है)

$\therefore PQ = PR$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजा) ...(1)

और $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ दिया है

या $\frac{OR}{OR} = \frac{QT}{PQ}$ समीकरण (1) से...(2)

$\triangle PQS$ तथा $\triangle TQR$

$\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ समीकरण ... (2)

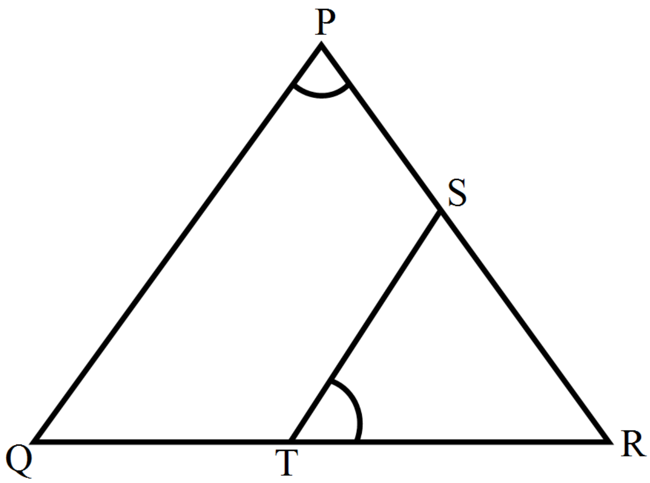
$\angle 1 = \angle 1$

SAS समरूपता कसौटी से

$\triangle PQS \sim \triangle TQR$ इति सिद्ध

प्रश्न 5 DPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमश: बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि ∠P = ∠RTS है दर्शाइए कि △RPQ ~ △RTS है

उत्तर-



दिया है: DPQR की भुजाओं PR और QR पर

क्रमश: बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं

कि $\angle P = \angle RTS$ है

सिद्ध करना है: $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$

प्रमाण: $\triangle RPQ$ तथा $\triangle RTS$ में,

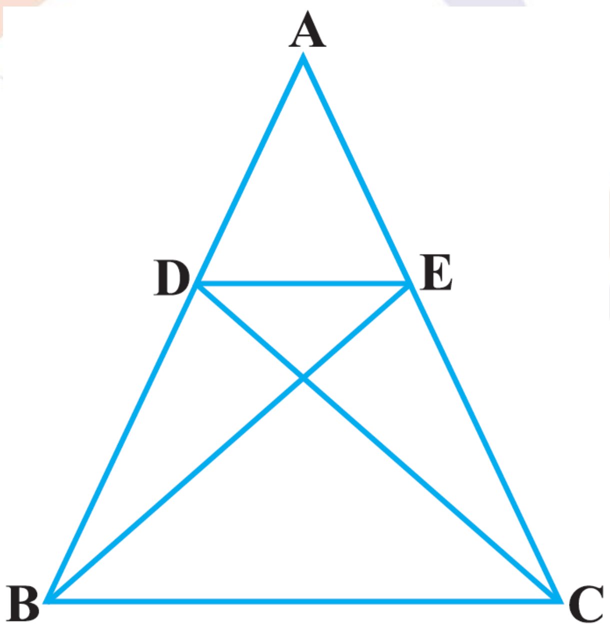
$\angle P = \angle RTS$ (दिया है)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle ROQ \sim \triangle RTS$

प्रश्न 6 आकृति में, यदि $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ है।



उत्तर-

दिया है: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ है

सिद्ध करना है: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

प्रमाण: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ दिया है

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ AE = AD \end{array}\right\}$$

अथवा $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1} \ldots (1)$

$\triangle ADE$ तथा $\triangle ABC$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} \ldots (1)$$

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

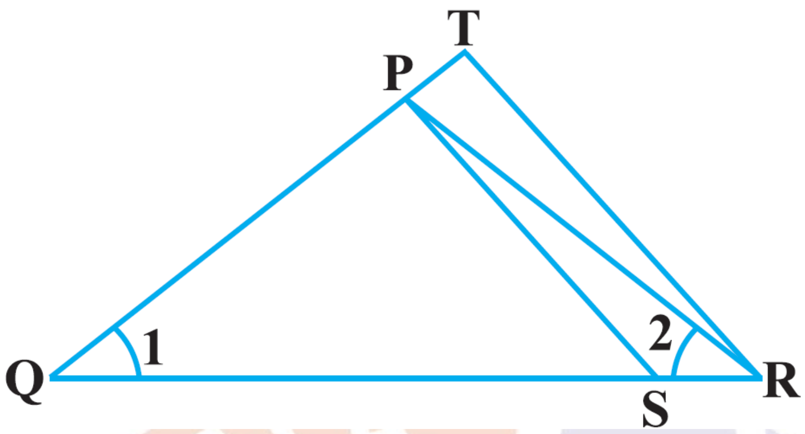
S.A.S समरूपता कसौटी से

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

इति सिद्धम।

प्रश्न 7 आकृति में, DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो दर्शाइए कि:

1. $\triangle AEP \sim \triangle CDP$
2. $\triangle ABD \sim \triangle CBE$
3. $\triangle AEP \sim \triangle ADB$
4. $\triangle PDE \sim \triangle BEC$



उत्तर-

दिया है: DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:

1. $\triangle \mathrm{AEP} \sim \triangle \mathrm{CDP}$
2. $\triangle \mathrm{ABD} \sim \triangle \mathrm{CBE}$
3. $\triangle \mathrm{AEP} \sim \triangle \mathrm{ADB}$
4. $\triangle \mathrm{PDE} \sim \triangle \mathrm{BEC}$

1. $\triangle \mathrm{AEP}$ तथा $\triangle \mathrm{CDP}$ में,

$\angle \mathrm{AEP} = \angle \mathrm{CDP}$ (प्रत्येक 90°)

$\angle \mathrm{APE} = \angle \mathrm{CPD}$ (शीर्षाभिमुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle \mathrm{AEP} \sim \triangle \mathrm{CDP}$

2. $\triangle ABD$ तथा $\triangle CBE$ में

$\angle ADB = \angle CEB$ (प्रत्येक 90°)

$\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle ABD \sim \triangle CBE$

3. $\triangle AEP$ तथा $\triangle ADB$ में

$\angle AEP = \angle ADB$ (प्रत्येक 90°)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle AEP \sim \triangle ADB$

4. $\triangle PDE$ तथा $\triangle BEC$ में

$\angle PDC = \angle BEC$ (प्रत्येक 90°)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle PDE \sim \triangle BEC$

प्रश्न 8 समान्तर चतुर्भुज ABCD की बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है दर्शाइए कि $\triangle ABE \sim \triangle CFB$ है।

उत्तर- दिया है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है|

सिद्ध करना है: $\triangle ABE \sim \triangle CFB$

प्रमाण: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\angle AEB = \angle CBE \ldots (1)$ एकान्तर कोण

$\triangle ABE$ तथा $\triangle CFB$ में,

$\angle AEB = \angle CBE$ समी० (1) से

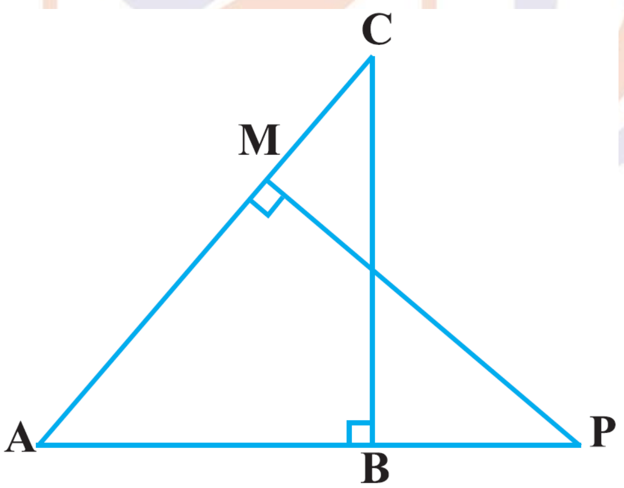
$\angle A = \angle C$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से,

$\triangle ABE \sim \triangle CFB$

प्रश्न 9 आकृति में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं सिद्ध कीजिए कि:

1. $\triangle ABC \sim \triangle AMP$
2. $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



उत्तर- दिया है: ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज है, जिसके कोण B और M समकोण हैं।

सिद्ध करना है:

1. $\triangle ABC \sim \triangle AMP$

2. $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$

1. $\triangle ABC$ तथा $\triangle AMP$

   $\angle ABC = \angle AMP$ (प्रत्येक 90°)

   $\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

   A.A समरूपता कसौटी से

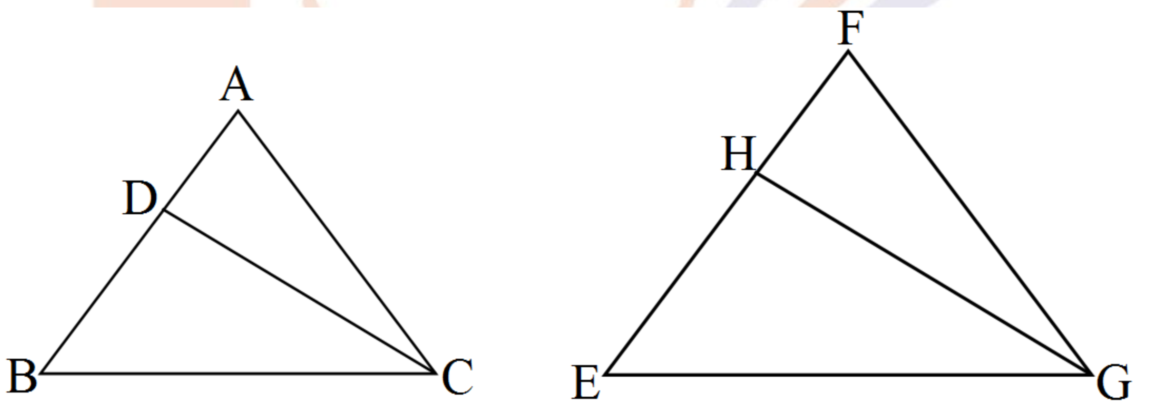
   $\triangle ABC \sim \triangle AMP$

2. $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होतीं है।)

प्रश्न 10 CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं यदि $\triangle ABC \sim \triangle FEG$ है, तो दर्शाइए कि:

1. $\triangle DCB \sim \triangle HGE$
2. $\triangle DCA \sim \triangle HGF$



उत्तर- दिया है: CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं और $\triangle ABC \sim \triangle FEG$ है।

सिद्ध करना है:

1. $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$
2. $\triangle DCB \sim \triangle HGE$
3. $\triangle DCA \sim \triangle HGF$

प्रमाण:

$\triangle ABC \sim \triangle FEG$ दिया है।

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle A \ldots (1) \\ \angle B = \angle E \ldots (2) \\ \angle C = \angle G \ldots (3) \end{array}\right\}$$

(समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं ।)

1. $\triangle DCB$ तथा $\triangle AMP$ में
2. $\triangle DCB$ तथा $\triangle HGE$ में,

$\angle B = \angle E$ समी० (2) से

$\angle BCD = \angle EGH$ [चूँकि $\frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle G$ समी० (3) से]

A.A समरूपता कसौटी से,

$\triangle DCB \sim \triangle HGE$

3. $\triangle DCA$ तथा $\triangle HGF$ में

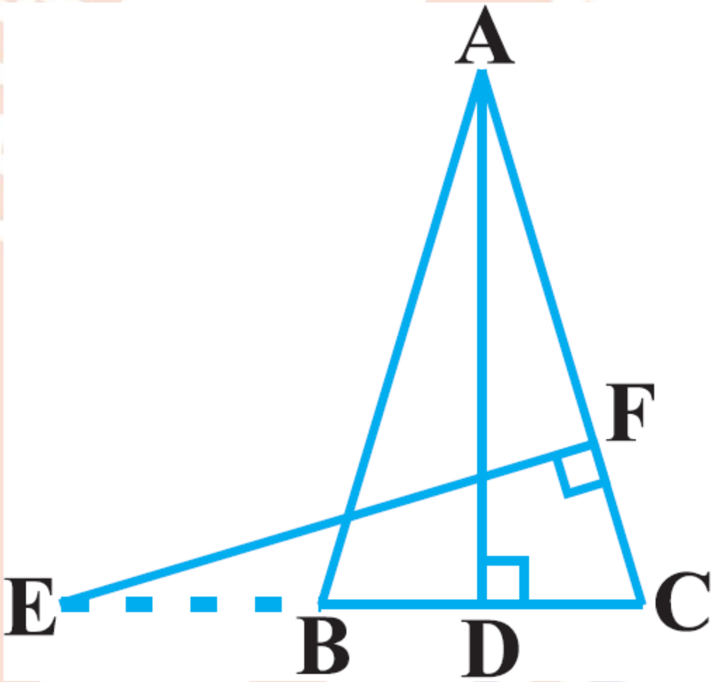
$\angle A = \angle F$ समी. (1) से

$\angle ACD = \angle FGH$ [चूँकि $\frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle G$ समी. (3) से]

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle DCA \sim \triangle HGF$

प्रश्न 11 आकृति में, AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है यदि AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है तो सिद्ध कीजिए कि$\triangle ABD \sim \triangle ECF$ है



उत्तर- दिया है: AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है जिसमें AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है

सिद्ध करना है:

$\triangle ABD \sim \triangle ECF$

प्रमाण:

$\triangle ABC$ में,

$AB = AC$ दिया है;

$\therefore \angle B = \angle C \ldots (1)$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle EFC$ में

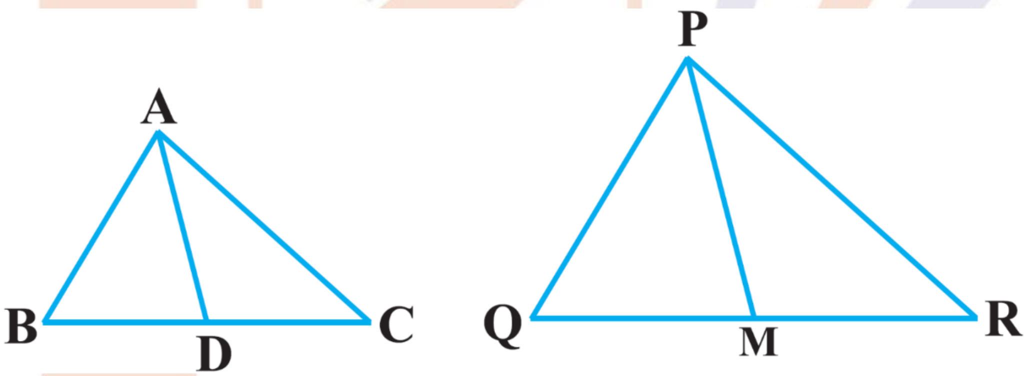
$\angle ADB = EFC$ (प्रत्येक 90°)

$\angle B = \angle C$ समी. (1) से

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle ABD \sim \triangle ECF$ इति सिद्ध

प्रश्न 12 एक त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति) दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है।



उत्तर- दिया है: त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं।

सिद्ध करना है:

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

प्रमाण:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM} \ldots \text{ दिया है}$$

अथवा $\frac{QAB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{AD}{PM}$

अथवा $\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \ldots (1)$

(चूँकि माध्यिकाएँ AD तथा PM BC तथा QR को समद्विभाजित करती हैं)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle PQM$ में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$ समी. (1) से

S.S.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABD \sim \triangle PQM$$

$$\therefore \angle B = \angle Q \ldots (2)$$

अब $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ दिया है

और $\angle B = \angle Q$ समी. (2) से

S.A.S समरूपता कसौटी से

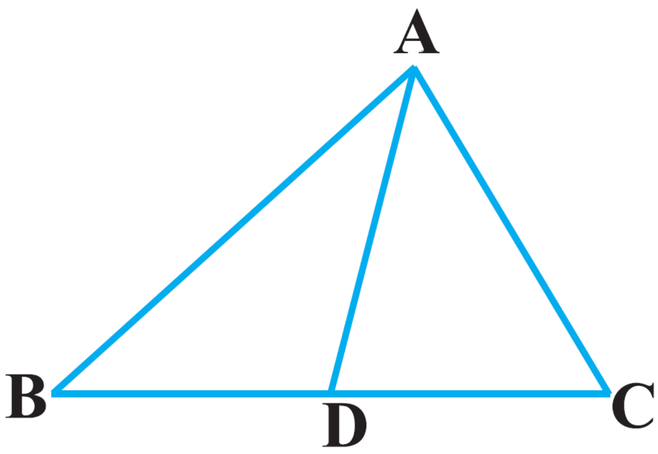
$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

इति सिद्ध।

प्रश्न 13 एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि ∠ADC = ∠BAC है

दर्शाइए कि $CA^2 = CB.CD$ है

उत्तर-



दिया है: त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है।

सिद्ध करना है: $CA^2 = CB.CD$

प्रमाण:

अब, $\angle ADC$ तथा $\triangle BAC$ में

$\angle ADC = \angle BAC$ (दिया है)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

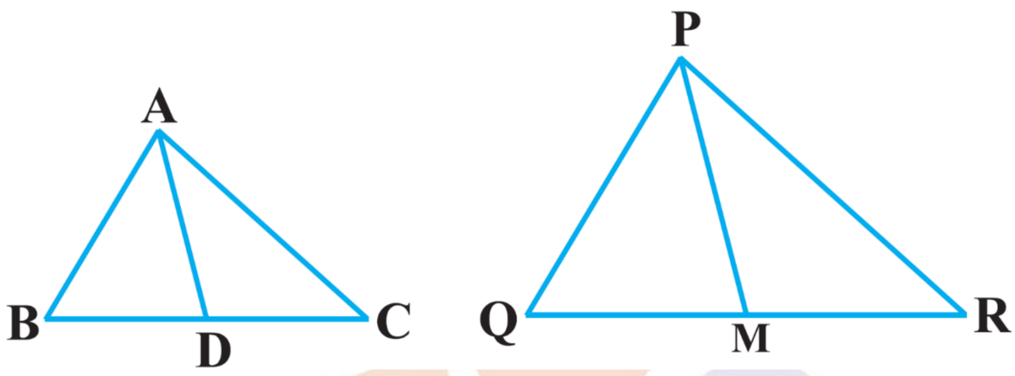
$\triangle ADC \sim \triangle BAC$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होतीं हैं।)

या $CA^2 = CB.CD$ (बाई-क्रॉस गुणा करने पर)

इति सिद्ध

प्रश्न 14 एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है



उत्तर-

दिया है: $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ है और AD तथा PM मध्यिकाये है।

सिद्ध करना है: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

प्रमाण:

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \ldots (1)$ दिया है

यहाँ माध्यिकाएँ समान अनुपात में हैं इसलिए समान अनुपात की माध्यिकायें जिस भुजा को समद्विभाजित करती है वह भी समानुपाती होता है

$\therefore \frac{AD}{PM} = \frac{BC}{QR} \ldots (2)$

समी. (1) तथा (2) से

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} \ldots (3)$

$\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ समी. (3) से

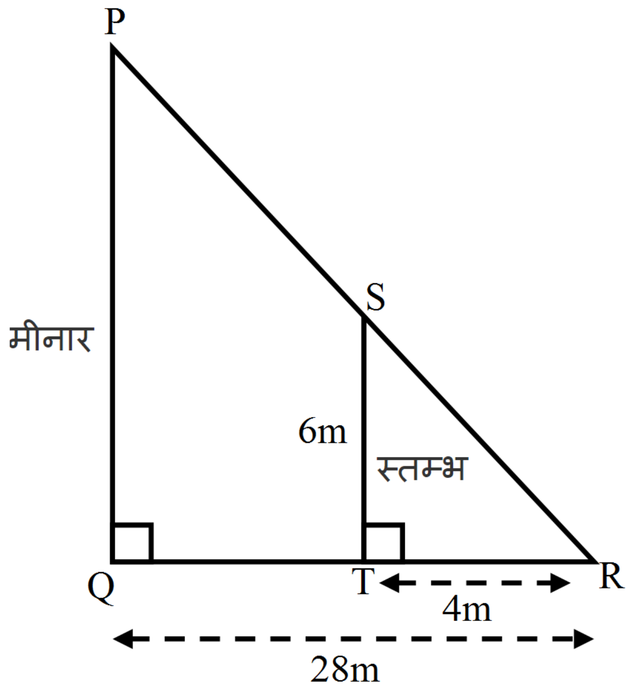
S.S.S समरूपता कसौटी से

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$

इति सिद्ध।

प्रश्न 15 लंबाई 6m वाले एक उध्वाधर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लंबाई 4m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28m है मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए

उत्तर-



माना PQ मीनार है जबकि ST स्तम्भ है। TR स्तम्भ की छाया है और QR मीनार की छाया है

$\triangle PQR$ तथा $\triangle STR$

$\angle PQR = \angle STR$ (प्रत्येक 90°)

$\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle PQR \sim \triangle STR$

$\therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TR}$ (समरूप त्रिभुज के सगत भुजाएं समानुपाती होती है)

$\frac{PQ}{6} = \frac{28}{4}$

$4PQ = 6 \times 28$

$PQ = \frac{6\times28}{4} = 42m$

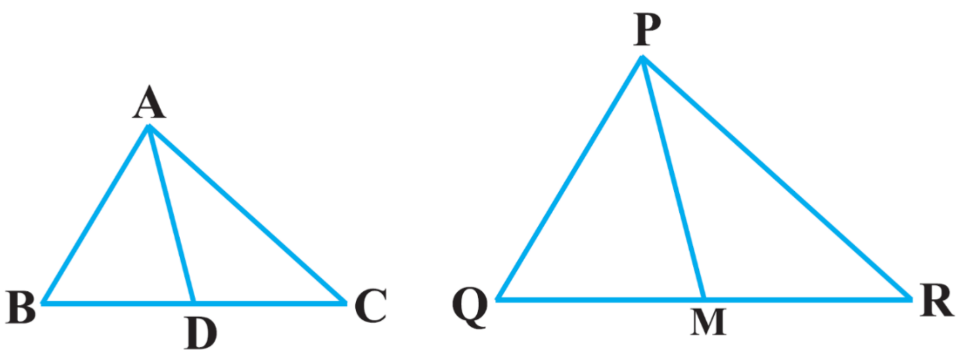
अतः मीनार की उचाई = 42m

प्रश्न 16 AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः महध्यिकाएँ है।

जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है

सिद्ध कीजिए की $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

उत्तर-



दिया है: AD और PM त्रिभुज ABC और PQR की क्रमशः मध्यिकाए है।

जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है

सिद्ध करना है: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \ldots (1)$$

$$\angle B = \angle Q \ldots (2)$$

$\triangle ABD$ तथा $\triangle PQM$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \ldots (1)$$

$$\angle B = \angle Q \ldots (2)$$

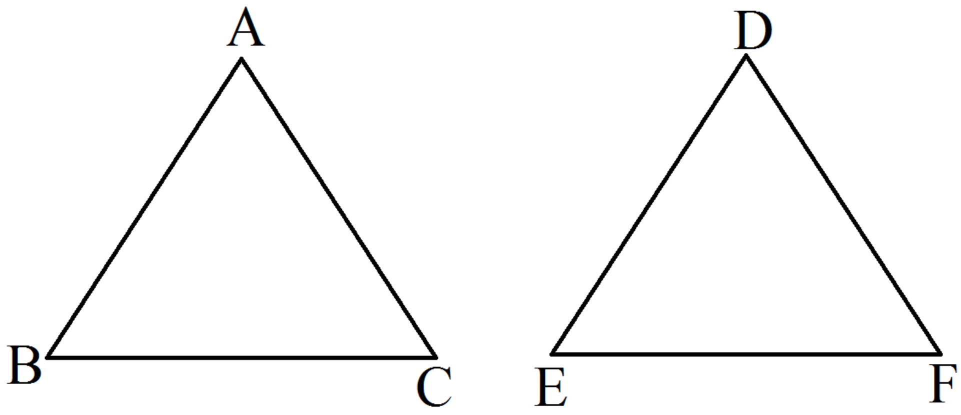
$$\triangle ABD \sim \triangle PQM$$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ इति सिद्धम।

प्रश्नावली 6.4 (पृष्ठ संख्या 158)

प्रश्न 1 मान लीजिए $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः $64cm^2$ और $121cm^2$ हैं यदि EF = $15.4cm^2$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए

उत्तर-



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ दिया है

$\therefore$ प्रमेय 6.6 से

$$\frac{ar(ABC)}{ar(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{64}{121}} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)$$

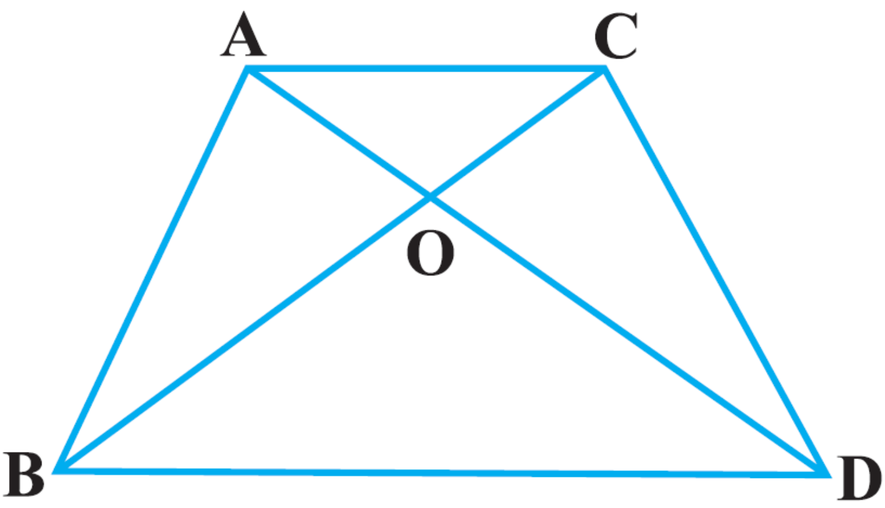
$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

$$11BC = 8 \times 15.4$$

$$BC = \frac{8 \times 15.4}{11}$$

$$= \frac{8 \times 154}{110} = \frac{8 \times 14}{10} = \frac{112}{10} = 11.2$$

प्रश्न 2 एक समलंब ABCD जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं यदि AB = 2CD हो तो $\triangle$AOB और $\triangle$COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए



उत्तर- दिया है: ABCD एक समलंब है जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं और AB = 2CD है

AB = 2CD (दिया है(

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1} \ldots (1)$$

अब, $AB \mid\mid DC$ (दिया है)

$\angle ABO = \angle CDO \ldots (2)$ एकांतर कोण

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$

$\angle AOB = \angle COD$ शीर्षभिमुख कोण

$\angle ABO = \angle CDO$ समीकरण ... (2)

A.A समरूपता कसौटी से

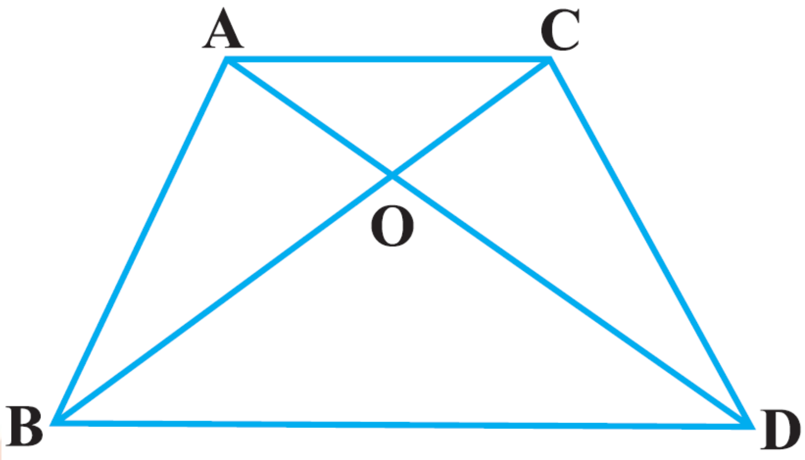
$\triangle AOB \sim \triangle COD$

अतः प्रमेय 6.6 से

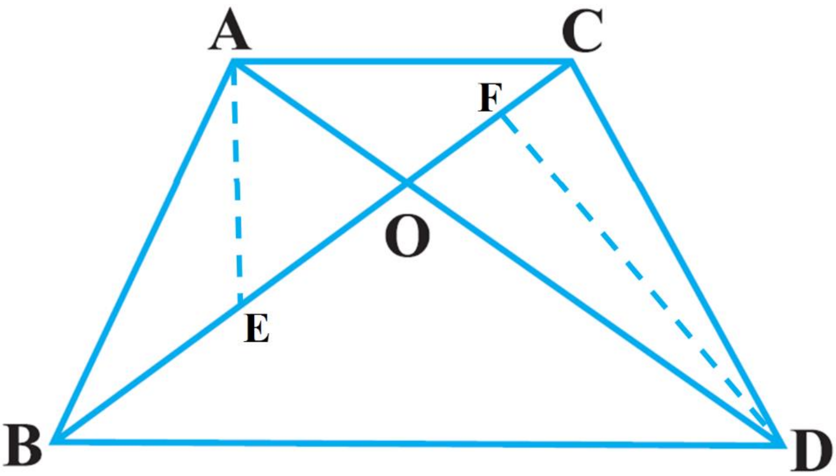
$$\frac{ar(AOB)}{ar(COD)} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1}$$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ के क्षेत्रफल का अनुपात 4 : 1 है।

प्रश्न 3 आकृति में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं यदि AD, BC कोप O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए की $\frac{ae(ABC)}{ae(ABC)} = \frac{AO}{DO}$ है



उत्तर-



हमे प्राप्त है:

$\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ एक आधार BC पर स्थित है।

BC और AD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है। $AE \perp BC$ और $DF \perp BC$ खींचो

अब, AOE में $\angle AEO = 90^\circ$ और

$\triangle DOF$ में, $\angle DFO = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AEO = \angle DFO \ldots (1)$

तथा $\angle AOE = \angle DOF$ [शीर्षाभिमुख कोण] ... (2)

(1) और (2), $\triangle AOB \sim \triangle DOF$

[AAA समरूपता कसौटी से]

$\therefore$ इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती है।

$\Rightarrow \frac{AE}{DF} = \frac{AO}{DO} \ldots (3)$

अब $ar(ABC) = \frac{1}{2}BC \times AE$

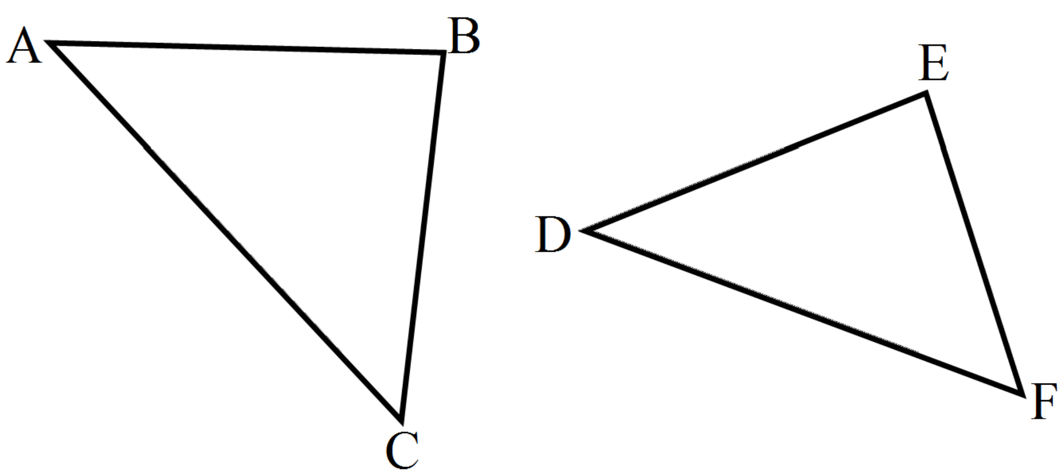
$ar(DBC) = \frac{1}{2}BC \times DF$

$\therefore \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DBC)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AE}{\frac{1}{2} \times BC \times DF} = \frac{AE}{DF}$

(3) और (4) से $\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DBC)} = \frac{AO}{OD} \ldots (4)$

प्रश्न 4 यदि दो समरूप तत्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वान्गसम होते हैं

उत्तर-



हमे प्राप्त है: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ तथा $ar(\triangle ABC) = ar(\triangle DEF)$ चुकी समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलो का

अनुपात उनकी संगत भुजाओं अनुपात वर्ग के बराबर होती है।

$$\therefore \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$$

$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

परन्तु $ar(\triangle ABC) = ar(\triangle DEF)$ [ज्ञात है।]

$$\Rightarrow \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = (1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = 1 \Rightarrow AB = DE$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = 1 \Rightarrow BC = EF$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{DF} = 1 \Rightarrow Ac = DF$$

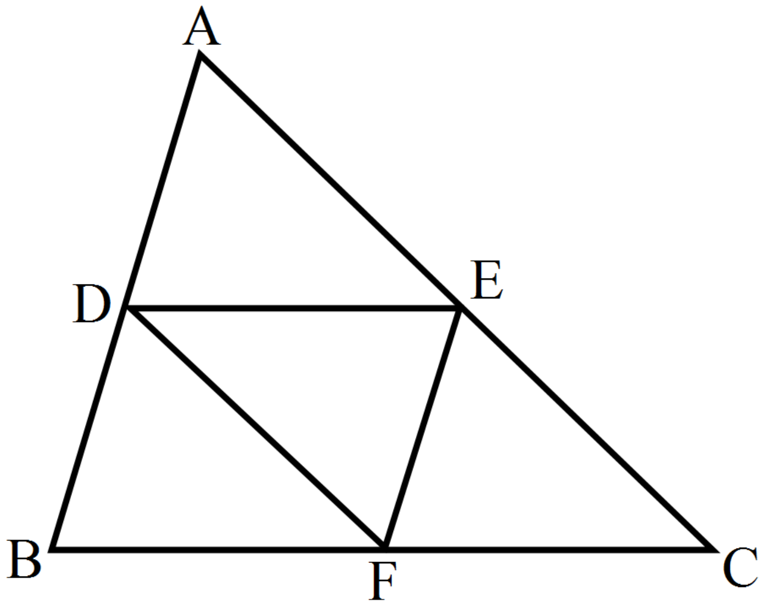
अर्थात $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ की संगत भुजाए समान है।

$$\Rightarrow \triangle ABC \cong DEF$$

[AAA सर्वांगसमता की कसौटी से]

प्रश्न 5 एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB,BC और CA के मध्य-बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं त्रिभुज DEF और त्रिभुज ABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \ldots (1)$

इसी प्रकार, $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \ldots (2)$

(1) और (2) से हमे प्राप्त होता है:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

थेल्स प्रमेय के विलोम का प्रयोग करके हम कह सकते है की $DE \parallel BC$

$\Rightarrow \angle ADE = \angle ABC$ [संगत कोण] ... (3)

और $\angle AED = \angle ACD$ [संगत कोण] ... (4)

(3) और (4) से हमे प्राप्त होता है:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

[AAA समरूपता की कसौटी से]

$$\therefore \frac{\operatorname{ar}(\triangle DEF)}{\operatorname{ae}(\triangle ABC)}=\frac{(DE)^2}{(BC)^2}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \ldots (5)$$

[∵समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है]

परन्तु DE, A ABC की भुजाओं AB और AC के क्रमशः मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा है

$$\therefore DE=\frac{1}{2}BC \ldots (6)$$

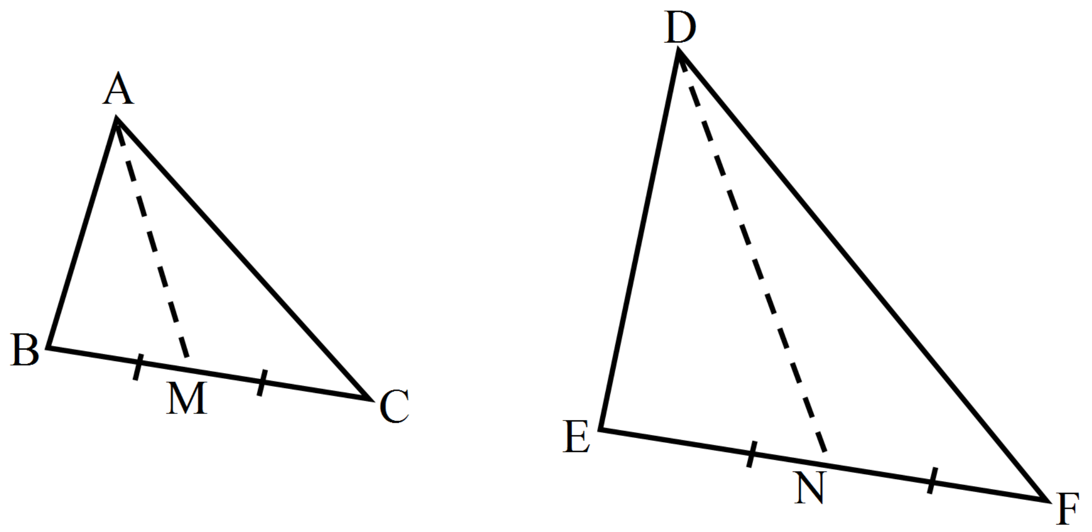
(5) और (6) से हमे प्राप्त होता है:

$$\frac{\operatorname{ar}(\triangle DEF)}{\operatorname{ar}(\triangle ABC)}=\frac{\left(\frac{1}{2}BC\right)^2}{(BC)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ar}(\triangle ABC):\operatorname{ar}(\triangle ABC)=1:4$$

प्रश्न 6 सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।

उत्तर-



$$\therefore \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \ldots(1)$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \ldots(2)$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2MB}{2EN} = \frac{BM}{EN} \ldots(3)$$

$\triangle ABM$ और $\triangle DEN$ में हमे प्राप्त है।

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BM}{EN}$$

$$\angle B = \angle E$$

[समरूप $\triangle$ के संगत कोण]

$\therefore$ SSS सर्वांगसमता की कसौटी से

$$\triangle ABM \sim \triangle DEN$$

$\Rightarrow$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

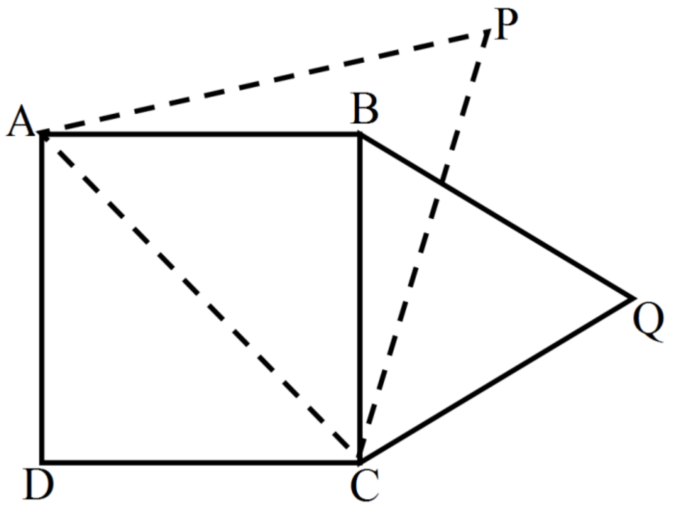
$$\therefore \frac{AB}{DM} = \frac{BM}{EN} = \frac{AM}{DN} \ldots(4)$$

अब (1) और (4) से हमे प्राप्त होता है।

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AM}{DN}\right)^2$$

प्रश्न 7 कीजिए कि दो एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है

उत्तर-



$$\therefore \triangle APC \sim \triangle BQC$$

$\therefore$ इनके क्षेत्रफलो का अनुपात संगत भुजाओ के वर्गो के समान है।

$$\text{i.e., } \frac{ar(\triangle APC)}{ar(\triangle BQC)} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \ldots (1)$$

चुकी एक वर्ग के विकरण की लम्बाई $= \sqrt{2} \times$ भुजा

$$\therefore AC = \sqrt{2} \times BC \ldots (2)$$

(1) और (2) से,

$$\frac{ar(\triangle APC)}{ar(\triangle BQC)} = \left(\frac{\sqrt{2}BC}{BC}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

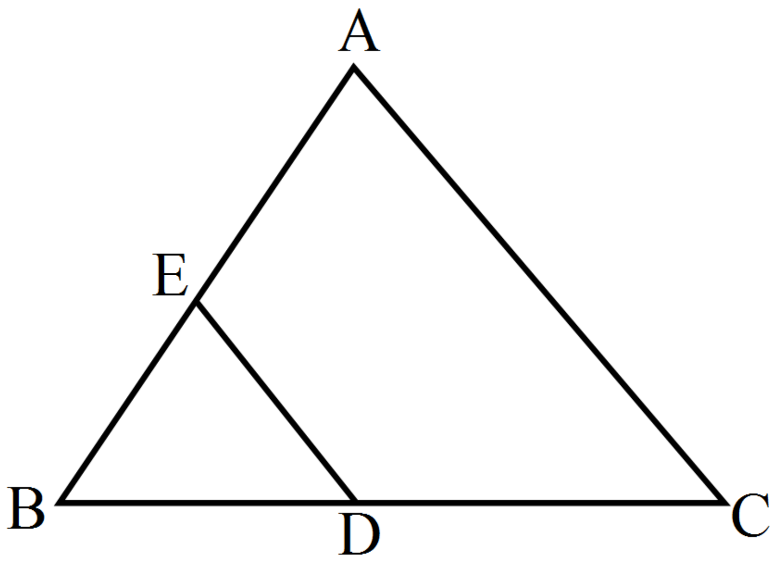
$$\Rightarrow ar(\triangle BQC) = \frac{1}{2} ar(\triangle APC)$$

प्रश्न 8 ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कोई भुजद BC का मध्य-बिन्दु है त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

a. 2 : 1
b. 1 : 2
c. 4 : 1
d. 1 : 4

उत्तर-

c. 4 : 1



चूंकि सभी समबाहु त्रिभुजें समरूप होती हैं।

$$\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{BDE}$$

इनके क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।

$$\therefore \frac{\mathrm{ar}(\triangle \mathrm{ABC})}{\mathrm{ar}(\triangle \mathrm{BDE})} = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\right)^2 \ldots (1)$$

$\because AB = AC = BC$

[समबाहु $\triangle ABC$ की भुजाए]

और $BD = \frac{1}{2}BC$

[BC का मध्य बिंदु D है]

$\Rightarrow BC = 2BD = AB \ldots (2)$

(1) और (2) से,

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle BDE)} = \left(\frac{2BD}{BD}\right) = \frac{2^2}{1^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore ar(\triangle ABC) : ar(\triangle BDE) = 4 : 1$

प्रश्न 9 दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 9 के अनुपात में हैं इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

a. 2 : 3
b. 4 : 9
c. 81 : 16
d. 16 : 81

उत्तर-

d. 16 : 81

$$\therefore \frac{\text{क्षेत्रफल - }(\Delta - \mathrm{I})}{\text{क्षेत्रफल - }(\Delta - \mathrm{II})} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल ($\triangle$–I) क्षेत्रफल ($\triangle$–II) = 16 : 81

प्रश्नावली 6.5 (पृष्ठ संख्या 164-166)

प्रश्न 1 कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।

(i) 7cm, 24cm, 25cm

(ii) 3cm, 8cm, 6cm
(iii) 50cm, 80cm, 100cm
(iv) 13cm, 12cm, 5cm

उत्तर-

(i) $\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$

$25^2 = 7^2 + 24^2$

$625 = 49 + 576$

$625 = 625$

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की है।

अत :कर्ण = 25cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है(

(ii) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$

$8^2 = 3^2 + 6^2$

$64 = 9 + 36$

$64 = 45$

चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर नहीं है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की नहीं है।

(iii) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$

$100^2 = 50^2 + 80^2$

$10000 = 2500 + 6400$

$10000 = 8900$

(iv) निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

कर्ण^2 = लंब^2 + आधार^2

$13^2 = 5^2 + 12^2$

$169 = 25 + 144$

$169 = 169$

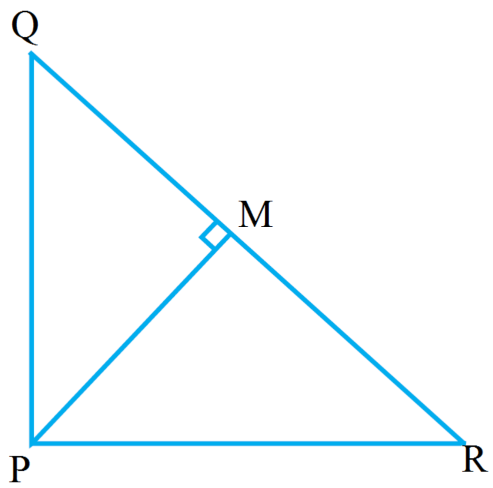
चूँकि वायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की है।

अत :कर्ण = 13cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है(

प्रश्न 2 PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि PM ⊥ QR है दर्शाइए कि PM^2 = QM.MR है।

उत्तर-



दिया है: PQR एक समकोण त्रिभुज है

जिसका कोण P समकोण है तथा QR

पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $\mathrm{PM} \perp \mathrm{QR}$ है

सिद्ध करना है: $\mathrm{PM}^2 = \mathrm{QM}.\mathrm{MR}$

प्रमाण: $\mathrm{PM} \perp \mathrm{QR}$ दिया है

इसलिए प्रमेय 6.7 से

$$\triangle PMQ \sim \triangle PRQ \ldots (1)$$

इसी प्रकार,

$$\triangle PMQ \sim \triangle PRQ \ldots (1)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

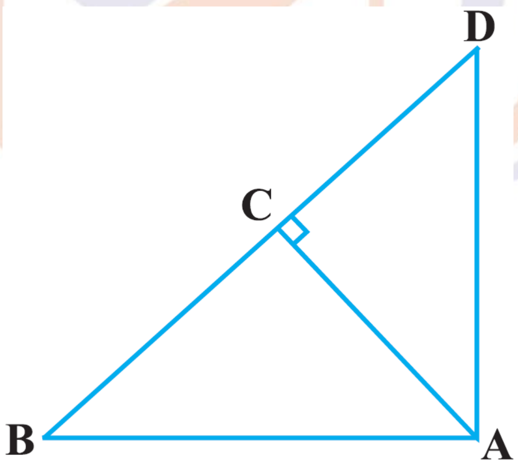
$$\triangle PMQ \sim \triangle PMR$$

अतः $\dfrac{PM}{QM} = \dfrac{MR}{PM}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाए समानुपाती होती है।)

$$\therefore PM^2 = QM.\ MR$$

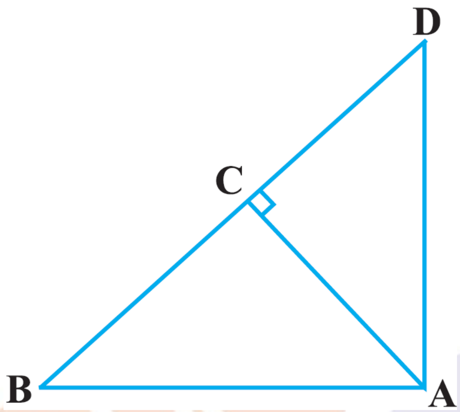
प्रश्न 3 आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा AC ⊥ BD है दर्शाइए कि:

a. AB^2 = BC.BD
b. AC^2 = BC.DC
c. AD^2 = BD.CD



उत्तर- ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा AC ⊥ BD है

सिद्ध करना है:



1. AB^2 = BC.BD
2. AC^2 = BC.DC
3. AD^2 = BD.CD

प्रमाण: (1) ABD एक समकोण त्रिभुज है और $AC \perp BD$ दिया है

1. $\triangle AB^2 \sim \triangle ABD$ प्रमेय

अतः $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाए समानुपाती होती है।)

$\therefore AB^2 = BC.BD$ इति सिद्धम।

2. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$

अतः $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाए समानुपाती होती है।)

$\therefore AC^2 = BC.DC$ इति सिद्धम।

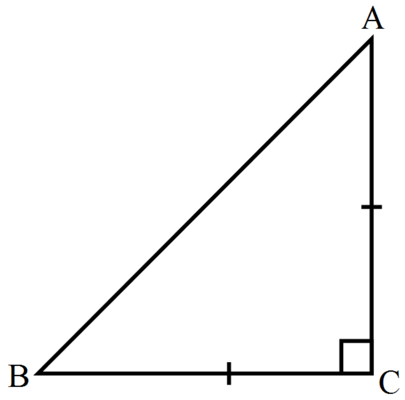
3. $\triangle ACD \sim \triangle ABD$

अतः $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाए समानुपाती होती है।)

$\therefore AD^2 = BC.CD$ इति सिद्धम।

प्रश्न 4 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

जिसका कोण C समकोण है

सिद्ध करना है: $AB^2 = 2AC^2$

प्रमाण: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

$AC = BC \ldots (1)$

और ABC एक समकोण त्रिभुज है

पाइथागोरस प्रमेय से

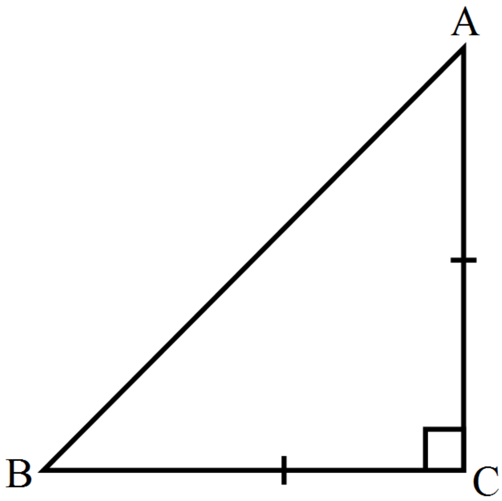
$AB^2 = BC^2 + AC^2$

अथवा $AB^2 = AC^2 + AC^2$ (समी. 1 से)

अथवा $AB^2 = 2AC^2$ इति सिद्धम।

प्रश्न 5 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AC = BC है यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है

उत्तर-



दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

जिसमें AC = BC है और $AB^2 = 2AC^2$ है।

सिद्ध करना है: ABC एक समकोण त्रिभुज है।

प्रमाण: AC = BC ..... (1) दिया है।

और $AB^2 = 2AC^2$ ..... (दिया है।(

अथवा $AB^2 = AC^2 + AC^2$

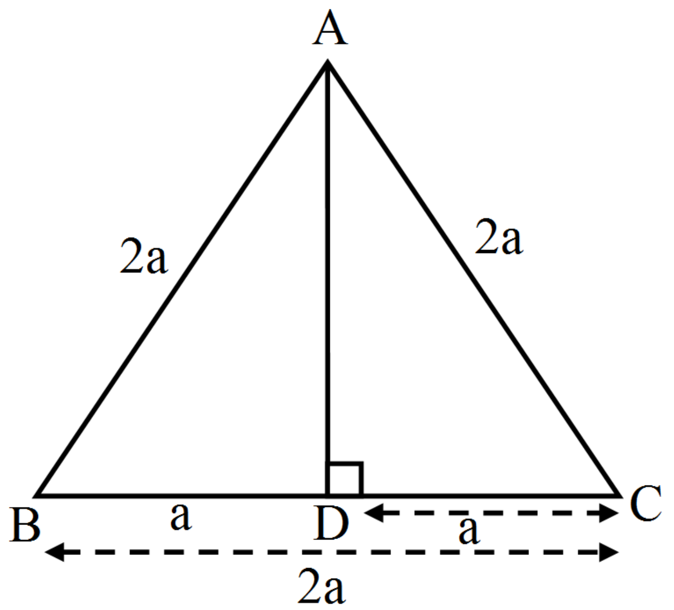
अथवा $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (समी. 1 से(

अत :पाइथागोरस प्रमेय के विलोम) प्रमेय 6.9) से

ABC एक समकोण त्रिभुज है। इति सिद्धम।

प्रश्न 6 एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है

AB = BC = AC = 2a

रचना: AD ⊥ BC डाला

अत :समकोण त्रिभुज ACD में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$(2a) = AD^2 + (a)^2$$

$$4a^2 = AD + a^2$$

$$AD^2 = 4a^2 - a^2$$

$$AD^2 = 3a^2$$

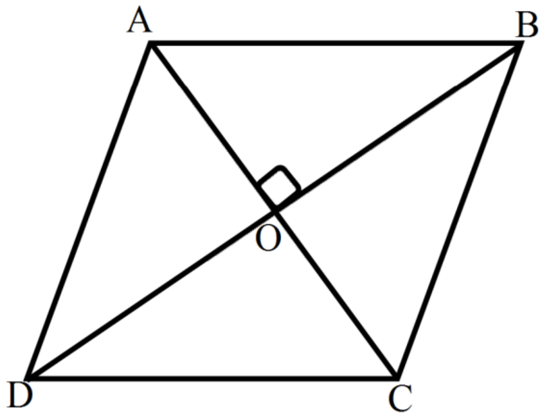
$$AD = \sqrt{3a^2}$$

$$AD = \alpha\sqrt{3}$$

प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई $\alpha\sqrt{3}$

प्रश्न 7 सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर-



दिया है: ABCD एक समचतुर्भुज है जिसकी

भुजाएँ AB, BC, CD तथा AD है और विकर्ण

AC तथा BD एक दुसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं

सिद्ध करना है: $AB^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

प्रमाण: समचतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं इसलिए,

समकोण $\triangle AOB$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 \ldots (1)$$

इसी प्रकार $\triangle BOC$, $\triangle COD$ और $\triangle AOB$ में,

$$BC^2 = CO^2 + BO^2 \ldots (2)$$

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 \ldots (3)$$

$$AD^2 = AO^2 + DO^2 \ldots (4)$$

समी. (1), (2), (3) और (4) जोड़ने पर

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

$$= AO^2 + BO^2 + CO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + AO^2 + DO^2$$

$$= 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right) + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{2}BD^2\right]$$

$$= 2 \times \frac{1}{4}[AC^2 + BD^2 + AC^2 + BD^2]$$

$$= \frac{1}{2}[2AC^2 + 2BD^2]$$

$$= \frac{1}{2} \times 2[AC^2 + BD^2]$$

$$= AC^2 + BD^2$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$ इति सिद्धम।

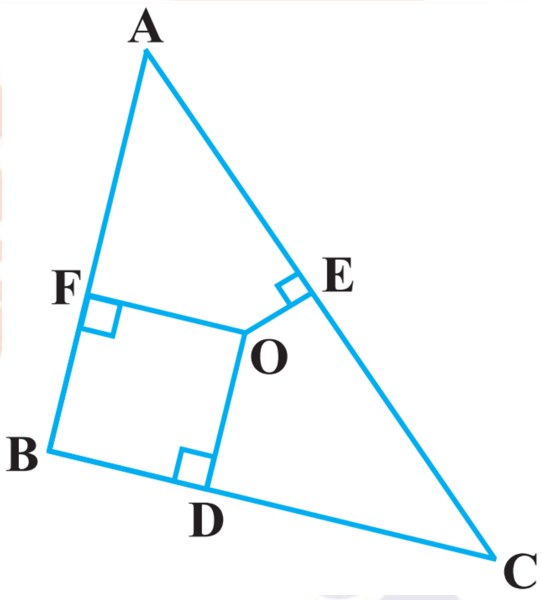
प्रश्न 8 आकृति में $\triangle ABC$ के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp$

AB है

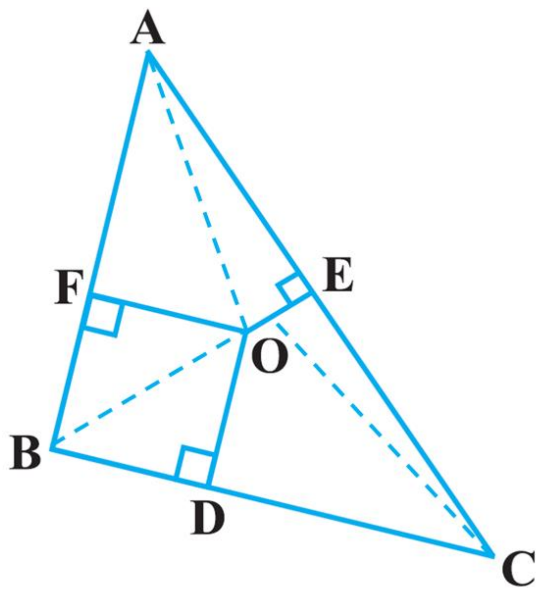
दर्शाइए कि,

$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

$AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF$



उत्तर-



दिया है: $\triangle ABC$ के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है।

सिद्ध करना है:

1. $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$
2. $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$

प्रमाण:

समकोण $\triangle AOF$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = AF^2 + OF^2$ .....(i)

समकोण $\triangle BOD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OB^2 = BD^2 + OD^2$ .....(II)

समकोण ΔCOE में, पाइथागोरस प्रमेय से

$OC^2 = CE^2 + OE^2$ .....(III)

समीकरण (I), (II) तथा (III) को जोड़ने पर

$OA^2 + OB^2 + OC^2 = AF^2 + OF^2 + BD^2 + OD^2 + CE^2 + OE^2$

$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$ इति सिद्धम।

अब, पुन:

$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

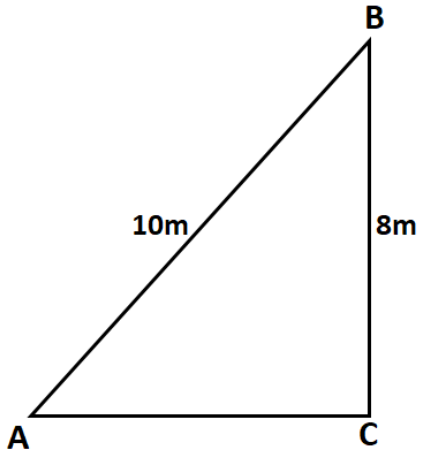
या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$

या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = (OA^2 - OE^2) + (OB^2 - OF^2) + (OC^2 - OD^2)$

या $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ पाइथागोरस प्रमेय से

प्रश्न 9 10m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



AB एक 10m लम्बी सीढ़ी है जिसे दीवार BC पर टिकाया गया है। दीवार पर स्थित खिड़की B दीवार पर उसके आधार से 8m की ऊँचाई तक जाती है। सीढ़ी का निचला सिरा A दीवार के आधार C से AC की दूरी पर है।

अब समकोणΔ BCA में, $\angle C = 90°$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से[

$AC^2 = (10)^2 - (8)^2$

$= 100 - 64$

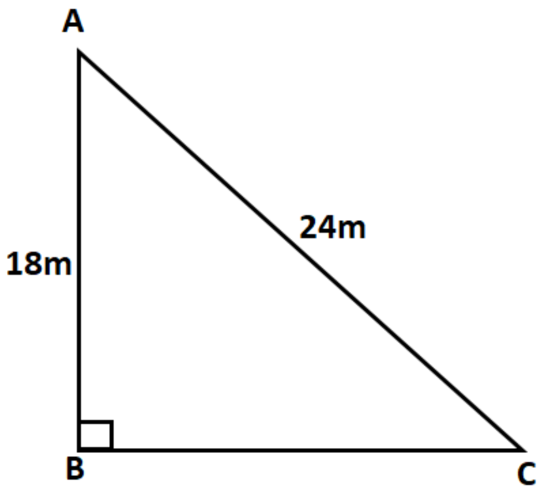
$= 36$

$AC^2 = \sqrt{36} = 6$ m

अतः सीढ़ी के निचले सिरे की दीवार के आधार से अभीष्ट दूरी = 6 m है।

प्रश्न 10 18m ऊंचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूटे को कितनी दूरी पर गाडा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24m है।

उत्तर-



एक ऊर्ध्वाधर खम्भा AB = 18 m है जो सिरे A से एक तार AC = 24 m से एक खूटे C से जुड़ा है। खम्भे के आधार B से खूटे C की दूरी BC है।

अब समकोणΔ ABC में पाइथागोरस प्रमेय से, चूँकि

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$BC^2 = (24)^2 - (18)^2$

$BC^2 = 576 - 324$

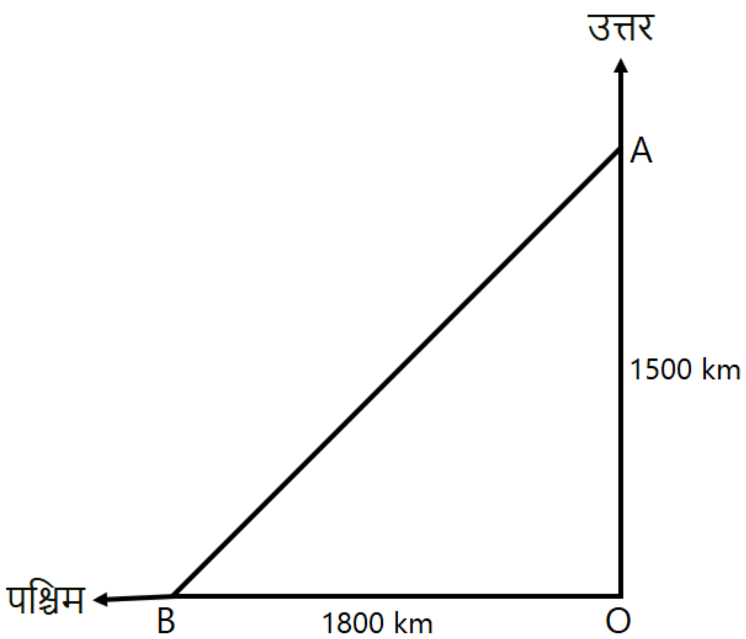
$= 252$

$BC = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$ m

अतः खूटे की खम्भे के आधार से अभीष्ट दूरी= $6\sqrt{7}$ m.

प्रश्न 11 एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 km/ hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 km/ hr की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

उत्तर-



पहले हवाई जहाज द्वारा $1\frac{1}{2}$, घण्टे में उत्तर की ओर चली गई दूरी $= \frac{3}{2} \times 1000 = 1500 km$ तथा

दूसरे हवाई जहाज द्वारा $1\frac{1}{2}$ घण्टे में पश्चिम की ओर चली गई दूरी $= \frac{3}{2} \times 1200 = 1800$ km जहाज A और B की स्थिति $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद दूरी की संलग्न आकृति में प्रदर्शित की गई है तथा उनके बीच की दूरी AB है।

चूँकि समकोण त्रिभुज AOB में∠ AOB समकोण है।

$AB^2 = (AO)^2 + (BO)^2$

पाइथागोरस प्रमेय से[

$AB^2 = (1500)^2 + (1800)^2$

$= 2250000 + 3240000$

$= 5490000$

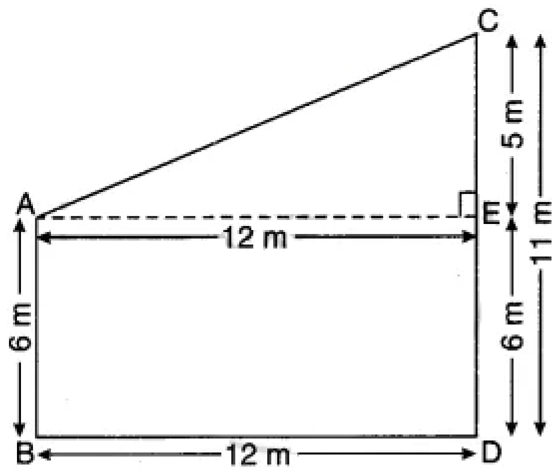
$AB = \sqrt{5490000} = \sqrt{90000 \times 61}$

$= 300\sqrt{61}$ km

अतः दोनों हवाई जहाजों के बीच की अभीष्ट दूरी = $300\sqrt{61}$ km है।

प्रश्न 12 दो खंभे जिनकी ऊँचाईयाँ 6m और 11m हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके पाद बिंदुओं के बीच की दूरी 12m है तो इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दो खंभे AB = 6m एवं CD = 11m समतल भूमि पर दूरी BD = 12m पर स्थित है उनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी AC है।) देखिए संलग्न आकृति (E से AE ⊥ CD खींचिए।

अब समकोण∆ AEC में,

भुजा AE = BD = 12 m एवं ED = AB = 6 m

एवं CD = 11 m

CE = CD – ED

= 11 m – 6 m

= 5m

अब समकोण∆ AEC में) जहाँ∠ AEC = 90°),

$AC^2 = AE^2 + CE^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से[

$AC^2 = (12)^2 + (5)^2$

$= 144 + 25$

$= 169$

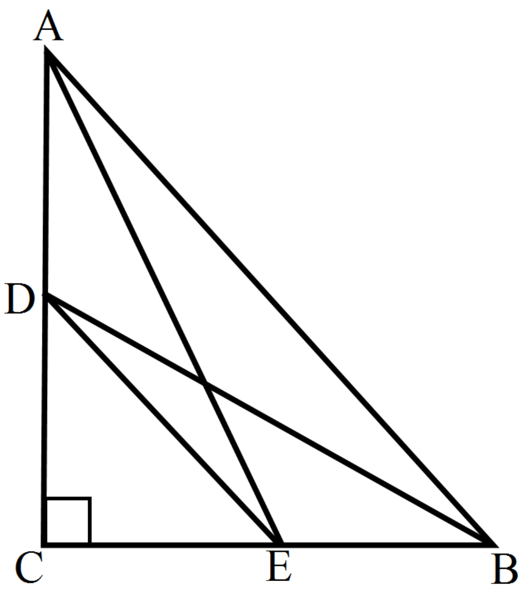
$AC = \sqrt{169} = 13m$

अतः खम्भों के ऊपरी सिरे के बीच की अभीष्ट दूरी = 13m है।

प्रश्न 13 किसी त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमश: बिंदु D औए E स्थित है

सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है

उत्तर-



दिया है :त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है की भुजाओ CA और CB पर क्रमश :बिंदु D और स्थित है।

सिद्ध करना है:

$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

रचना :D को E से मिलाया

प्रमाण :समकोण $\triangle ACE$ में पाईथागोरस प्रमेय से

$AE^2 = AC^2 + CE^2$ .....(1)

इसीप्रकार,

समकोण △BCD में, पाईथागोरस प्रमेय से

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ .....(2)

समीकरण) 1) तथा) 2) को जोड़ने पर

$AE^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 + BC^2 + CD^2$

$AE^2 + BD^2 = (AC^2 + BC^2) + (CE^2 + CD^2)$

AE2 + BD2 = AB2 + DE2

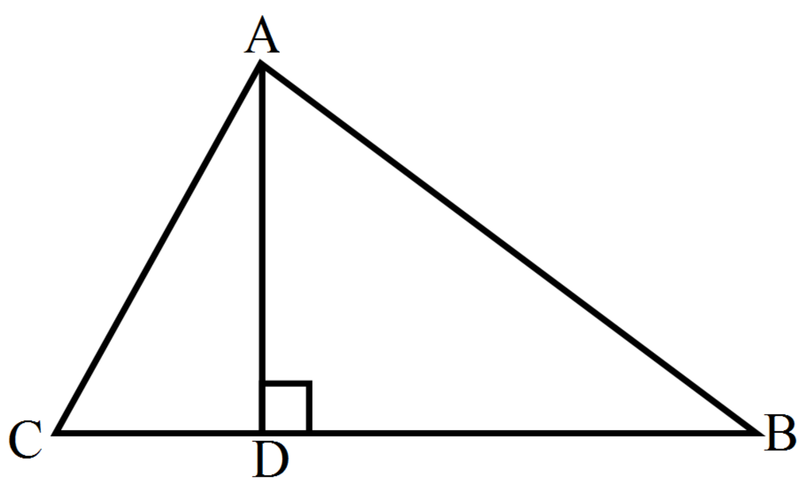
पाईथागोरस प्रमेय से,

[$\because AB^2 = AC^2 + BC^2$ और $DE^2 = CE^2 + CD^2$]

प्रश्न 14 किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लंब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि DB = 3CD है

सिद्ध कीजिए कि : $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है

उत्तर-



दिया है: ABC का त्रिभुज है जिससे $AD \perp BC$ है तथा $DB = 3CD$ है।

सिद्ध करना है:

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$

प्रमाण:

$$CD = BC - BD$$

$$CD = BC - 3CD$$

$$4CD = BC$$

$$CD = \frac{BC}{4} \ldots (1)$$

$DB = 3CD$ दिया है।

$$DB = \frac{3BC}{4} \ldots (2)$$

समकोण $\triangle ACD$ पाईथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$AD^2 = AC^2 - CD \ldots (3)$$

समकोण $\triangle ABD$ पाईथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 - CD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2 + \left(\frac{3BC}{4}\right)^2$$

$$AB^2 = AC^2 - \frac{BC^2}{16} + \frac{9BC^2}{16}$$

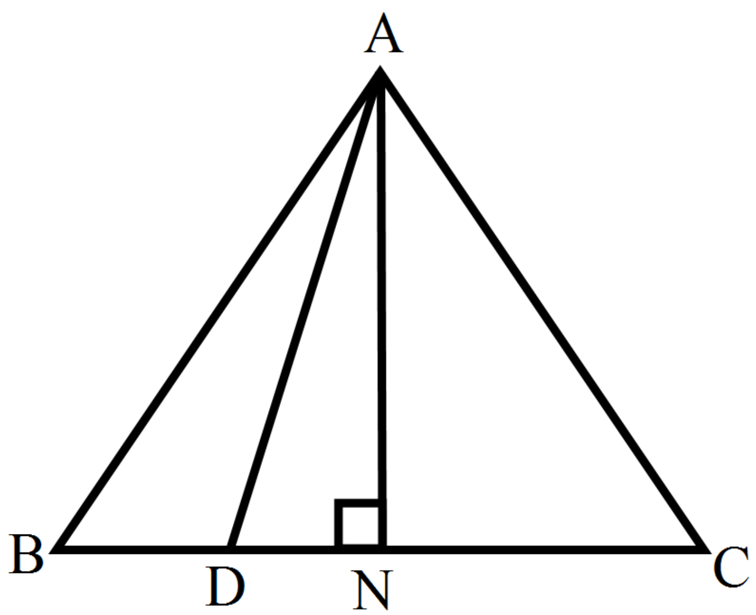
$$AB^2 = AC^2 + \frac{8BC^2}{16}$$

$$AB^2 = AC^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ इति सिद्धम।

प्रश्न 15 किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है की BD = $\frac{1}{3}$BC है। सिद्ध कीजिए की $9AD^2 = 7AB^2$ है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

जिसमे $BD = \frac{1}{3} = BC$ है।

सिद्ध करना है: $9AD^2 = 7AB^2$

रचना: $AN \perp BC$ खींचा।

प्रमाण:

$BD = \frac{1}{3}BC \ldots (1)$ दिया है।

$BN = \frac{1}{2}BC \, [\because AN \perp BC] \ldots (2)$

$DN = BN - BD$

$= \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC$

$= \frac{3BC - 2BC}{6} = \frac{BC}{6}$

समकोण $\triangle ADN$ में पाईथागोरस प्रमेय से,

$AB^2 = AN^2 + BN^2$

$AB^2 = (AD^2 - DN^2) + BN^2$ समी. (1) से

$AB^2 = AD^2 = \left(\frac{BC}{6}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

$AB^2 = AD^2 - \frac{BC^2}{36} + \frac{BC^2}{4}$

$$AB^2 = AD^2 - \frac{BC^2+9BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{8BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{2BC^2}{9}$$

$$9AB^2 = 9AD^2 + 2BC^2$$

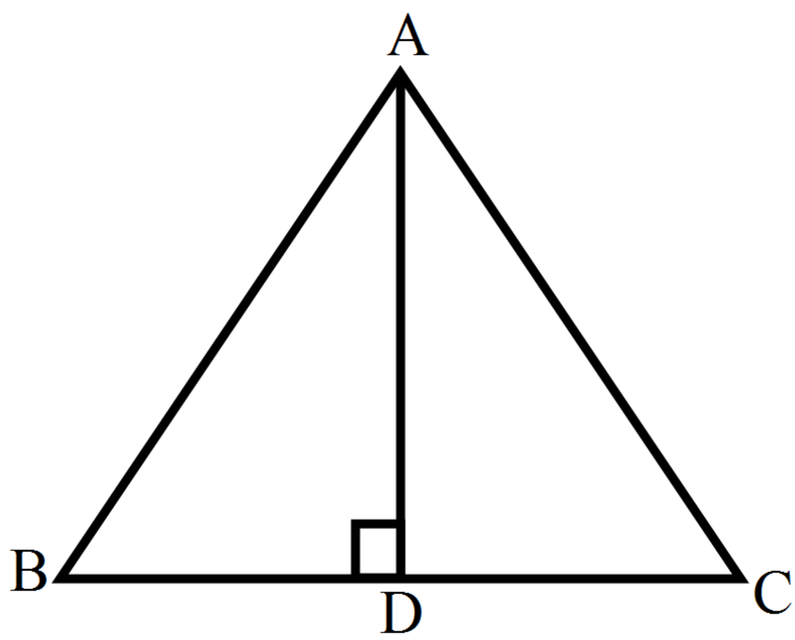
$$9AB^2 = 9AD^2 + 2AB^2$$

$$9AB^2 - 2AB^2 = 9AD^2$$

$$7AB^2 = 9AD^2$$

प्रश्न 16 किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

उत्तर-



दिया है: ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

जिसमे $AD \perp BC$ है।

सिद्ध करना है: $3AB^2 = 4AD^2$

प्रमाण: समकोण त्रिभुज ABD में पाईथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 [\because DB = \tfrac{1}{2}BC]$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{BC^2}{4}$$

$$4AB^2 = 4AD^2 + BC^2$$

$$4AB^2 = 4AD^2 + AB^2 [\because AB = BC]$$

$$4AB^2 - AB^2 = 4AD^2$$

$$3AB^2 = 4AD^2$$

प्रश्न 17 सही उत्तर चुनकर उसका औचित्य दीजिए $\triangle ABC$ में AB = $6\sqrt{3}$ cm, AC = 12cm और BC = 6cm है कोण B है।

a. 120°
b. 60°
c. 90°
d. 45°

उत्तर-

c. 90°

सही उत्तर 90° है, क्योंकि

$(AB)^2 = (6\sqrt{3})2 = 108$

$(AC)^2 = (12)^2 = 144$

$(BC)^2 = (6)^2 = 36$

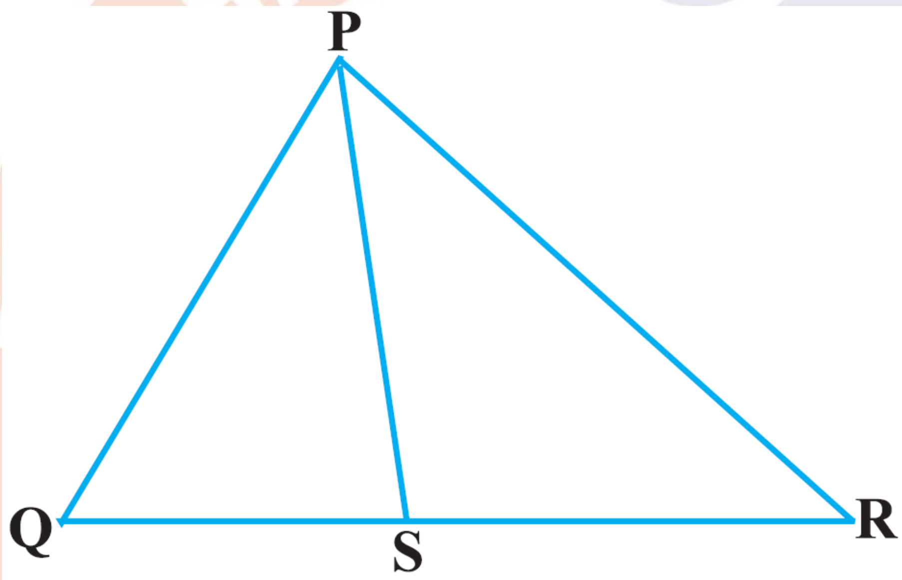
$\Rightarrow 108 + 36 = 144$

$\Rightarrow (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

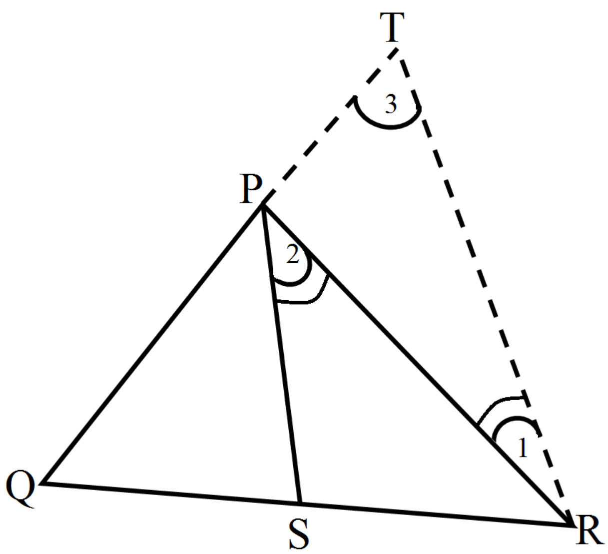
$\Rightarrow \angle B = 90°$ समकोण].... पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा[

प्रश्नावली 6.6 (पृष्ठ संख्या 166-168)

प्रश्न 1 आकृति में PS कोण QPR का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ है।s



उत्तर-



हमे प्राप्त है: $\triangle PQR$ जिसमे $\triangle QPR$ का समद्विभाजक PS है।

$\therefore \angle QPS = \angle RPS$

रचना: $RT \,||\, RS$ खींचो जो QP (बढ़ाए जाने पर) को T पर प्रतिच्छेदक करे।

$\angle 1 = \angle RPS$ [एकांतर कोण]

$\angle 3 = \angle QPS$ [संगत कोण]

$\angle RPS = \angle QPS$ [ज्ञात है]

$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow PT = PR$

[$\because$ किसी $\triangle$ के समान कोणो की सम्मुख भुजाए समान होती है।]

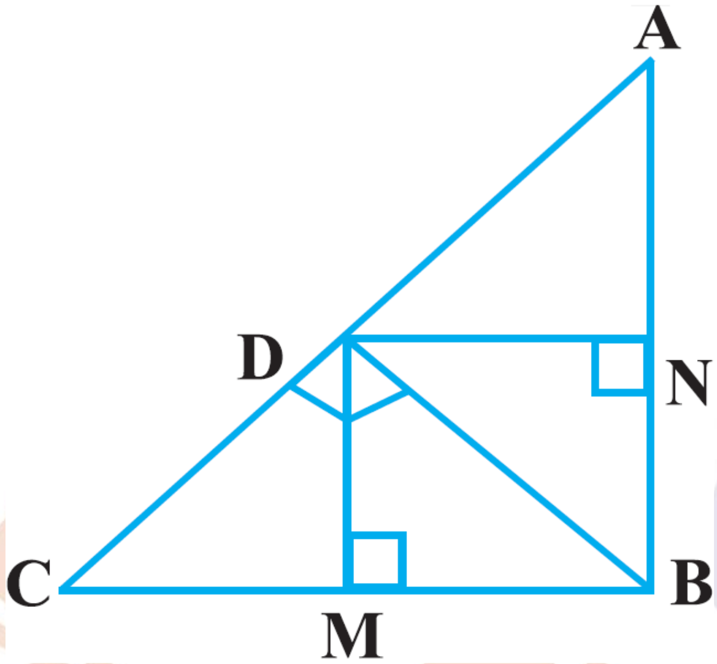
अब $\triangle QRT$ में $PR \,||\, RT$ [रचना द्वारा]

$\therefore$ मूलभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से हमे प्राप्त होती है।

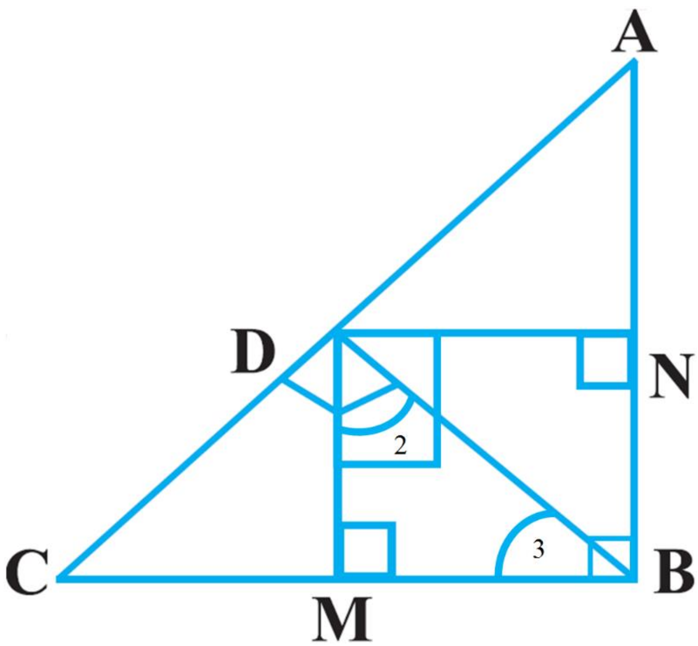
$$\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PT} \Rightarrow \frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR} [\because PT = PR]$$

प्रश्न 2 आकृति में D त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर स्थित एक बिन्दु है तथा DM | BC और DN | AB है| सिद्ध कीजिए कि:

(i) $DM^2 = DN.MC$
(ii) $DN^2 = DM.AN$



उत्तर-



हमे प्राप्त है: की त्रिभुज ABC में AC विकर्ण है तथा $BD \perp AC,\ DM \perp BC$ और $DN \perp AB.$

$\Rightarrow$ BMBN आयत है।

$\therefore BM = ND$ [आयत की सम्मुख भुजाए]

1. $\triangle BMD$ और $\triangle DMC$ में,

$\angle DMB = 90^{\circ} = \angle DMC \ldots (1)$

$\because BD \perp AC$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\triangle BDM, \angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3 \ldots (2)$

(1) और (2) से,

$\triangle BMD \sim \triangle DMC$ [AA समरूपता से]

$\therefore$ इनकी भुजाए है।

$$\Rightarrow \frac{BM}{DM} = \frac{MD}{MC} \Rightarrow \frac{DN}{DM} = \frac{DM}{MC}$$

[$\because$ DN और BM, आयत की सम्मुख भुजाए है]

$\therefore DN = BM$

$\Rightarrow DN \times MC = DM \times DM$

$\Rightarrow DN \times MC = DM^2$

$DM^2 = DN \times MC$

2. $\triangle BND$ और $\triangle DNA$, हमे प्राप्त है।

$\angle BND = \angle DNA$ [प्रत्येक 90°]

$\angle DBN = \angle ADN$ [(1) में सिद्ध किया है]

$\Rightarrow \triangle BND \sim \triangle DNA$ [AA समरूपता]

$\therefore$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

$$\Rightarrow \frac{BN}{DN} = \frac{ND}{NA}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{DN}{NA}$$

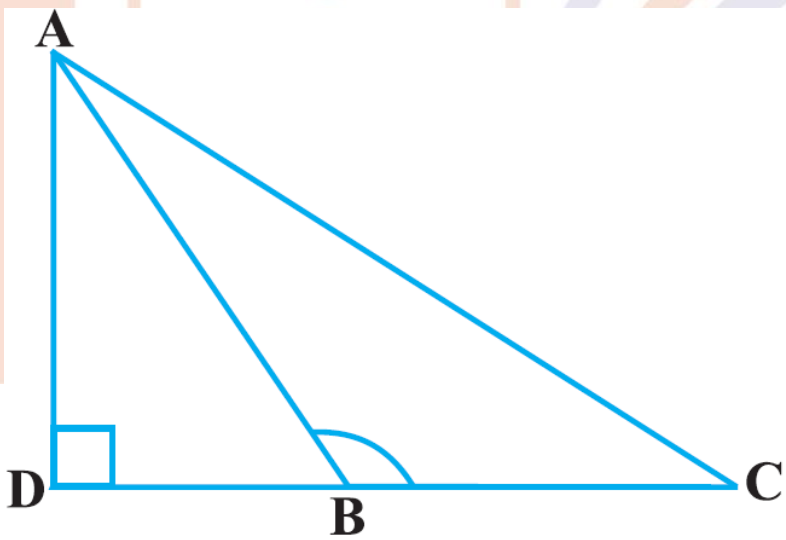
[$\because$ BN और DM, आयत की सम्मुख भुजाए है]

$$\Rightarrow DM \times NA = N \times DN$$

$$\Rightarrow DM \times NA = DN^2$$

$$DN^2 = DM \times AN$$

प्रश्न 3 आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें angle ABC > 90° हा तथा AD | CB है सिद्ध कीजिए की $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ है



उत्तर-

$\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमे $\angle ABC > 90^\circ$ और $AD \perp CB$

$\because \triangle ADB$ में, $\angle D = 90^\circ$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर

$AB^2 = AD^2 + DB^2 \,..\, (1)$

पुनः $\triangle ADC$

$\angle D = 90^\circ$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय से,

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$= AD^2 + [BD + BC]^2$

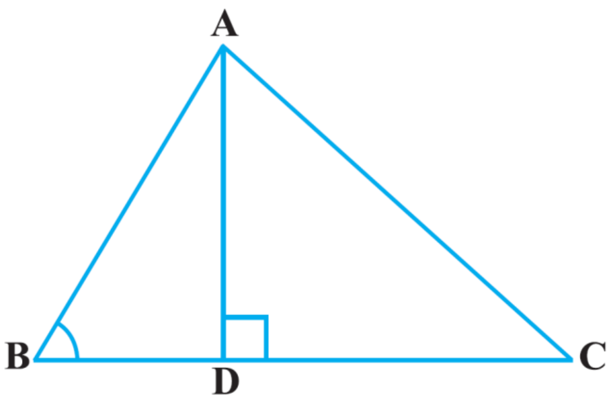
$= AD^2 + [BD^2 + BC^2 + 2BD.BC$

$\Rightarrow AC^2 = [AD^2 + DB^2 + 2BC.BD[(1)]$

हमे प्राप्त होता है।

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$

प्रश्न 4 आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें ABC < 90° है तथा AD | BC है सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC.BD$ है।



उत्तर-

$\triangle ABC$ में $\triangle ABC < 90^\circ$ और $AD \perp BC$ समकोण $\triangle ADB$ में, $\triangle D = 90^\circ$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय से,

$AB^2 = AD^2 + BD^2 \ldots (1)$

तथा समकोण $\triangle ADC$ में $\angle D = 90^\circ$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर, हमे मिलता है।

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD^2 + [BC - BD]^2$

$= AD^2 + [BC^2 + BD^2 - 2BC.BD]$

$= [AD^2 + BD^2] + BC^2 - 2BC.BD$

$= AB^2 + BC^2 - 2BC.BD \ldots (1)$ से,

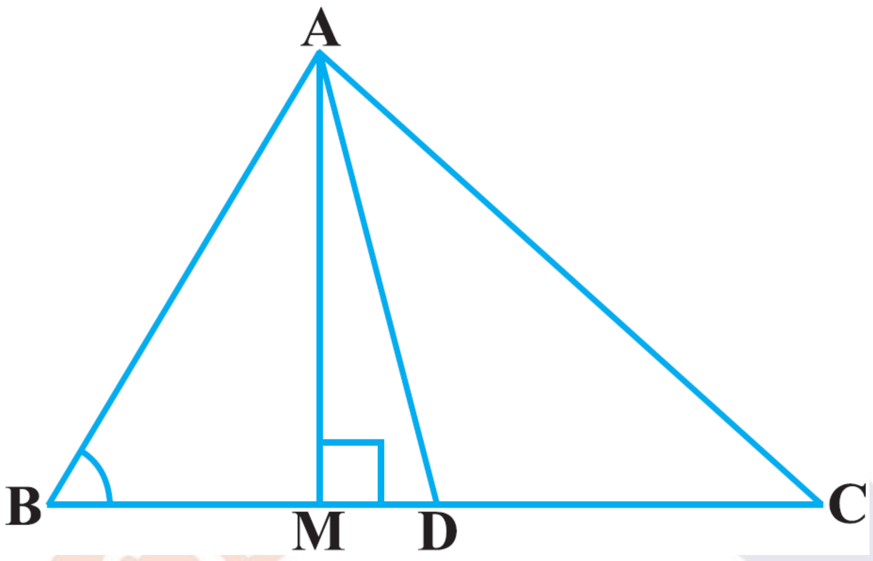
इस प्रकार,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

जो की अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 5 आकृति में AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है तथा AM | BC है सिद्ध कीजिए की:

1. $AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$
2. $AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$
3. $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{BC}^2$



उत्तर-

1. $= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MD.\frac{BC}{2}$

[$\because$ BC की मध्यबिंदु D]

$= AD + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + BC.DM$

इस प्रकार,

$AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

2. $\triangle AMB$ में,

$\angle AMB = 90^\circ$

$\therefore$ पाईथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर, हमे मिलता है।

$AB^2 = AM^2 + BM^2 = AM^2 + (BD - DM)^2$

$= AM^2 + BD^2 + DM^2 - 2BD.DM$

$$[\because DM^2 + AM^2 = AD^2]$$

$$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 2\frac{BC}{2}.DM$$

$$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - BC.DM$$

इस प्रकार,

$$AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left[\frac{BC}{2}\right]^2 \ldots (2)$$

3. (1) और (2) को जोड़ने पर

$$AB^2 + AC^2 = \left[AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$$

$$+ \left[AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]$$

$$= AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + AD^2 + BC.MD + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$= 2AD^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

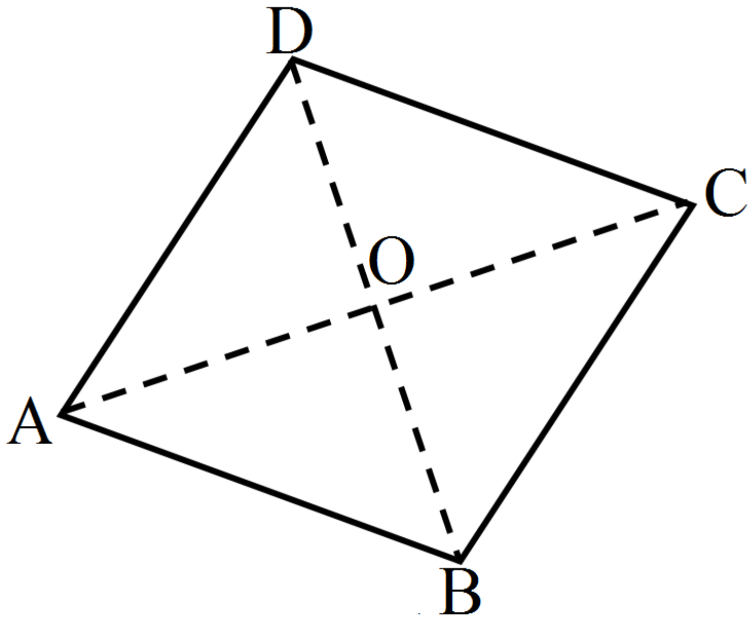
$$= 2AD^2 + 2\frac{BC^2}{4}$$

$$= 2AD^2 + \frac{BC^2}{2}$$

इस प्रकार $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$ जो की अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 6 सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के विकार्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर-



हमे प्राप्त है: एक समांतर चतुर्भुज ABCD, AC और BD समांतर चतुर्भुज ABCDके विकर्ण है चुकी एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित होते है।

$\therefore$ AC और BD का मध्य बिंदु O है। अब $\triangle ABC$ में, BO एक मध्यिका है।

$$\therefore AB^2 + BC^2 = 2BO^2 + \frac{1}{2}AC^2 \ldots (1)$$

तथा $\triangle ABC$, में DO एक मध्यिका है।

$$\therefore AD^2 + CD^2 = 2DO^2 + \frac{1}{2}AC^2 \ldots (2)$$

(1) और (2) से हमे प्राप्त होता है।

$$AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2$$

$$= 2BO^2 + \frac{1}{2}AC^2 + 2DO^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$= 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}AC^2 + 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$[\because BO = \tfrac{1}{2}BD \text{ और } DO = \tfrac{1}{2}BD]$$

$$= 2\left[\frac{BD^2}{4} + \frac{BD^2}{4}\right] + \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

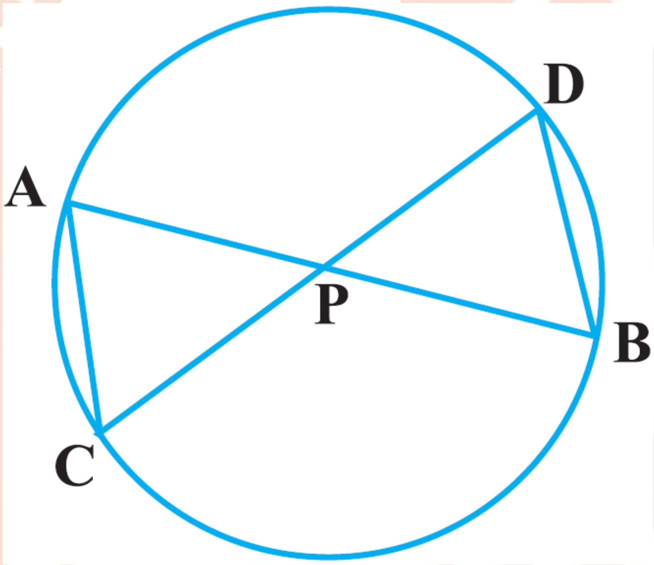
$$= 2\left[\frac{2BD^2}{4}\right] + AC^2 = BD^2 + AC^2$$

$$= 2\left[\frac{2BD^2}{4}\right] + AC^2 = BD^2 + AC^2$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$ जो की अभीष्ट संबन्ध है।

प्रश्न 7 आकृति में एक वृत्त की दो जिवाएँ AB और CD परस्पर बिन्दु p पर प्रतिच्छेद करती हैं सिद्ध कीजिए कि:

1. $\triangle APC \sim \triangle DPB$
2. AP.PB = CP.DP



उत्तर-

हमे प्राप्त है: की वृत की दो जीवाए AB और CD है AB और CD परस्पर P पर प्रतिच्छेद करती है।

$$\therefore \angle APC = \angle DPB$$

[शीर्षभिमुख कोण] .....(1)

रचना: AC और BD को मिलाओ।

1. $\triangle APC$ और $\triangle DPB$

[एक ही वृत्तखंड में बने कोण] .....(2)

(1) और (2) से AA समरूपता का प्रयोग करने पर $\triangle APC \sim \triangle DPB$

2. चुकी $\triangle APC \sim \triangle DPB$ [ऊपर सिद्ध किया है]

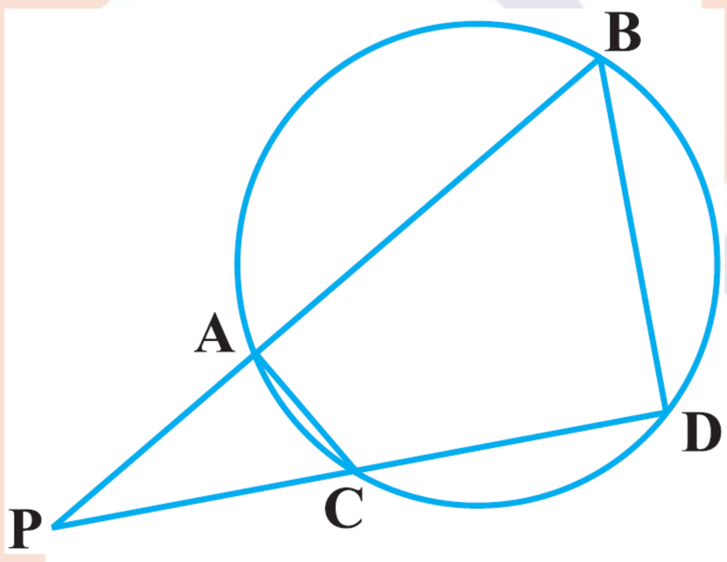
$\therefore$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

$$\Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$$

$\Rightarrow AP \times BP = CP \times DP$ जो की अभीष्ट संबन्ध है।

प्रश्न 8 आकृति में एक वृत्त की दो जिवाएँ AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं सिद्ध कीजिए कि

1. $\triangle PAC \sim PDB$
2. PA.PB = PC.PD



उत्तर- वृत के अंदर दो जीवाए AB और CD है जो की (बढ़ाने पर) वृत के बाहर बिंदु P पर मिलते है।

1. चुकी एक चक्रीय चतुर्भुज का बाहा कोण अतः सम्मुख कोण के समान है।

$$\therefore \angle PAC = \angle PDB \ldots (1)$$

$$\angle PCA = \angle PBD \ldots (2)$$

∴ (1} और (2) से [AAA समरूपता कसौटी का प्रयोग करके]

$$\triangle PAC \sim \triangle PBD$$

2. चुकी, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

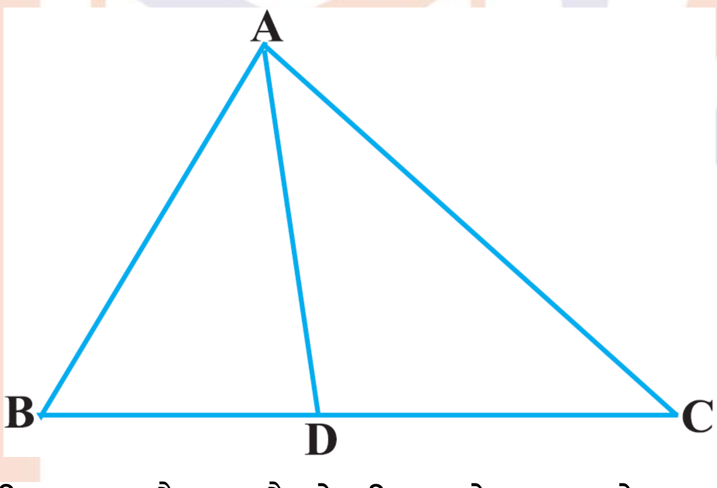
[ऊपर सिद्ध किया गया है।]

∴ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

$$\Rightarrow \frac{PA}{BD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

प्रश्न 9 आकृति में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ है| सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।



उत्तर- वृत के अंदर दो जीवाए AB और CD है जो की (बढ़ाने पर) वृत के बाहर बिंदु P पर मिलते है।

1. चुकी एक चक्रीय चतुर्भुज का बाहा कोण अतः सम्मुख कोण के समान है।

$$\therefore \angle PAC = \angle PDB \ldots (1)$$

$$\angle PCA = \angle PBD \ldots (2)$$

$\therefore$ (1} और (2) से [AAA समरूपता कसौटी का प्रयोग करके]

$$\triangle PAC \sim \triangle PBD$$

2. चुकी, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

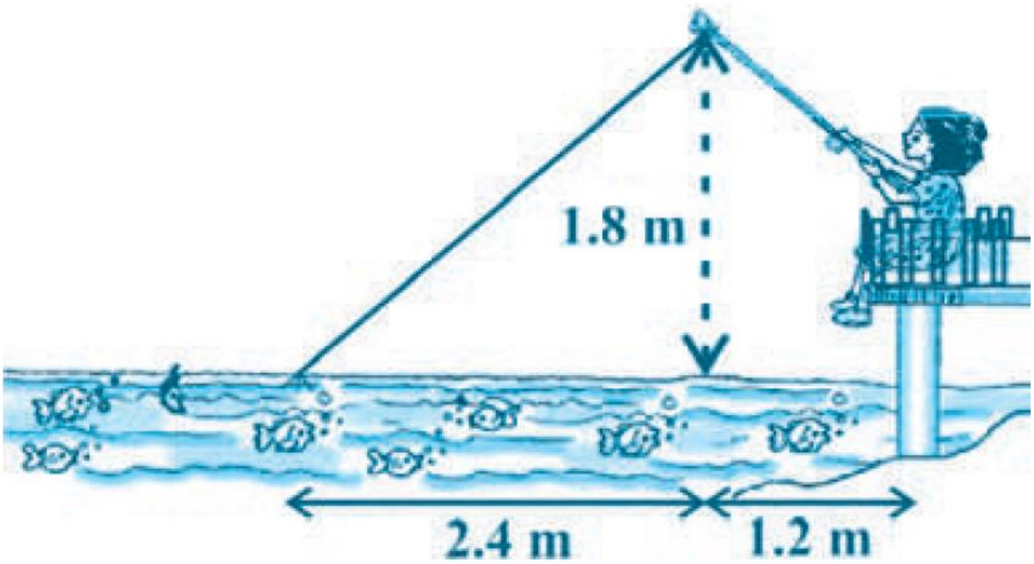
[ऊपर सिद्ध किया गया है।]

$\therefore$ इनकी संगत भुजाए समानुपाती है।

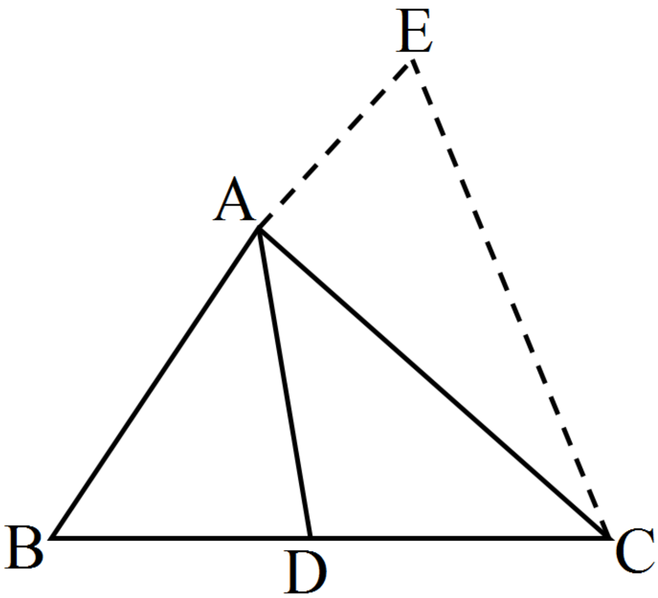
$$\Rightarrow \frac{PA}{BD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

प्रश्न 10 नाजिमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1.8m ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी के सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाजिमा से दुरी 3.6m है और छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी के सतह पर स्थित बिन्दु से उसकी दुरी 2.4m है यह मानते हुए कि उसकी डोरी (उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी बाहर निकाली हुई है (देखिए आकृति)? यदि वह डोरी को 5cm/s की दर से अन्दर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाजिमा की काँटे से क्षैतिज दुरी कितनी होगी?



उत्तर-



रचना:

1. BAको E तक इस प्रकार बढ़ाओ की $AE = AC$
2. EC को मिलाओ चुकी

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$

$$AC = AE$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$

अब, $\triangle BCE$ में $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$

$\therefore$ मूलभूत-समरूपता प्रमेय के विलोम से, AD || CE और BE एक तिर्यक रेखा है।

$\Rightarrow \angle BAD = \angle AEC \ldots (1)$ [संगत कोण]

$\angle CAD = \angle ACE \ldots (2)$ [एकांतर कोण]

चुकी $AC = AE$

$\therefore$ इनके सम्मुख कोण भी समान होगी,

$\Rightarrow \angle AEC = \angle ACE \ldots (3)$

(1) और (3) से,

$$\angle BAD = \angle ACE \ldots (4)$$

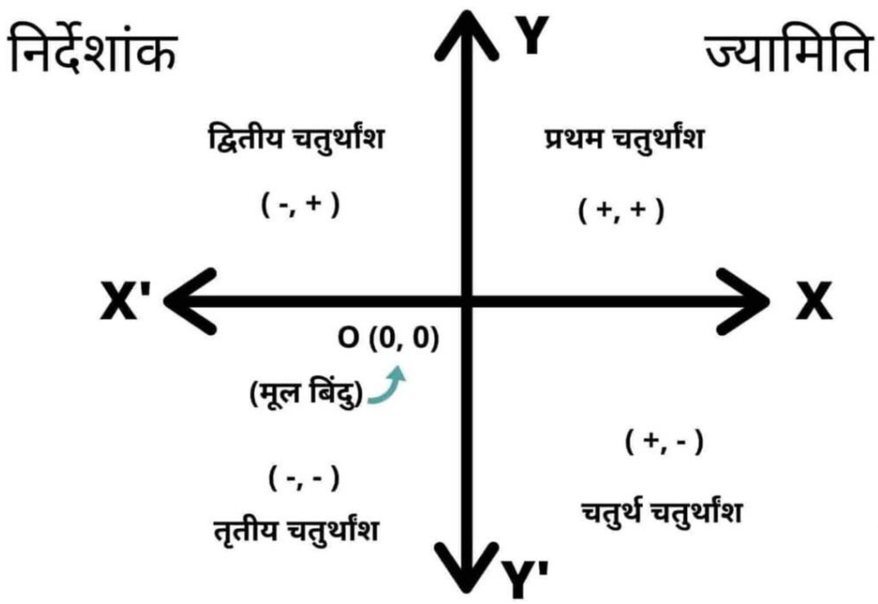
(2) और (4) से,

$$\angle BAD = \angle CAD$$

$\Rightarrow$ AD कोण $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

निर्देशांक ज्यामिति

निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह महत्वपूर्ण शाखा है जिसमें समतल आकृति पर बने बिन्दुओं की स्थिति को दो संख्याओं के जोड़े के रूप में परिभाषित किया जाता है. संख्याओं के जोड़ों से बने बिंदु की स्थिति को बिंदु निर्देशांक कहते हैं।



निर्देशांक ज्यामिति की परिभाषा

निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह महत्वपूर्ण शाखा है जिसमें समतल आकृति पर बने बिन्दुओं की स्थिति को दो संख्याओं के जोड़े के रूप में परिभाषित किया जाता है. संख्याओं के जोड़ों से बने बिंदु की स्थिति को बिंदु निर्देशांक कहते हैं.

दुसरें शब्दों में, ज्यामितिय शाखाओं का वह समूह है, जहां निर्देशांक का उपयोग करके एक बिंदु की स्थिति को परिभाषित किया जाता है, वह निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है.

Nirdeshank Jyamiti का प्रयोग किसी दो बिन्दुओं के बिच की दुरी, केंद्र से दुरी बिन्दुओं का विभाजन आदि करने के लिए किया जाता है.

निर्देशांक ज्यामिति के चतुर्थांश

- XOX' क्षैतिज अक्ष है. इसे x अक्ष भी कहते है.
- YOY' उर्ध्वादर अक्ष है. इसे y अक्ष भी कहते है.
- XOX' तथा YOY' रेखाएं एक दुसरें को O बिंदु पर लम्बवत कटती है.
  XOY तल को प्रथम चरण अथवा कोटि (Quadrant) कहते है.
  X'OY तक को द्वितीय चरण कहते है.
  X'OY' तल को तृतीय चरण कहते है.

XOY′ तल को चतुर्थ चरण कहते है.

चतुर्थांश का चिन्ह

- प्रथम पाद यानि चरण = (+, +)
- द्वितीय पाद = (-, +)
- तृतीय पाद = (-, –)
- चतुर्थ पाद = (+, –)

निर्देशांक ज्यामिति {Coordinate Geometry}

- XX′ अक्ष का धन भाग = (+, 0)
- XX′ का ऋण भाग = (-, 0)
- YY′ अक्ष का धन भाग = (0, +)
- YY′ अक्ष का ऋण भाग = (0, –)
- मूल बिंदु = (0, 0)

Note:

XX′ अक्ष के प्रत्येक बिंदु Y नियामक शून्य होता है।

YY′ अक्ष के प्रत्येक बिंदु पर x नियामक शून्य होता है।

मूल बिंदु पर x नियामक तथा y नियामक दोनों शून्य होते है।

- भुज (abscissa) - किसी बिंदु की y-अक्ष से दुरी को x-निर्देशांक अथवा भुज कहते हैं।
- कोटि (ordinate) - किसी बिंदु की x-अक्ष से दुरी को y-निर्देशांक अथवा कोटि कहते हैं।
- किसी बिंदु के भुज और कोटि (x, y) के रूप में होते हैं।
- दो बिंदुओं A(x1, y1) और B(x2, y2) के बीच की दुरी इस सूत्र के हल के बराबर होती है -
- किसी बिंदु A(x, y) की मूलबिन्दु से दूरी इस सूत्र के हल के बराबर होती है -
- बिंदुओं A(x1, y1) और B(x2, y2) को जोड़ने वाले रेखाखंड (line segment) को m1:m2 के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करने वाले उस बिंदु L(x, y) के निर्देशांक (coordinates) ये होते हैं -

इसे विभाजन सूत्र (split formula) कहते हैं।

● यदि कोई P रेखाखंड AB को k:1 में विभाजित करता है, तो बिंदु P के निर्देशांक निम्नलिखित होते हैं -

● दो बिंदुओं A(x1, y1) और B(x2, y2) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्यबिंदु (mid-point) के निर्देशांक ये होते हैं -

● कार्तीय तल (cartesian plane) पर स्थित तीन बिंदुओं A(x1, y1), B(x2, y2) और C(x3, y3) से बने

दुरी सूत्र (Distance Formula)

एक बिंदु x- अक्ष और दूसरा बिंदु y- अक्ष पर स्थित किसी भी दो निर्देशांक बिंदु के बीच की दूरी ज्ञात के लिए निम्न फार्मूला का प्रयोग किया जाता है. दुरी सूत्र का प्रयोग क्लास 10th और 12th में अधिक प्रयोग होता है.

दूरी सूत्र (Distance formula) = √[(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2]

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note:

- x1 – रेखा के पहले बिंदु का x- निर्देशांक
- x2 – रेखा के दूसरे बिंदु का x- निर्देशांक
- y1 – रेखा के पहले बिंदु का y- निर्देशांक
- y2 – रेखा के दूसरे बिंदु का y- निर्देशांक

x- अक्ष पर स्थिर बिन्दुओं का निर्देशांक (x, 0) यानी y- निर्देशांक शून्य तथा y- अक्ष पर स्थिर बिन्दुओं का निर्देशांक (0, y) यानी x- निर्देशांक शून्य होता हैं और मूल बिंदु का निर्देशांक (0, 0) होता हैं.

मध्य बिंदु का सूत्र

किसी भी दो निर्देशांक बिंदु के बीच के मध्य निर्देशांक बिंदु ज्ञात करने के लिए मध्य बिंदु सूत्र की प्रयोग किया जाता है.

जहाँ, A कोई बिंदु है जिसका निर्देशांक A (x1, y1) है तथा दूसरा बिंदु B, जिसका निर्देशांक B (x2, y2) है. इस स्थिति में मध्य बिंदु के निर्देशांक P (x, y) होगा.

x = (x1 + x2)/2

और

y = (y1 + y2) /2

P निर्देशांक = [(x1 + x2)/2 , (y1 + y2)/2]

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

जहाँ

- x1 – रेखा के पहले बिंदु का x- निर्देशांक
- x2 – रेखा के दूसरे बिंदु का x- निर्देशांक
- y1 – रेखा के पहले बिंदु का y- निर्देशांक
- y2 – रेखा के दूसरे बिंदु का y- निर्देशांक

विभाजन सूत्र

कोई बिंदु, किसी रेखा को किसी भी अनुपात में विभाजन करता है, तो उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए निम्न फार्मूला का प्रयोग किया जाता है.

मान कि कोई रेखा A और B है, जिसमे A बिंदु के निर्देशांक A (x1, y1) और B बिंदु के निर्देशांक B (x2, y2) है, को m:n के रूप में विभाजित किया जाता है. तो इसे ज्ञात करने के लिए इस फार्मूला का प्रयोग होता है.

x = (m × x2 + n × x1) /m+n

और

y = (m × y2 + n × y1) /m+n, अर्थात

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, y = \frac{my_2 + my_1}{m+n}$$

जहाँ

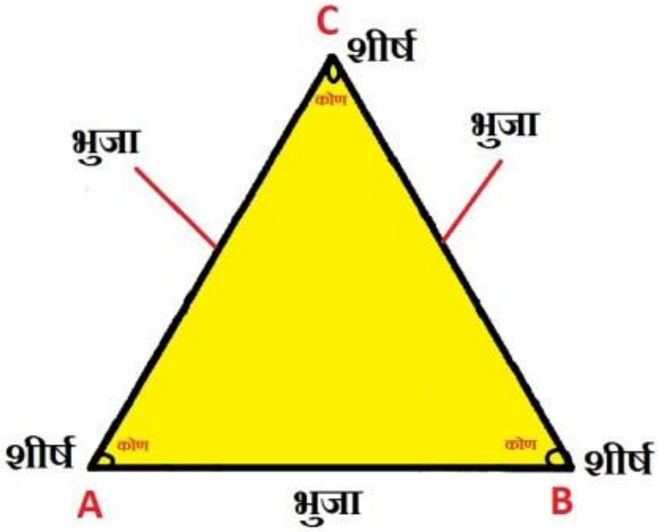
- x1 – रेखा के पहले बिंदु का x- निर्देशांक
- x2 – रेखा के दूसरे बिंदु का x- निर्देशांक
- y1 – रेखा के पहले बिंदु का y- निर्देशांक
- y2 – रेखा के दूसरे बिंदु का y- निर्देशांक

- m – रेखा के विभाजन के अनुपात का पहला भाग
- n – रेखा के विभाजन के अनुपात का दूसरा भाग

रेखा के विभाजन से प्राप्त बिंदु m:n के रूप का होगा.

त्रिभुज का क्षेत्रफल | Area of Triangle

आमतौर पर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए कई अन्य फार्मूला है लेकिन Nirdeshank Jyamiti में क्षेत्रफल निकालने के लिए विशेष फार्मूला का प्रयोग किया जाता है. जो इसके बिन्दुओं पर आधारित होता है.



सामान्य फार्मूला:

- त्रिभुज का क्षेत्रफल = 1/2 × आधार × शीर्षलंब

लेकिन यदि निर्देशांक से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो, तो इस फार्मूला का प्रयोग होता है.

माना कि किसी त्रिभुज के तीन बिन्दुएँ A, B, और C है, जिसका निर्देशांक A (x1, y1) , B (x2, y2) और C (x3, y3) है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

ΔABC का क्षेत्रफल = 1/2[x1(y2–y3) + x2(y3–y1) + x3(y1–y2)], अर्थात

$$\frac{1}{2}\left[x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right]$$

जहाँ, A (x1, y1), B (x2, y2) और C (x3, y3) त्रिभुज के निर्देशांक है.

त्रिभुज का क्षेत्रफल के लिए सूत्र -

● आपको कार्तीय तल पर स्थित कुछ बिंदु दिए गए हैं तो पहले उन्हें अंकित करो और फिर आगे हल करो।

● दिए गए बिंदुओं के बीच यदि कोई सम्बन्ध (relation) पाया जाता है, तो उस सम्बन्ध के आधार पर बिना कार्तीय तल के भी उत्तर प्राप्त करना सम्भव (possible) है।

● यदि कोई बिंदु P(x, y) दो अन्य बिंदुओं Q(x1, y1) और R(x2, y2) से समदूरस्थ (समान दुरी पर/ equidistant) हो,

निर्देशांक ज्यामिति से सम्बंधित महत्वपूर्ण तथ्य

किसी तल पर किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए , निर्देशांक के अक्षो के युग्म की आवश्यकता होती है. किसी बिंदु का y- अक्ष यानि y-axis से दूरी , उस बिंदु का x- निर्देशांक या भुज कहलाती है. किसी बिंदु की x- अक्ष से दूरी, उस बिंदु का y-निर्देशांक या कोटि कहलाती है.

इसी प्रकार, x- अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (x, 0) तथा y- अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (0, y) के रूप का होता है. उम्मीद करता हूँ की Nirdeshank Jyamiti से सम्बंधित अब कोई संदेह शेष नही होगा.

बिंदु निर्देशांक की स्थिति

किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए, हमें निर्देशांक अक्षों के एक युग्म की आवश्यकता होती है। किसी बिदु की y-अक्ष से दूरी उस बिदु का x-निर्देशांक या भुज कहलाता है। किसी बिदु की x-अक्ष से दूरी, उस बिदु का y-निर्देशांक या कोटि कहलाता है।

x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (x, 0) के रूप के होते हैं तथा y-अक्ष पर स्थित किसी बिदु के निर्देशांक (0, y) के रूप के होते हैं।

निर्देशांक ज्यामिति में मूल बिंदु

निर्देशांक (0, 0), अक्ष तल को चार भागों में विभक्त कर देती है जो चतुर्थांश कहलाते हैं। अक्षों के प्रतिच्छेद बिंदु को मूलबिंदु कहते हैं। किसी बिंदु का भुज या x-निर्देशांक उसकी y- अक्ष से दूरी होती है तथा किसी बिंदु की कोटि या y-निर्देशांक उसकी x – अक्ष से दूरी होती है।

दो बिंदुओं के बीच की दूरी का सूत्र

दो बिन्दुओं P और Q के बीच की दूरी उन दो बिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखण्ड की लम्बाई होती है। या PQ= $\sqrt{(x_2 – X_1)^2 + (Y_2 – y_1)^2}$ इसे दूरी सूत्र कहते हैं।

नोट:

ध्यान दें कि चूँकि दूरी सदैव ऋणेतर होती है, हम केवल धनात्मक वर्गमूल लेते हैं।

निर्देशांक ज्यामिति के उपयोग

वस्तुतः, आकृतियों की ज्यामिति का अध्ययन करने के लिए, निर्देशांक ज्यामिति एक बीजीय साधन के रूप में विकसित की गई है। यह बीजगणित का प्रयोग करके ज्यामिति का अध्ययन करने में सहायता करती है तथा बीजगणित को ज्यामिति द्वारा समझने में भी सहायक होती है। इसी कारण, निर्देशांक ज्यामिति के विभिन्न क्षेत्रों में व्यापक अनुप्रयोग हैं, जैसे भौतिकी, इंजीनियरिंग, समुद्री-परिवहन (या नौ-गमन), भूकंप शास्त्र संबंधी और कला।

स्मरणीय तथ्य:

$P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $PQ= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।

बिदु $P(x, y)$ की मूलबिंदु से दूरी $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ होती है।

विभाजन सूत्र

समतल में स्थित दो बिन्दुओं को तीसरा बिन्दु जिस अनुपात में विभाजित करता है उसे विभाजन सूत्र कहते हैं। यह विभाजन दो प्रकार का होता है अन्त: विभाजन और बाह्य विभाजन।

अन्त: विभाजन

किन्हीं दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B (x_2, y_2)$ पर विचार कीजिए और मान लीजिए बिंदु $P(x, y)$ रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है, अर्थात्

$PA/PB = m_1 / m_2$ है।

x-अक्ष पर AR, PS और BT लंब खींचिए। x-अक्ष के समांतर AQ और PC खींचिए। तब AA समरूपता कसौटी से,

$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$

अतः $PA/BP = AQ/PC = PQ/BC$ (1)

अब $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$m_1 / m_2 = (x - x_1)/ (x_2 - x) = (y - y_1)/(y_2 - y)$

$m_1 / m_2 = (x - x_1)/ (x_2 - x)$ लेने पर $x = (m_1 x_2 + m_2 x_1)/ (m_1 + m_2)$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार $m_1 / m_2 = (y - y_1)/(y_2 - y)$ लेने पर $y = (m_1 y_2 + m_2 y_1)/ (m_1 + m_2)$ प्राप्त होता है।

अतः, दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B (x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करने वाले बिंदु P(x, y) के निर्देशांक हैं:

$\{(m_1 x_2 + m_2 x_1)/ (m_1 + m_2), (m_1 y_2 + m_2 y_1)/ (m_1 + m_2)\}$

उपरोक्त को विभाजन सूत्र कहते हैं।

विशिष्ट स्थिति

एक रेखाखंड का मध्य-बिंदु उसे 1 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अतः, बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B (x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB के मध्य-बिंदु के निर्देशांक

$\{(1 \times x_2 + 1 \times x_1)/ (1 + 1), (1 \times y_2 + 1 \times y_1)/ (1 + 1)\}$

$\{(x_2 + x_1)/2, (y_2 + y_1)/2\}$ होंगे।

Example:

उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (4, – 3) और (8, 5) को जोड़ने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल

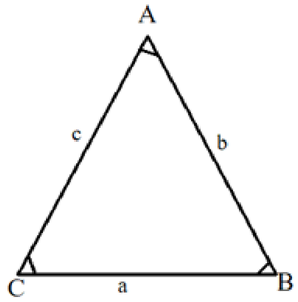
मान लीजिए P(x, y) वांछित बिंदु है। विभाजन सूत्र का प्रयोग करने पर हमें

$x = \{3(8) + 1(4)\}/(3 + 1) = 7,$

$y = \{3(5) + 1(-3)\}/(3 + 1) = 3$ प्राप्त होते हैं।

अतः (7, 3) ही वांछित बिंदु है।

त्रिभुज का क्षेत्रफल



मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है, जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं। क्रमशः बिदुओं A, B और C से x-अक्ष पर लंब AP, BQ और CR खींचिए। स्पष्टतः चतुर्भुज ABQP, APRC और BQRC समलंब हैं।

Δ ABC का क्षेत्रफल = समलंब ABQP का क्षेत्रफल + समलंब APRC का क्षेत्रफल – समलंब BQRC का क्षेत्रफल

आप यह भी जानते हैं कि एक समलंब का क्षेत्रफल = ½ (समांतर भुजाओं का योग) × (उनके बीच की दूरी)

अतः Δ ABC का क्षेत्रफल = 1/2(BQ + AP) × QP + 1/2(AP + CR) × PR – 1/2(BQ + CR) × QR

$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

अतः Δ ABC का क्षेत्रफल व्यंजक $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ का संख्यात्मक मान है।

उदाहरण

उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, -1), (- 4, 6) और (-3, -5) है।

हल

शीर्षों A(1, -1), B(- 4, 6) और C(-3, -5) वाले त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल, उपरोक्त सूत्र द्वारा निम्नलिखित हैः

$= \frac{1}{2}[1(6 + 5) + (-4)(-5 + 1) + (-3)(-1 - 6)]$

= ½ (11 + 16 + 21)

= 24

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 वर्ग मात्रक है।

नोटः

क्षेत्रफल एक माप है, इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

उदाहरण

k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु A(2, 3), B(4, k) और C(6, -3) संरेखी हैं।

हल

चूँकि तीनों बिंदु संरेखी हैं, इसलिए इनसे बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा।

अर्थात्

½ [2(k + 3) + 4(-3 – 3) + 6(3 – k)] = 0

या ½ (- 4k) = 0

या k = 0

अतः k का वांछित मान 0 है।

उत्तर की जांच के लिए ∆ ABC का क्षेत्रफल = ½ [2(0 + 3) + 4(-3 – 3) + 6(3 – 0)]

= ½ (6 – 24 + 18)

= 0

त्रिभुज की सहायता से बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना

किसी बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हम उसे ऐसे त्रिभुजों में बाँटते हैं, जिनमें कोई क्षेत्र सार्वनिष्ठ न हो और फिर इन सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को जोड़ लेते हैं।

उदाहरण

यदि A(–5, 7), B(– 4, –5), C(–1, –6) और D(4, 5) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं, तो इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल

B को D से मिलाने पर, आपको दो त्रिभुज ABD और BCD प्राप्त होते हैं।

अब त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल = ½ [-5(-5 – 5) + (-4)(5 – 7) + 4(7 + 5)]

= ½ (50 + 8 + 48)

= 53 वर्ग मात्रक

साथ ही त्रिभुज BCD का क्षेत्रफल = ½ [-4(-6 – 5) – 1(5 + 5) + 4(-5 + 6)]

= ½ (44 – 10 + 4)

= 19 वर्ग मात्रक

अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल + त्रिभुज BCD का क्षेत्रफल

= 53 + 19 = 72 वर्ग मात्रक

मान लीजिए A(4, 2), B[6, 5) और C(1, 4) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

(i) A से होकर जाने वाली मध्यिका BC से D पर मिलती है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) AD पर स्थित ऐसे बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि AP:PD = 2:1 हो।

(iii) मध्यिकाओं BE और CF पर ऐसे बिंदुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि BQ:QE = 2:1 हो और CR:RF = 2:1 हो।

आप क्या देखते है?

(i) A से होकर जाने वाली मध्यिका BC से D पर मिलती है। इसलिए BC का मध्य बिंदु D है।

बिंदु P के निर्देशांक = {(6+1)/2, (5+4)/2) = (7/2, 9/2)

(ii) AD पर स्थित बिंदु P इसप्रकार है कि AP:PD = 2:1 हो। बिंदु P के निर्देशांक = {(2×7/2 + 1×4)/(2 + 1), (2×9/2 + 1×2)/(2 + 1)} = (11/3, 11/3)

(iii) B से होकर जाने वाली मध्यिका AC से E पर मिलती है। इसलिए AC का मध्य बिंदु E है।

बिंदु E के निर्देशांक = {(4+1)/2, (2+4)/2} = (5/2, 3)

AE पर स्थित बिंदुए इस प्रकार है कि AQ: QE = 2:1 हो।

बिंदु Q के निर्देशांक = (2×5/2+1×6)/(2 + 1), (2×3+1×5)/(2 + 1) = (11/3, 11/3)

C से होकर जाने वाली मध्यिका AB से F पर मिलती है। इसलिए AB का मध्य बिंदु F है।

बिंदु F के निर्देशांक = (4+6)/2, (2+5)/2 = (5, 7/2)

CF पर स्थित बिंदु R इसप्रकार है कि CR: RF = 2:1 हो। बिंदु R के निर्देशांक =

{(2×5+ 1 x 1)/(2 + 1), (2×7/2 + 1×4)/(2 + 1)} = (11/3, 11/3)

(iv) P, Q और R तीनों बिंदुओं के निर्देशांक समान हैं।

स्मरणीय तथ्य

त्रिभुज ABC जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं का क्षेत्रफल = ½ [$x_1(y_2 – y_3) + x_2(y_3 – y_1) + x_3(y_1 – y_2)$] का संख्यात्मक मान है।

NCERT SOLUTIONS
प्रश्नावली 7.1 (पृष्ठ संख्या 177-178)

प्रश्न 1 बिन्दुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए-

(i) (2, 3), (4, 1)
(ii) (-5, 7), (-1, 3)
(iii) (a, b), (-a, -b)

उत्तर-

(i)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(ii)

दिए गए बिंदु A (-5, 7) और B (-1, 3) हैं।

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{\{-1 - (-5)\}^2 + \{3 - 7\}^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

(iii)

दिए गए बिंदु A(a, b) और B(-a, -b) होने दें।

हम जानते हैं कि A(a, b) और B(-a, -b) दो बिंदुओं के बीच की दूरी कितनी है।

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore\ AB = \sqrt{(-a - a)^2 + (-b - b)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4b^2}$$

$$= \sqrt{4(a^2 + b^2)}$$

$$= 2\sqrt{(a^2 + b^2)}$$

प्रश्न 2 बिन्दुओं (0, 0) और (36, 15) के बीच की दुरी ज्ञात कीजिए। क्या अब आप अनुच्छेद 7.2 में दिए दोनों शहरों A और B के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं?

उत्तर- दिए गए बिंदु A(0, 0) और B(36, 15) हैं।

$$AB = \sqrt{(36-0)^2 + (15-0)^2}$$

$$= \sqrt{(36)^2 + (15)^2}$$

$$= \sqrt{1296 + 225}$$

$$= \sqrt{1521} = 39$$

हां, हम चर्चा की गई दो शहरों A और B के बीच की दूरी और यह दूरी = 39 किमी पा सकते हैं

प्रश्न 3 निर्धारित कीजिए की क्या बिन्दु (1, 5), (2, 3) और (-2,- 11) सरेंखी हैं।

उत्तर-

दिए गए बिंदु A(1, 5), B(2, 3) और C(-2, -11) हैं। फिर,

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-5)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (-11-5)^2}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(-3)^2 + (-16)^2}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{9 + 256}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{265}$$

और $BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (-11-3)^2}$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{16 + 196}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{212}$$

यहाँ, हम देखते हैं कि $AB + BC \neq AC,\ BC + AC \neq AB$ और $AB + AC \neq BC$

प्रश्न 4 जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु (5, -2), (6, 4) और (7, -2) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उत्तर-

दिए गए बिंदु A(5, -2), B(6, 4) और C(7, -2) हैं। फिर,

$$AB = \sqrt{(6-5)^2 + \{4-(-2)\}^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$BC = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2}$$

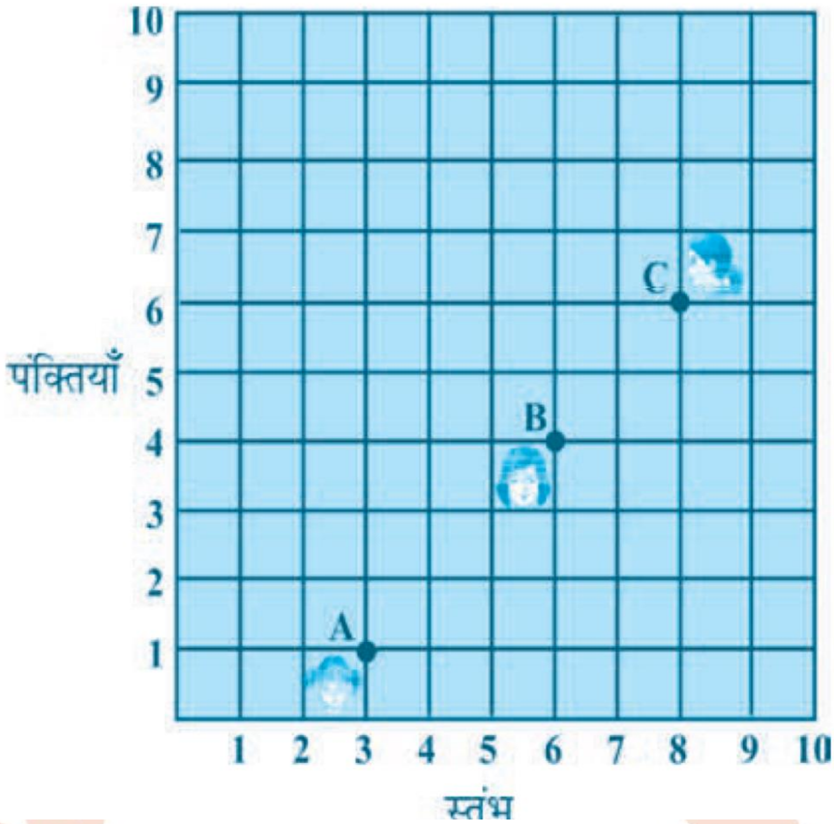
$$= \sqrt{(1)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

चूंकि AB = BC

इसलिए, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 5 किसी कक्षा में चार मित्र बिन्दुओं A, B, C और D पर बैठे हुए हैं, जैसा कि में दर्शाया गया है। चंपा और चमेली कक्षा के अन्दर आती हैं और कुछ मिनट तक देखने तक के बाद, चंपा चमेली से पूछती है, 'क्या तुम नहीं सोचती हो कि ABCD एक वर्ग है?' चमेली इससे सहमत नहीं है। दूरी सूत्र का प्रयोग करके, बताइए कि इनमें कौन सही है।



उत्तर-

A(3, 4), B(6, 7), C(9, 4) और D(6, 1) को दिए गए बिंदु होने चाहिए। फिर,

अब $AB = \sqrt{(6-3)^2 + (7-4)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(9-6)^2 + (4-7)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2}$

$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(9-6)^2 + (4-7)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(6-9)^2 + (1-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$DA = \sqrt{(3-6)^2 + (4-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(9-3)^2 + (4-4)^2} = 6$$

$$BD = \sqrt{(6-6)^2 + (1-7)^2} = 6$$

हम देखते है कि,

AB = BC = DA = DA

और AC = BD

इसलिए, ABCD एक वर्ग है।

इसलिए, चम्पा सही है।

प्रश्न 6 निम्नलिखित बिन्दुओं द्वारा बनने वाले चर्तुभुज का प्रकार (यदि कोई है तो) बताइए तथा अपने उत्तर के लिए करण भी दीजिए-

(i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)
(ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)
(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

उत्तर-

(i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)

माना बिन्दुएँ A(-1, -2), B(1, 0), C(-1, 2), तथा D(-3, 0) हैं।

∴ दुरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [0-(-2)]^2}$$

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (0+2)^2}$$

$$AB = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$

$$AB = \sqrt{4+4}$$

$$AB = \sqrt{8}$$

$$AB = 2\sqrt{2}$$

इसी प्रकार,

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-0)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$BC = \sqrt{4 + 4}$$

$$BC = \sqrt{8}$$

$$BC = 2\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

$$CD = \sqrt{[-3 - (-1)]^2 + (0 - 2)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (-2)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$CD = \sqrt{4 + 4}$$

$$CD = \sqrt{8}$$

$$CD = 2\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$AD = \sqrt{[-3 - (-1)]^2 + [0 - (-2)]^2}$$

$$AD = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (2)^2}$$

$$AD = \sqrt{4 + 4}$$

$$AD = \sqrt{8}$$

$$AD = 2\sqrt{2}$$

बिन्दुएँ A(-1, -2), B(1, 0), C(-1, 2), तथा D(-3, 0)बनने वाला चर्तुभुज वर्ग हैं। क्योंकि इन बिन्दुओं बनने वाले चर्तुभुज की भुजा बराबर है अर्थात AB = BC = CD = AD हैं।

(ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)

माना बिन्दुएँ A(-3, 5), B(3, 1), C(0, 3), तथा D(-1, -4) हैं।

∴ दुरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (1 + 5)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-6)^2 + (6)^2}$$

$$AB = \sqrt{36 + 36}$$

$$AB = \sqrt{72}$$

$$AB = 6\sqrt{2}$$

इसी प्रकार दुरी सूत्र से,

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC = \sqrt{(0 - 3)^2 + (3 - 1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$$

$$BC = \sqrt{9 + 4}$$

$$BC = \sqrt{13}$$

$$CD = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-4 - 3)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$$

$$CD = \sqrt{1 + 14}$$

$$CD = \sqrt{15}$$

$$AD = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$AD = \sqrt{[-3 - (-1)]^2 + (-4 - 5)^2}$$

$$AD = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (-7)^2}$$

$$AD = \sqrt{(-2)^2 + 14}$$

$$AD = \sqrt{4 + 14}$$

$$AD = \sqrt{18}$$

बिन्दु A(-3, 5), B(3, 1), C(0, 3), तथा D(-1, -4) से बनने वाला चर्तुभुज एक विषमबाहु चर्तुभुज हैं। क्योंकि इन बिन्दुओं से बनने वाले चर्तुभुज की भुजा बराबर नहीं है और किसी भी चर्तुभुज के गुण के सामान नहीं है।

अर्थात, $AB \neq BC \neq CD \neq AD$ या $6\sqrt{2} \neq \sqrt{13} \neq \sqrt{15} \neq 3\sqrt{2}$ है।

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

माना बिन्दुएँ A(4, 5), B(7, 6), C(4, 3), तथा D(1, 2) हैं।

∴ दुरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(7 - 4)^2 (6 - 5)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3)^2 + (1)^2}$$

$$AB = \sqrt{9 + 1}$$

$$AB = \sqrt{10}$$

इसी प्रकार,

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC = \sqrt{(4 - 7)^2 + (3 - 6)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$

$$BC = \sqrt{9 + 9}$$

$$BC = \sqrt{18}$$

$$BC = 3\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

$$CD = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 3)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$$

$$CD = \sqrt{9 + 1}$$

$$CD = \sqrt{10}$$

$$AD = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$AD = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$AD = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$

$$AD = \sqrt{9 + 9}$$

$$AD = \sqrt{18}$$

$$AD = 3\sqrt{2}$$

बिन्दु A(4, 5), B(7, 6), C(4, 3), तथा D(1, 2) से बनने वाला चर्तुभुज आयात तथा समांतर चर्तुभुज हैं। क्योंकि इन बिन्दुओं से बनने वाले चर्तुभुज की दो भुजाओं के युग्म बराबर है।

अर्थात, $AB = CD = \sqrt{10}$ तथा $BC = AD = 3\sqrt{2}$ हैं।

प्रश्न 7 x-अक्ष मान पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (2, -5) और (-2, 9) से समदूरस्थ हैं।

उत्तर- माना A(2, -5), B(-2, 9), तथा X-अक्ष पर बिंदु P(x, 0), हैं।

अत :AP^2 = BP^2 (चूँकि A तथा B बिंदु P से समदूरस्थ है(

$$\left[\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right]^2=\left[\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\right]^2$$

$$\Rightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2$$

$$\Rightarrow (2-x)^2+(-5-0)^2=(-2-x)^2+(9-0)^2$$

$$\Rightarrow (2)^2-2\times2\times x+(x)^2+(-5)^2=(-2)^2-2\times-2\times x+(x)^2+(9)^2$$

$$\Rightarrow 4-4x+x^2+25=4+4x+x^2+81$$

$$\Rightarrow x^2-4x+29=x^2+4x+85$$

$$\Rightarrow x^2-x^2-85+29=4x+4x$$

$$\Rightarrow -56=8x$$

$$\Rightarrow x=\frac{-56}{8}$$

$$\Rightarrow x=-7$$

अत: X-अक्ष पर बिंदु P (-7, 0) है।

प्रश्न 8 y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिन्दु P(2, -3) और Q(10, y) के बीच की दुरी 10 मात्रक है।

उत्तर- बिंदु P(2, -3) और Q(10, y) हैं तथा दोनों बिन्दुओं का मात्रक 10 हैं।

∴ दुरी सूत्र से,

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$\Rightarrow 10^2 = (10 - 2)^2 + (y + 3)^2$

$\Rightarrow 100 = 8^2 + y^2 + 6y + 9$

$\Rightarrow 100 = 64 + y^2 + 6y + 9$

⇒ $100 = 73 + y^2 + 6y$

⇒ $100 - 73 = y^2 + 6y$

⇒ $y^2 + 6y = 27$

⇒ $y^2 + 6y - 27 = 0$

⇒ $y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$

⇒ $y(y + 9) - 3(y + 9) = 0$

⇒ $(y + 9)(y - 3) = 0$

⇒ $y + 9 = 0$ तथा $y - 3 = 0$

अत :$y = -9$ तथा $y = 3$

अतः y का एक मान 3 तथा- 9 हैं।

प्रश्न 9 यदि Q(0, 1) बिन्दुओं P(5, -3) और R(x, 6) से समदूरस्थ है, तो x के मान ज्ञात कीजिए। दुरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

बिन्दु Q(0, 1), P(5, -3) और R(x, 6)से समदूरस्थ हैं।

$$PQ = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$= (5 - 0)^2 + (-3 - 1)^2$$

$$= 5^2 + (-4)^2$$

$$= 25 + 16$$

$$= 41 \ldots (i)$$

$$QR = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$QR^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$= (x - 0)^2 + (6 - 1)^2$$

$$= x^2 + 5^2$$

$$= x^2 + 25 \ldots (ii)$$

चुंकि PQ तथा QR की लम्बाई समान है।

अतः $41 = x^2 + 25$

$$x^2 = 41 - 25$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

अर्थात x = 4 तथा x = -4

अतः x का एक मान 4 तथा -4 है।

∴ दुरी सूत्र से,

Q(0, 1) और R(4, 6) के लिए,

$$QR = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2$$

$$QR = \sqrt{(4-0)^2 + (6-1)^2}$$

$$QR = \sqrt{16 + 25}$$

$$QR = \sqrt{41}$$

Q(0, 1) और R(-4, 6) के लिए,

$$QR = \sqrt{(-4-0)^2 + (6-1)^2}$$

$$QR = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

PR की लम्बाई,

P(5, -3) और R(4, 6)

$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PR = \sqrt{(4-5)^2 + (6+3)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (9)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 81}$$

$$= \sqrt{82}$$

P(5, -3) और R(-4, 6)

$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PR = \sqrt{(-4-5)^2 + (6+3)^2}$$

$= \sqrt{(-9)^2 + (9)^2}$

$= \sqrt{81 + 81}$

$= 9\sqrt{2}$

$QR = \sqrt{41}$ और $PR = \sqrt{82}$ और $9\sqrt{2}$ है।

प्रश्न 10 x और y में एक ऐसा संबध ज्ञात कीजिए कि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं (3, 6) और (-3, 4) से समदूरस्थ हो।

उत्तर- माना बिदुएँ P(x, y) तथा A(3, 6) और B(-3, 4)

AP तथा BP समदूरस्थ हैं।

इसलिए, AP = BP

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$AP^2 = BP^2$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = (x + 3)^2 + (y - 4)^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$

$\Rightarrow -6x - 12y + 36 = 6x - 8y + 16$

$\Rightarrow 36 - 16 = 6x + 6x - 8y + 12y$

$\Rightarrow 20 = 12x + 4y$

$\Rightarrow 12x + 4y = 20$

$\Rightarrow 4(3x + y) = 20$

$\Rightarrow 3x + y = 5$

$\Rightarrow 3x + y = 5$

$\Rightarrow 3x + y - 5 = 0$

प्रश्नावली 7.2 (पृष्ठ संख्या 183-184)

प्रश्न 1 उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (-1, 7) और (4, -3) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

उत्तर- माना वांछित बिन्दु P(x, y) है।

यहाँ रेखाखण्ड के अन्तः बिन्दु है-) 1, 7) और) 4, -3)

चूंकि अनुपात = 2 : 3 = $m_1 : m_2$

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(2\times4)+3\times(-1)}{2+3} = \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

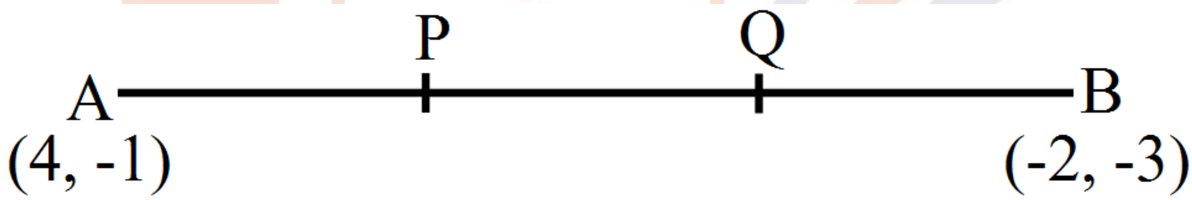
और $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

$$= \frac{2\times(-3)+(3\times7)}{2+3} = \frac{-6+21}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु (1, 3) है।

प्रश्न 2 बिन्दुओं (4, -1) और (-2, -3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम त्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना दिए गये बिन्दु हैं, A(4, -1) और B(-2, -3)

माना रेखाखण्ड AB को बिन्दु P और Q समत्रिभाजित करते हैं।

अर्थात् AP = PQ = QB

बिन्दु P रेखाखण्ड AB को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है। इसी प्रकार बिन्दु Q रेखाखण्ड AB को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

माना बिन्दु P के निर्देशांक) x, y) हैं।

$$\therefore\ x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$$

$$x = \frac{1(-2)+2(4)}{1+2} = \frac{-2+8}{3} = 2$$

$$y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

$$y = \frac{1(-3)+2\times(-1)}{1+2} = \frac{-3-2}{3} = \frac{-5}{3}$$

$\therefore$ बिन्दु P के अभीष्ठ निर्देशांक है, $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ माना Q के निर्देशांक (X, Y) हैं।

$$\therefore\ X = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$$

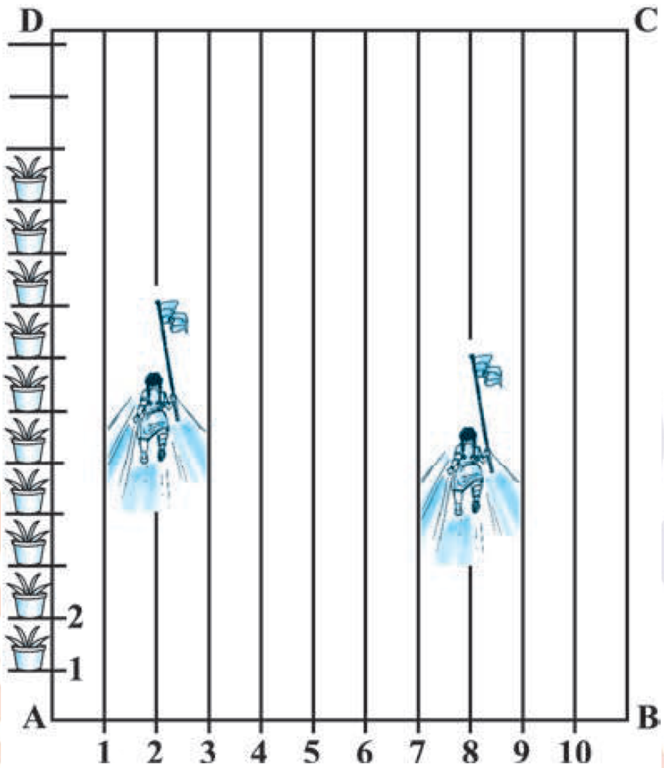
$$X = \frac{2(-2)+1(4)}{2+1} = \frac{-4+4}{3} = 0$$

$$Y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

$$y = \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1} = \frac{-6+(-1)}{3} = \frac{-7}{3}$$

इस प्रकार, Q के निर्देशांक हैं $\left(0, \frac{-7}{3}\right)$

प्रश्न 3 आपके स्कूल में खेल-कूद क्रियाकलाप आयोजित करने के लिए, एक आयताकार मैदान ABCD में, चुने से परस्पर 1m की दुरी पर पंक्तियाँ बनाई गई हैं। AD के अनुदिश परस्पर 1m की दुरी पर 100 गमले रखे हैं, जैसा कि में दर्शाया गया है। निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झंडा गाड़ देती है। प्रीत आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौडती है और वहाँ एक लाल झंडा गाड देती है दोनों झंडों के बीच की दूरी क्या है? यदि रश्मि को एक नीला झंडा इन दोनों झंडों को मिलाने वाले रेखाखंड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) पर गाड़ना हो तो उसे अपना झंडा कहाँ गाड़ना चाहिए?



उत्तर-

AB और AD क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष हैं।

अब, हरे-झंडे की स्थिति $\left(2, \frac{100}{4}\right)$ या (2, 25) हैं।

और लाल रंग के झंडे की स्थिति है, $\left(8, \frac{100}{5}\right)$ या (8, 20)

दोनों झंडों के बीच की दूरी $= \sqrt{(8-2)^2 + (20-25)^2}$

$$= \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$$

माना झंडों को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्यबिन्दु M(x, y) हैं।

$\therefore\ x = \frac{2+8}{2}$ और $y = \frac{25+20}{2}$

$x = 5$ और $y = (22.5)$

अतः नीला झण्डा 5 वी लाइन पर AB के ऊपर 22.5m की दुरी पर गाड़ना चाहिए।

प्रश्न 4 बिन्दुओं (-3, 10) और (6, -8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिन्दु (-1, 6) किस अनुपात में विभाजित करता है।

उत्तर- माना दिए गए बिन्दुओ के निर्देशांक हैं, A(3, 10) और B(6, -8)

माना बिन्दु P(-1, 6) रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है।

∴ विभाजन सूत्र से हमे प्राप्त होता है,

$$(-1, 6) = \left(\frac{x_2m_1+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$\Rightarrow (-1, 6) = \left(\frac{(m_1\times6)+[m_2\times(-3)]}{m_1+m_2}, \frac{[m_1-(-8)]+(m_2\times10)}{m_1+m_2}\right)$$

$$\Rightarrow (-1, 6) = \frac{6m_1+(-3m_2)}{m_1+m_2}, \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{6m_1-3m-2}{m_1+m_2} \text{ और } 6 = \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow -1(m_1+m_2) = 6m_1 - 3m_2 \text{ और } 6(m_1+m_2) = -8m_1 + 10m_2$$

$$\Rightarrow -m_1 - m_2 - 6m_1 + 3m_2 = 0 \text{ और } 6m_1 + 6m_2 + 8m_1 - 10m_2 = 0$$

$$\Rightarrow -7m_1 + 2m_2 = 0 \text{ और } 14m_1 - 4m_2 = 0 \text{ या } 7m_1 - 2m_2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m_2 = 7m_1 \text{ और } 7m_1 = 2m_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7} \text{ और } \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow m_1 : m_2 = 2 : 7 \text{ और } m_1 : m_2 = 2 : 7$$

इस प्रकार अभीष्ठ अनुपात 2 : 7 है।

प्रश्न 5 वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं A(1, -5) और B(-4, 5) को मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए बिंदु A(1, -5) और B(-4, 5) है।

माना बिन्दु P(x, y), AB को k : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

भाग-I: अनुपात ज्ञात करना,

चुंकि बिन्दु P, x-अक्ष पर स्थित है।

∴ y-निर्देशांक 0 है।

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2} \text{ और } 0 = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k(-4)+1(1)}{k+1} \text{ और } 0 = \frac{k(5)+1(-5)}{k+1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4k+1}{k+1} \text{ और } 0 = \frac{5k-5}{k+1}$$

$$\Rightarrow x(k+1) = -4k+1 \text{ और } 5k-5=0 \Rightarrow k=1$$

भाग-II: निर्देशांक ज्ञात करना,

$$\Rightarrow x(k+1) = -4k+1$$

$$\Rightarrow x(1+1) = -4+1 \; [\because \; k=1]$$

$$\Rightarrow 2x = -3$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

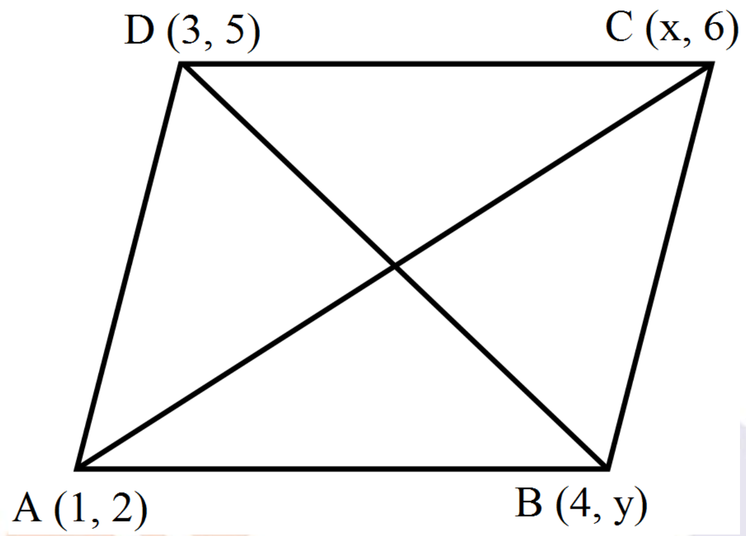
∴ अभीष्ट अनुपात k : 1 = 1 : 1, अभीष्ट निर्देशांक

$$P(x,0) = P\left(\frac{-3}{2},0\right)$$

प्रश्न 6 यदि बिन्दु (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5), इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात कीजिए।

उत्तर- हमें समान्तर चतुर्भुज प्राप्त है, जिसके शीर्ष है।

A(1, 2), B(4, y), C(x, 6) और D(3, 5)



चूँकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बिन्दु P पर संदिवभाग करते है।

$\therefore$ P के निर्देशांक हैं,

$$X = \frac{x+1}{2} = \frac{3+4}{2}$$

$$\Rightarrow x + 1 = 7$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$Y = \frac{5+y}{2} = \frac{6+2}{2}$$

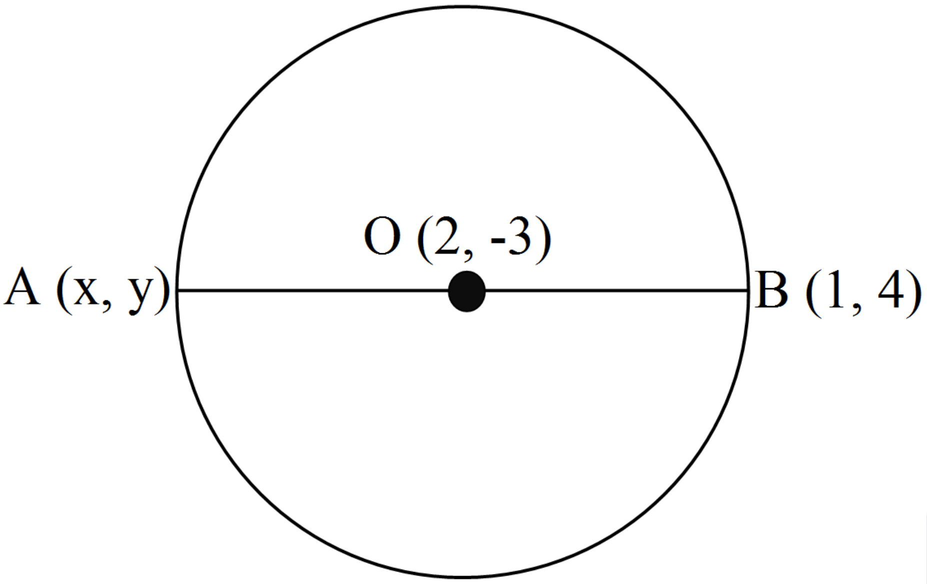
$$\Rightarrow 5 + y = 8$$

$\Rightarrow y = 3$ इस प्रकार x और y के अभीष्ठ मान है, x = 6, y = 3

प्रश्न 7 बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केंद्र (2, -3) है तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं।

उत्तर- यहाँ, वृत्त का केन्द्र O(2, -3) है।

माना वृत्त के व्यास के अन्त बिन्दु A(x, y) और B(1, 4) है।



चूंकि, वृत्त का केन्द्र इसके व्यास को समदिवभाजित करता है।

$$\therefore 2 = \frac{x+1}{2}$$

$\Rightarrow x + 1 = 4$ या $x = 3$

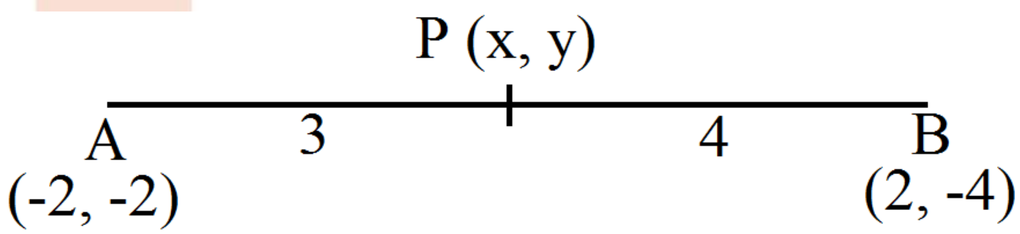
और $-3 = \frac{y+4}{2}$

$\Rightarrow y + 4 = -6$ या $y = -10$

अतः A के निर्देशांक हैं, (3, -10)

प्रश्न 8 यदि A और B क्रमशः (-2, -2) और (2, -4) हो तो बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \frac{3}{7}AB$ हो और P रेखाखंड AB पर स्थित हो।

उत्तर-



यहाँ दिए गये बिन्दु है, A(-2, 2) और B(2, -4)

माना रेखाखण्ड AB को बिन्दु P इस प्रकार विभाजित करता है कि,

$AP = \frac{3}{7}AB$ या $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{7}$

चूंकि $AB = AP + BP$

$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{3}{7}$

$\Rightarrow \frac{AP}{AP+AB} = \frac{3}{7}$

$\Rightarrow \frac{AP+BP}{AP} = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow 1 + \frac{BP}{AP} = \frac{3+4}{3} = 1 + \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow AP : PB = 3 : 4$

i.e., P(x, y)AB को 3 : 4 के अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore x = \frac{3\times2+4\times(-2)}{3+4} = \frac{6-8}{7} = \frac{-2}{7}$

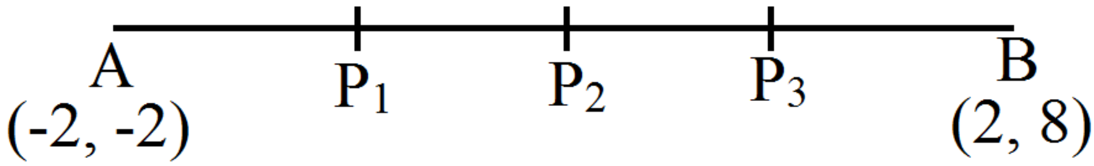
$y = \frac{3\times(-4)+4\times(-2)}{3+4}$

$y = \frac{-12-8}{7} = \frac{-20}{7}$

इस प्रकार, P के निर्देशांक हैं, $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$

प्रश्न 9 बिन्दुओं A(-2, 2) और B(2, 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



यहाँ, दिए गये बिन्दु है, A(-2, 2) और B(2, 8)

माना P_1, P_2 और P_3 रेखाखण्ड AB को चार समान भागों में विभाजित करते है।

$$\because \; AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3B$$

स्पष्ट है कि P_2 रेखाखण्ड AB का मध्यबिन्दु है।

$\therefore$ P_2 के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+8}{2}\right) \text{ या } (0, 5)$$

पुनः P_1 रेखाखण्ड AP_2 का मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ P_1 के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{2-5}{2}\right) \text{ या } \left(-1, \frac{7}{2}\right)$$

और P_3 रेखाखण्ड P_2B का मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ P_3 के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+8}{2}\right) \text{ या } \left(1, \frac{13}{2}\right)$$

इस प्रकार P_1, P_2 और P_3 के निर्देशांक क्रमशः हैं,

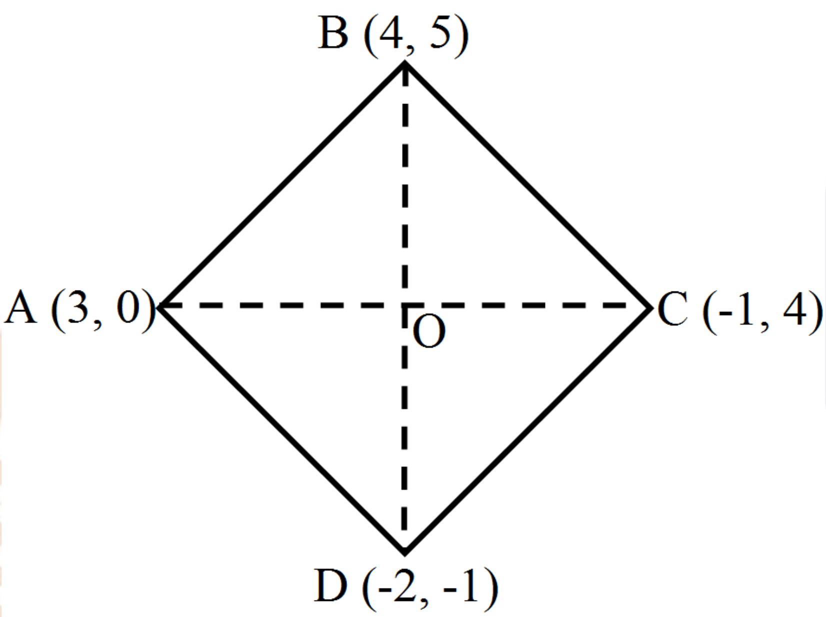
$$(0, 5), \left(-1, \frac{7}{2}\right) \text{ और } \left(1, \frac{13}{2}\right)$$

प्रश्न 10 एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, (3, 0), (4, 5), (1, 4) और (-2, -1) हैं।

[संकेत: समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (उसके विकर्णों का गुणफल)]

उत्तर- माना दिए गये समचतुर्भुज के शीर्ष निम्नांकित है।

A(3, 0), B(4, 5), C(-1, 4) और D(-2, -1)



चूंकि, AC और BD समचतुर्भुज ABCD के विकर्ण है।

और विकर्ण $AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{16 + 16}$

$= 4\sqrt{2}$

तथा विकर्ण $BD = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36 + 36}$

$= 6\sqrt{2}$

चूंकि एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल,

$= \frac{1}{2}$ × (विकर्णों का गुणनफल)

$= \frac{1}{2}(AC \times BD)$

$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 6$ वर्ग इकाई

$= 4 \times 6$ वर्ग इकाई

$= 24$ वर्ग इकाई

प्रश्नावली 7.3 (पृष्ठ संख्या 188)

प्रश्न 1 उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष हैं-

(i) (2, 3), (-1, 0), (2, -4)
(ii) (-5, -1), (3, -5), (5, 2)

उत्तर-

(i)

माना दिए गये $\triangle ABC$ के शीर्षों के निर्देशांक है।

A(2, 3), B(-1, 0) और C(2, -4)

यहाँ $x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -1, y_2 = 0, x_3 = 2, y_3 = -4$

चूंकि $\triangle$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore \triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[2\{0 - (-4) + (-1)\{-4 - (3)\} + 2\{3 - 0\}]$

$= \frac{1}{2}[2(0 + 4) + (-1)(-4 - 3) + 2(3)]$

$= \frac{1}{2}[8 + 7 + 6]$

$= \frac{1}{2}[21] = \frac{21}{2}$ वर्ग इकाई

(ii)

माना दिए गये $\triangle$ के शीर्षों के निर्देशांक है।

A(-5, -1), B(3, -5) और C(5, 2)

यहाँ $x_1 = -5, y_1 = -1, x_2 = 3, y_2 = -5, x_3 = 5, y_3 = 2$

$\because \triangle$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore \triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[-5\{-5 - 2\} + 3\{2 - (-1)\} + 5\{-1 - (-5)\}]$

$= \frac{1}{2}[-5\{-7\} + 3(2 + 1) + 5\{-1 + 5\}]$

$= \frac{1}{2}[-5(-7) + 3(3) + 5(4)]$

$= \frac{1}{2}[35 + 9 + 20]$

$= \frac{1}{2}[64]$

$= 32$ वर्ग इकाई

प्रश्न 2 निम्नलिखित में से प्रत्येक में ‘k’ का मान ज्ञात कीजिए, ताकि तीनों बिंदु संरेखी हों।

(i) (7, -2), (5, 1), (3, k)

(ii) (8, 1), (k, -4), (2, -5)

उत्तर-

(i) दिए गये तीन बिन्दु संरेखी होंगे, यदि उनसे बनी △ का क्षेत्रफल शून्य हो।

माना, A(7, -2), B(5, 1) और C(3, k) हैं।

∴ A, B और C संरेखी होंगे यदि क्षेत्रफल (△ABC) = 0

अर्थात $7(1 - k) + 5(k + 2) + 3(-2 - 1) = 0$

$\Rightarrow 7 - 7k + 5k + 10 + (-6) - 3 = 0$

$\Rightarrow 17 - 9 + 5k - 7k = 0$

$\Rightarrow 8 - 2k = 0$

$\Rightarrow 2k = 8$

$\Rightarrow k = \frac{8}{2} = 4$ अतः k का अभीष्ठ मान = 4

(ii) माना, (8, 1), (k, -4) और) 2, -5) एक △△ के शीर्षों के निर्देशांक है।

A, B और C संरेखी होंगे यदि क्षेत्रफल (△ABC) = 0

i.e., $8(-4 + 5) + k(-5 - 1) + 2[1 - (-4)] = 0$

$\Rightarrow 8(+1) + k(-6) + 2(5) = 0$

$\Rightarrow 8 + (-6k) + 10 = 0$

$\Rightarrow -6k + 18 = 0$

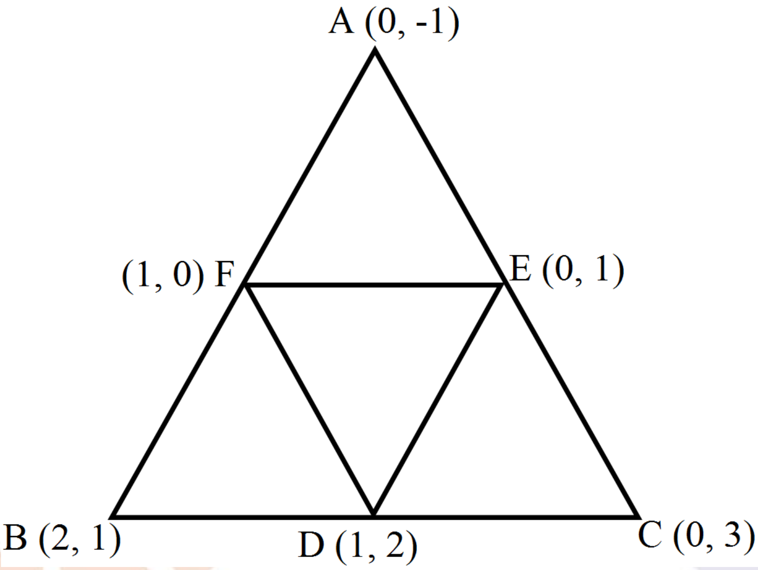
$\Rightarrow k = (-18) \div (-6)$

$\Rightarrow k = 3$

इस प्रकार, k = 3

प्रश्न 3 शीर्षों (0, -1), (2, 1) और (0, 3) वाले त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्रफल का दिए हुए त्रिभुज के क्षेत्रफल के साथ। अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना $\triangle$ के शीर्ष (0, -1), (2, 1) और (0, 3) है।

माना D, E और F क्रमशः $\triangle ABC$ की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिंदु है।

D के निर्देशांक है, $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ i.e., $\left(\frac{2}{4}, \frac{4}{2}\right)$ और (1, 2)

E के निर्देशांक है, $\frac{0+0}{2}, \frac{3+(-1)}{2}$ i.e., (0, 1)

अब, क्षेत्रफल $(\triangle ABC) = \frac{1}{2}[0(1-3)+2\{3-(-1)\}+0(-1-1)]$

$= \frac{1}{2}[0(-2)+8+0(-2)]$

$= \frac{1}{2}[0+8+0]$

$= \frac{1}{2} \times 8 = 4$ वर्ग इकाई

क्षेत्रफल $\triangle(DEF) = \frac{1}{2}[1(1-0)+0)(0-2)+1(2-1)]$

$= \frac{1}{2}[1(1)+0+1(1)]$

$= \frac{1}{2}[1+0+1]$

$= \frac{1}{2} \times 2 = 1$ वर्ग इकाई

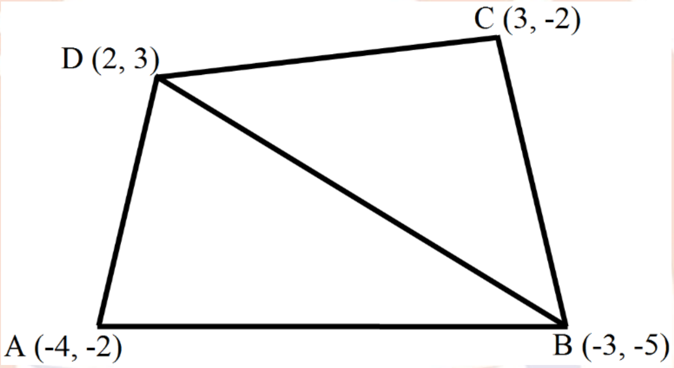
$\therefore \frac{(\triangle DEF)}{(\triangle ABC)} = \frac{1}{4}$

क्षेत्रफल $(\triangle DEF)$: क्षेत्रफल $(\triangle ABC)$

$= 1 : 4$

प्रश्न 4 उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, (-4, -2), (-3, -5), (3, -2) और (2, 3) हैं।

उत्तर-



माना दिए गये चतुर्भुज के शीर्ष इस प्रकार है,

A(-4, -2), B(-3, -5), C(3, -2) और D(2, 3)

विकर्ण BD को मिलाते है।

अब, क्षेत्रफल $(\triangle ABD) = \frac{1}{2}\left[(-4)\{-5-3\} + (-3)\{3-(-2)\} + 2\{-2) - (-5)\}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(-4)(-8) + (-3)(5) + 2(-2+5)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[32 + (-15) + 6\right]$

$= \frac{1}{2}\left[23\right]$

$= \frac{23}{2}$ वर्ग इकाई

क्षेत्रफल $(\triangle CBD) = \frac{1}{2}\left[3-(-5-3)+(-3)\{3-(-2)\}+2\{(-2)-(-5)\}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3(-8)+(-3)(5)+2(3)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-24-15+6\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-33\right]$

$= \frac{33}{3}$ वर्ग इकाई

क्षेत्रफल (चतुर्भुज ABCD) = क्षेत्रफल $(\triangle ABD)$ + क्षेत्रफल $(\triangle CBD)$

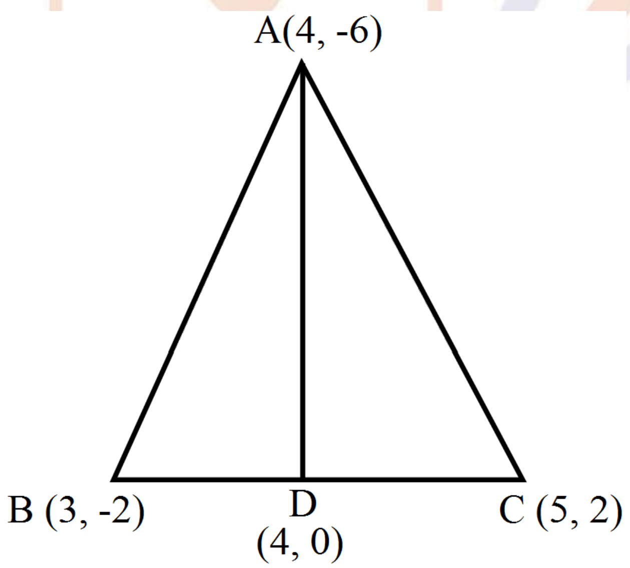
क्षेत्रफल (चतुर्भुज ABCD) $= \left(\frac{23}{2}+\frac{33}{2}\right)$ वर्ग इकाई

$= \frac{56}{2}$ वर्ग इकाई

$= 28$ वर्ग इकाई

प्रश्न 5 किसी त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है। उस त्रिभुज ABC के लिए इस परिणाम का सत्यापन कीजिए जिसके शीर्ष A(4, -6), B(3, -2) और C(5, 2) हैं।

उत्तर-



यहाँ $\triangle ABC$ के शीर्षो के निर्देशांक इस प्रकार है,

A(4, -6), B(3, -2) और C(5, 2)

$\therefore$ D के निर्देशांक है,

$\left\{\frac{3+5}{2}, \frac{-2+2}{2}\right\}$ या (4, 0)

चूंकि रेखाखण्ड AD, $\triangle ABC$ को दो भागों $\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में विभाजित करता है।

अब, क्षेत्रफल $(\triangle ABD) = \frac{1}{2}\left[4\{(-2)-0\}+3(0+6)+4(-6+2)\}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(-8)+18+(-16)\right]$

$= \frac{1}{2}(-6) = -3$

$= 3$ वर्ग इकाई .....(i)

क्षेत्रफल $(\triangle ACD) = \frac{1}{2}\left[4(0-2)+4(2+6)+5(-6-0)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-8+32+30\right]$

$= \frac{1}{2}[-6] = -3$

$= 3$ वर्ग इकाई .....(ii)

(i) और (2) से, क्षेत्रफल $(\triangle ABD)$ = क्षेत्रफल $(\triangle ACD)$

अर्थात, माध्यिका एक त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बांटती है।

प्रश्नावली 7.4 (पृष्ठ संख्या 188-189)

प्रश्न 1 बिन्दुओं A(2, -2) और B(3, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड को रेखा 2x + y - 4 = 0 जिस अनुपात में विभाजित करती है उसे ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना दिए गये बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड AB को रेखा 2x + y - 4 = 0 बिन्दु C पर है k : 1 के अनुपात में विभाजित करती है।

$\therefore$ C के निर्देशांक है, $\left(\frac{3k+2}{k+1}, \frac{7k-2}{k+1}\right)$

चूंकि बिन्दु C रेखा 2x + y - 4 = 0 पर स्थित है,

$$\therefore\ 2\left(\frac{3k+2}{k+1}\right) + \left(\frac{7k-2}{k+1}\right) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2[3k+2] + [7k-2] = 4 \times (k+1)$$

$$\Rightarrow 6k + 4 + 7k - 2 - 4k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (6 + 7 - 4)k + (4 - 2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 9k + (-2) = 0$$

$$\Rightarrow 9k - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{9}$$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $= k : 1 = \frac{2}{9} : 1 = 2 : 9$

प्रश्न 2 x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, यदि बिउंदु (x, y), (1, 2) और (7, 0) सरेंखी हैं।

उत्तर- दिए गये बिन्दु है, A(x, y), B(1, 2) और C(7, 0)

A, B और C सरेंखी होंगे यदि इन बिन्दुओ से बनी △ का क्षेत्रफल शून्य हो।

अर्थात यदि x(2 - 0) + 1(0 - y) + 7(y - 2) = 0

यदि 2x - y + 7y - 14 = 0 हो

यदि 2x + 6y - 14 = 0 हो

यदि x + 3y - 7 = 0 हो

जो कि x और y के बीच अभीष्ट संबंध है।

प्रश्न 3 बिन्दुओं (6, -6),(3, 7) और (3, 3) से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना बिन्दुओं A(6, -6), B(3, -7) और C(3, 3) से गुजरने वाले वृत्त का केन्द्र P(x, y) है।

$\therefore$ AP = BP = CP

AP = BP

$\Rightarrow AP^2 - BP^2$

$\Rightarrow (x - 6)^2 + (y + 6) = (x - 3)^2 + (y + 7)^2$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 + 12y + 36 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 14y + 49$

$\Rightarrow -12x + 6x + 12y - 14y + 72 - 58 = 0$

$\Rightarrow -6x - 2y + 14 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 7 = 0$ ....(i) [-2 से भाग करने पर[

अब BP = CP, से हमें प्राप्त है $BP^3 = CP^2$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 7)^2 = (x - 3)^2 + (y - 3)^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 14y + 49 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9$

$\Rightarrow -6x + 6x + 14y + 6y + 58 - 18 = 0$

$\Rightarrow 20y + 40 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-40}{20}$

$\Rightarrow y = -2$ ....(ii)

(i) और) ii) से,

$\Rightarrow 3x - 2 - 7 = 0$

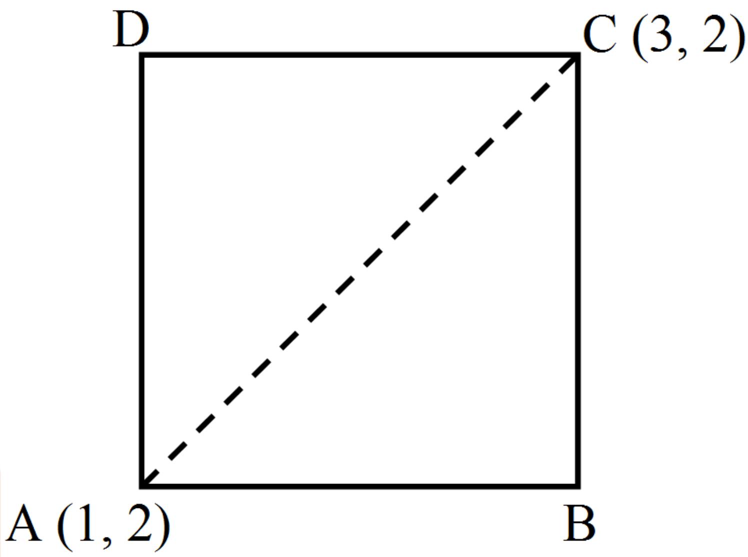
$\Rightarrow 3x = 9$

$\Rightarrow x = 3$

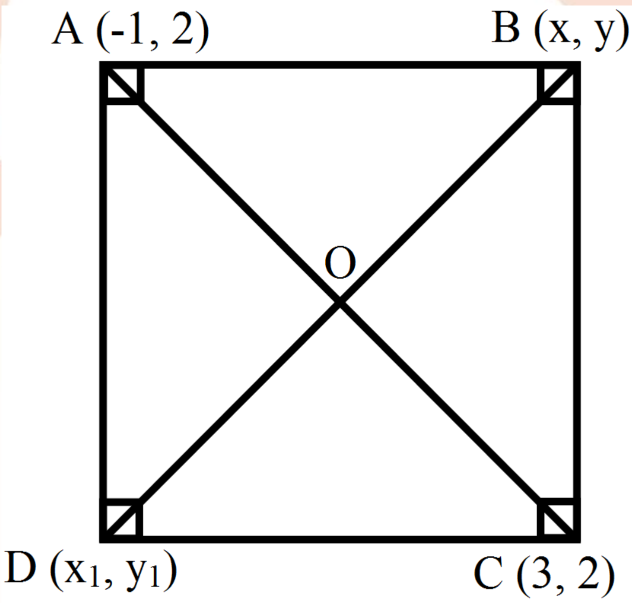
i.e., x = 3 और y = -2

अतः वृत्त का अभीष्ट केन्द्र) 3, -2) है।

प्रश्न 4 किसी वर्ग के दो सम्मुख शीर्ष (-1, 2) और (3, 2) हैं। वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष ज्ञात कीजिए।



उत्तर- वर्ग के दो सम्मुख शीर्ष A(-1, 2) और C(3, 2) है। माना वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष B(x, y) और A(x_1, y_1) है।



वर्ग की सभी भुजाएँ समान होती है। अतः,

$$\therefore \ AB = BC$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y$$

$$\Rightarrow 8x = 8$$

$$\Rightarrow x = 1$$

वर्ग के सभी आंतरिक कोण 90° के होते है। अतः,

$\triangle ABC$ में,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(1+1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1-3)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(3+1)^2 + (2-2)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4 + y^2 + 4 - 4y + 4 + y^2 - 4y + 4 = 16$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 16 - 8y = 16$$

$$\Rightarrow 2y^2 - 8y = 0$$

$$\Rightarrow y(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ या } y = 4$$

हम जानते है की वर्ग के विकर्ण समान होते है, और एक दूसरे को समदिभजित करते है। इसलिए, AC के मध्य बिंदु के निर्देशांक = BD के मध्य बिंदु के निर्देशांक,

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = \left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (1, 2) = \left(\frac{1+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$$

तुलना करने पर,

$$\frac{1+x_1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + x_1 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

तथा $\frac{y+y_1}{2} = 2$

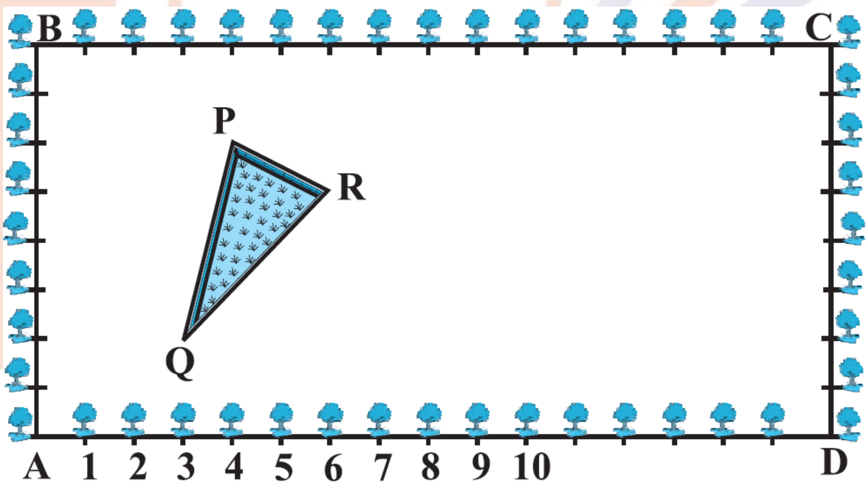
$$\Rightarrow y + y_1 = 4$$

यदि $y = 0,\ y_1 = 4$

यदि $y = 4,\ y_1 = 0$

इस प्रकार, वर्ग के अन्य दोनों शीर्षों (1, 0) और (1, 4) है।

प्रश्न 5 कृष्णा नगर के एक सेकेंडरी स्कूल के कक्षा X के विधार्थियों को उनके बागवानी क्रियाकलाप के लिए, एक आयताकार भूखंड दिया गया है। गुलमोहर की पौध को परस्पर 1m की दूरी पर इस भूखंड की परिसीमा (boundary) पर लगाया जाता है। इस भूखंड के अन्दर एक त्रिभुजाकार घास लगा हुआ लॉन (lawn) है, विधार्थियों को भूखंड के शेष भाग में फूलों के पौधे के बीज बोने हैं।



i. A को मूलबिंदु मानते हुए, त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
ii. यदि मूलबिंदु C हो, त्रिभुज PQR के निर्देशांक क्या होंगे। साथ ही, उपरोक्त दोनों स्थितियों में, त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

उत्तर-

i. A को मूल बिन्दु (origin) और AD तथा AB के निर्देशांक अक्ष लेने पर हमें प्राप्त होता है कि P के निर्देशांक (4, 6), Q के निर्देशांक (3, 2), R के निर्देशांक (6, 5) ΔPQR के शीर्ष हैं।
ii. बिन्दु C के मूल बिन्दु और CB तथा CD को निर्देशांक-अक्ष लेने पर △PQR के शीर्षों के निर्देशांक हैं, P (12, 2), Q (13, 6) और R (10, 3)

अब, क्षेत्रफल (△PQR) [जबकि P(4, 6), Q(3, 2) और R(6, 5) हैं]

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4(2-5) + 3(5-6) + 6(6-2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-12 - 3 + 24\right]$$

$$= \frac{9}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

क्षेत्रफल $(\triangle PQR)$ [जब P(12, 2), 2(13, 6) और R(10, 3) हैं]

$$= \frac{1}{2}\left[12(6-3) + 13(3-2) + 10(2-6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[36 + 13 - 40\right]$$

$$= \frac{9}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

इस प्रकार, दोनों अवस्थाओं में $\triangle PQR$ का क्षेत्रफल एक ही है।

प्रश्न 6 एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A(4, 6), B(1, 5) और C(7, 2) हैं। भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करते हुए एक रेखा इस प्रकार खींची गई है की $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ है। △ADE का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए और इसकी तुलना △ABC के क्षेत्रफल से कीजिए।

उत्तर-

हमें प्राप्त है,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AD} + \frac{DE}{AD} = \frac{4}{1} = 1 + \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{DE}{AD} = 1 + \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow AD : DE = 1 : 3$$

इस प्रकार, बिन्दु D रेखाखण्ड AB को 1 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore$ बिन्दु D के निर्देशांक है,

$$\left[\frac{(1\times1)+(3\times4)}{1+3}, \frac{(1\times5)+(3\times6)}{1+3}\right]$$

$$= \left[\frac{1+12}{4}, \frac{5+18}{4}\right]$$

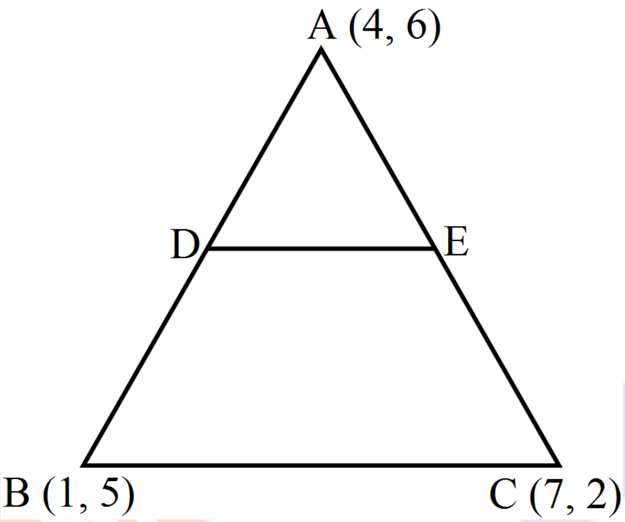
$$= \left(\frac{13}{4}, \frac{23}{4}\right)$$

इसी प्रकार, AE : EC = 1 : 3

$$= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{13}{4} + \frac{19}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{48+52+19}{16}\right]$$

$$= \frac{15}{32} \text{ वर्ग इकाई}$$



क्षेत्रफल $(\triangle ABD) = \frac{1}{2}[4(5-2)+1(2-6)+7(6-5)]$

$= \frac{1}{2}[(4\times 3)+1\times(-4)+7\times 1]$

$= \frac{1}{2}[12+(-4)+7] = \frac{1}{2}(15)$

$= \frac{15}{2}$ वर्ग इकाई

अब, $\frac{(\triangle ADE)}{(\triangle ABC)} = \frac{\frac{15}{32}}{\frac{15}{2}} = \frac{15}{32}\times\frac{2}{15} = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $(\triangle ADE)$: क्षेत्रफल $(\triangle ABC)$

$\Rightarrow 1 : 16$

प्रश्न 7 मान लीजिए A(4, 2), B(6, 5) और C(1, 4) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

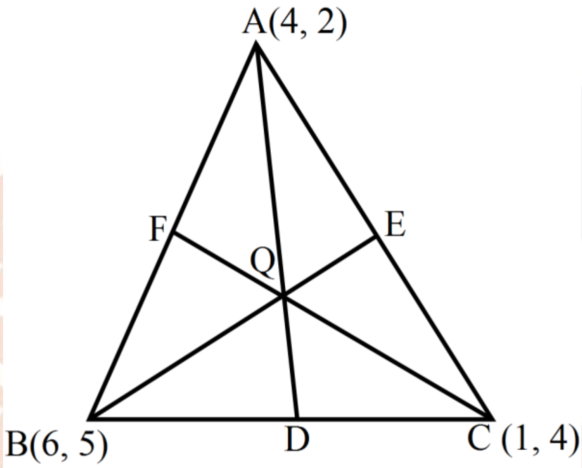
(i) A से होकर जाने वाली माध्यिका BC से D पर मिलती है। बिन्दु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
(ii) AD पर स्थित ऐसे बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए की AP : PD = 2 : 1 हो।
(iii) माध्यिकाओं BE और CF पर ऐसे बिन्दुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए की BQ : QE = 2 : 1 हो और CR : RF = 2 : 1 हो।
(iv) आप क्या देखते हैं?

[**नोट:** वह बिंदु जो तीनों माध्यिकाओं में सर्वनिष्ठ हो, उस त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है और यह प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।[

(v) यदि $A(x_1, y_1)_2$, $B(X_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, तो इस त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i)



हमें प्राप्त है कि, ΔABC के शीर्ष A(4, 2), B(6, 5) और C(1, 4) है।

चुंकि AD एक माधियका है,

∴ D के निर्देशांक है,

$$\left(\frac{6+1}{2}, \frac{5+4}{2}\right) \text{ या } \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

(ii)

चूँकि AP : PD = 2 : 1 अर्थात P रेखाखण्ड AD को 2 : 1 के अनुपात में बांटता है।

∴ P के निर्देशांक है,

$$= \left[\frac{2\left(\frac{7}{2}\right)+(1\times 4)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{9}{2}\right)+1\times 2}{2+1}\right]$$

$$\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

(iii)

चूँकि BQ : QE = 2 : 1

Q रेखाखंड BE को 2 : 1 के अनुपात में बांटती है,

∴ Q के निर्देशांक है,

$$= \left[\frac{2\left(\frac{5}{2}\right)+1\times 6}{2+1}, \frac{(2\times 3)+(1\times 5)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{5+6}{3}, \frac{6+5}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right]$$

Q के निर्देशांक है,

$$= \left(\frac{4+6}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$$

$$= \left(5, \frac{7}{2}\right)$$

R के निर्देशांक है,

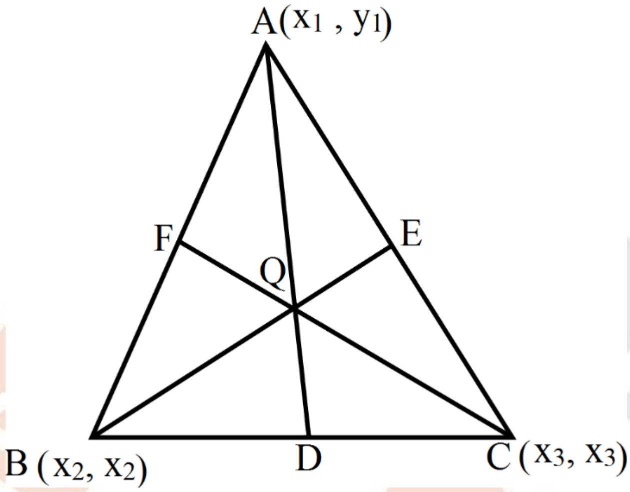
$$= \left[\frac{2\times 5+1\times 1}{2-1}, \frac{2\times \frac{7}{2}+1\times 4}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{10+1}{3}, \frac{7+4}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right]$$

(iv) स्पष्ट है कि P, Q और R एक बिन्दु को वयक्त करते है।

(v) हमें प्राप्त है कि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$, $\triangle ABC$ के शीर्ष है। तथा AD, BE और CF इसकी माध्यिकाएँ है।



$\therefore$ D, E और F क्रमशः BC, CA और AB के मध्य बिन्दु है।

हम जानते है केन्द्रक माध्यिका पर स्थित एक ऐसा बिन्दु होता है, जो उसे 2 : 1 के अनुपात में बांटे।

माध्यिका AD के अन्तः-बिन्दुओ के निर्देशांक है,

$$\left[\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right]$$

माना G एक केन्द्रक है,

$\therefore$ केन्द्रक के निर्देशांक है,

$$= \left[\frac{(1\times x_1)+2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{1+2}, \frac{(1\times y_1)+2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)}{1+2}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]$$

इसी प्रकार अन्य माध्यिकाओं से, हमे प्राप्त होता है कि,

G के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

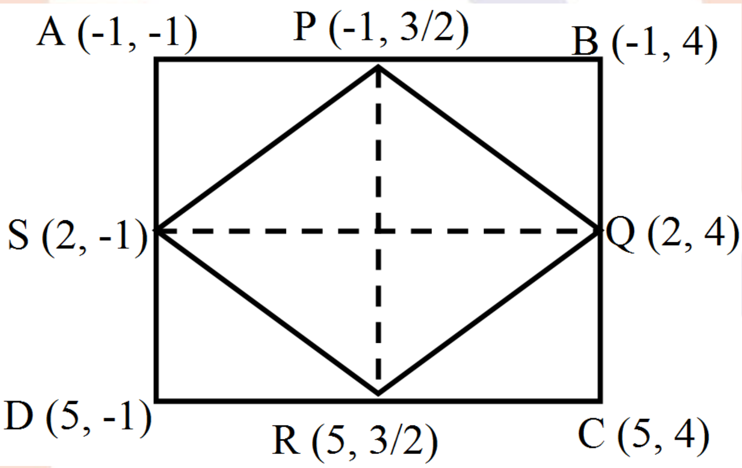
अर्थात, एक केन्द्रक के निर्देशांक, $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ है।

प्रश्न 8 बिन्दुओं A(-1, -1), B(-1, 4), C(5, 4) और D(5, -1) से एक आयात ABCD बनता है। PQR और S क्रमशः भुजाओं AB,BC,CD और DA के मध्य बिन्दु हैं। क्या चतुर्भुज PQRS एक वर्ग है? क्या यह एक आयत है? क्या यह एक समचतुर्भुज है? सकारण उत्तर दीजिए।

उत्तर- हमें प्राप्त है कि एक चतुर्भुज शीर्ष है,

A(-1, -1), B(-1, 4), C(5, 4), D(5, -1)

चूंकि AB का मध्य बिन्दु P है।



$\therefore$ P के निर्देशांक है, $\left[\frac{-1-1}{2}, \frac{-1+4}{2}\right]$ या $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

इसी प्रकार Q के निर्देशांक है, $\left[\frac{-1+5}{2}, \frac{4+4}{2}\right]$ या $(2, 4)$

तथा R के निर्देशांक है, $\left(\frac{5+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$ या $\left(5, \frac{3}{2}\right)$

और S के निर्देशांक है, $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1-1}{2}\right)$ या $(2, -1)$

अब, $PQ = \sqrt{(2+1)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$SR = \sqrt{(5-2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2}$

$= \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$RS = \sqrt{(2-5)^2 + \left\{-1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^2}$

$= \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$SP = \sqrt{(2+1)^2 + \left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$SR = \sqrt{(5+1)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{6^2 - 0} = 6$

$QS = \sqrt{(2-2)^2 + (4+1)^2}$

$= \sqrt{0 + 5^2} = 5$

उक्त से स्पष्ट है कि PQ = QR = RS = SP

अर्थात चतुर्भुज PQRS की सभी भुजाएँ समान है।

∴ यह एक वर्ग या एक समचतुर्भुज हो सकता है।

चूँकि PR ≠ QS

अर्थात PQRS के विकर्ण समान नहीं है।

त्रिकोणमितीय अनुपात

एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के कुछ अनुपातों का उसके न्यून कोणों के सापेक्ष अध्ययन करेंगे जिन्हें कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं। यहाँ हम 0° और 90° के माप वाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को भी परिभाषित करेंगे।

त्रिकोणमिति का परिचय [Introduction of Trigonometry]

- त्रिकोणमिति गणित की एक अहम शाखा है, जिसके अंतर्गत समकोण त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के सम्बन्धों का का अध्ययन किया जाता है।

- अंग्रेजी शब्द 'Trigonometry' की व्युत्पत्ति ग्रीक भाषा के तीन शब्दों से मिलकर हुई है -

'tri' (तीन), 'gon' (भुजा) और 'metron' (माप) अर्थात 'तीन भुजाओं की माप' जोकि एक त्रिभुज होता है।

- प्राचीनकाल में त्रिकोणमिति पर मिस्र और बेबीलोन देशों ने कार्य किया है।

- समकोण त्रिभुज (right angled triangle) - ऐसा त्रिभुज जिसमें कोई भी एक कोण 90° का हो।

- न्यूनकोण (acute angle) - 90° से कम मान वाले कोण को न्यूनकोण कहते हैं।

- त्रिकोणमितीय अनुपात (trigonometric ratios)

    sin A = लंब/कर्ण या 1/cosec A

    cos A = आधार/कर्ण या 1/sec A

    tan A = लंब/आधार या 1/cot A

    cosec A = कर्ण/लंब या 1/sin A

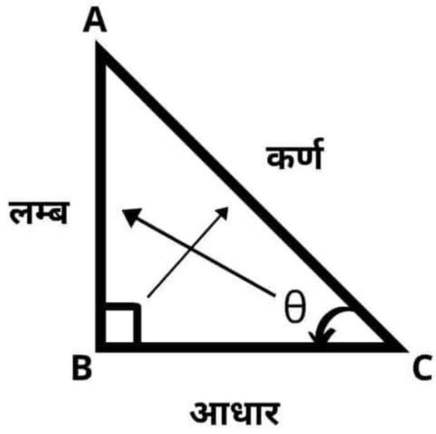
    sec A = कर्ण/आधार या 1/cos A

    cot A = आधार/लंब या 1/tan A

ध्यान दें - cosec A, sec A और cot A के अनुपात क्रमशः sin A, cos A और tan A के व्युत्क्रम (उल्टे) होते हैं।

त्रिकोणमिति फार्मूला

- (लम्ब) 2 + (आधार)2 = (कर्ण) 2
- sin (90° – θ) = cos θ
- cos (90° – θ) = sin θ
- tan (90° – θ) = cot θ
- cosec (90° – θ) = sec θ
- sec (90° – θ) = cosec θ
- cot (90° – θ) = tan θ
- sin (-θ) = – sin θ
- cos (–θ) = cos θ
- tan (–θ) = – tan θ



पाईथागोरस प्रमेय से,

(लम्ब)2 + (आधार)2 = (कर्ण)2

अर्थात, (h)2 = (p)2 + (b)2

त्रिकोणमितिय अनुपात के परिचय

Sine = Sin

Tangent = Tan

Cosine = Cos

Cotangent = Cot

Secant = Sec

Cosecant = Cosec

Sin θ	**लम्ब / कर्ण = p / h**

Cos θ	**आधार / कर्ण = b / h**
Tan θ	**लम्ब / आधार = p / b**
Cot θ	**आधार / लम्ब = b / p**
Sec θ	**कर्ण / आधार = h / b**
Cosec θ	**कर्ण / लम्ब = h / p**

त्रिकोणमितिय अनुपातो के बिच सम्बन्ध

- sinθ × Cosecθ = 1
- sinθ = 1 / Cosecθ
- Cosecθ = 1 / sinθ
- Cosθ × Secθ = 1
- Cosθ = 1 / Secθ
- Secθ = 1 / Cosθ
- Tanθ × Cotθ = 1
- Tanθ = 1 / Cotθ
- Cotθ = 1 / Tanθ
- Tanθ = sinθ / Cosθ
- Cotθ = Cosθ / sinθ

महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय अनुपात:

1. sin A = लंब/कर्ण या 1/cosec A

2. cos A = आधार/कर्ण या 1/sec A

3. tan A = लंब/आधार या 1/cot A

4. cosec A = कर्ण/लंब या 1/sin A

5. sec A = कर्ण/आधार या 1/cos A

6. cot A = आधार/लंब या 1/tan A

ध्यान देनें योग्य बातें

अनुपात cosec A, sec A और cot A अनुपातों sin A, cos A तथा tan A के व्युत्क्रम होते हैं।

1. tan A = लंब/आधार या sin A /cos A

2. cosec A = कर्ण/लंब या 1/sin A

3. sec A = कर्ण/आधार या 1/cos A

4. cot A = आधार/लंब या cos A /cot A

नोट:

यदि कोण समान बना रहता हो, तो एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों में त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों के साथ कोई परिवर्तन नहीं होता।

टिप्पणी:

क्योंकि समकोण त्रिभुज का कर्ण, त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा होता है, इसलिए sin A या cos A का मान सदा ही 1 से कम होता है (या विशेष स्थिति में 1 के बराबर होता है।)

उदाहरण

यदि tan A = 4/3, तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल

आइए सबसे पहले हम एक समकोण ∆ ABC खींचें।

अब, हम जानते हैं कि tan A = लम्ब /आधार = BC /AB = 4/3

अतः यदि BC = 4k, तब AB = 3k जहाँ k धन संख्या है।

अब पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$

इसलिए, AC = 5k

अब हम इनकी परिभाषाओं की सहायता से सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिख सकते हैं।

1. sin A = लंब/कर्ण = BC/AC = 4k/5k = 4/5
2. cos A = आधार/कर्ण = AB/AC = 3k/5k = 3/5
3. tan A = लंब/आधार = BC/AB = 4k/3k = 4/3
4. cosec A = कर्ण/लंब = AC/BC = 5k/4k = 5/4
5. sec A = कर्ण/आधार = AC/AB = 5k/3k = 5/3
6. cot A = आधार/लंब = AB/BC = 3k/4k = ¾

कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

ज्यामिति के अध्ययन से आप 30°, 45°, 60° और 90° के कोणों की रचना से आप अच्छी तरह से परिचित हैं। इस अनुच्छेद में हम इन कोणों और साथ ही 0° वाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करेंगे।

45° के त्रिकोणमितीय अनुपात

Δ ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि एक कोण 45° का हो, तो अन्य कोण भी 45° का होगा अर्थात्

$\angle A = \angle C = 45°$

अतः BC = AB

मान लीजिये BC = AB = a

तब पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषाओं को लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$\sin 45° = BC/AC = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$

$\cos 45° = AB/AC = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$

$\tan 45° = BC/AB = a/a = 1$

$\cot 45° = AB/BC = a/a = 1$

$\text{cosec } 45° = AC/BC = a\sqrt{2}/a = \sqrt{2}$

$\sec 45° = AC/AB = a\sqrt{2}/a = \sqrt{2}$

30° और 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

अब हम 30° और 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित करें। एक समबाहु त्रिभुज ABC पर विचार करें। क्योंकि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण, 60° का होता है, इसलिए $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

A से भुजा BC पर लंब AD डालिए

अब $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (क्यों?)

इसलिए, $BD = DC$

और $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

अब आप यह देख सकते हैं कि:

ΔABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण D समकोण है, और जहाँ $\angle BAD = 30°$ और $\angle ABD = 60°$

त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात करने के लिए हमें त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। आइए, हम यह मान लें कि $AB = 2a$

तब $BD = \frac{1}{2} BC = a$

और $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

इसलिए, $AD = a\sqrt{3}$

अब $\sin 30° = BD/AB = a/2a = 1/2$

$\cos 30° = AD/AB = a\sqrt{3}/2a = \sqrt{3}/2$

tan 30° = BD/AD = $a/a\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$

cot 30° = BD/AB = $a\sqrt{3}/a = \sqrt{3}$

cosec 30° = AB/BD = 2a/a = 2

sec 30° = BD/AB = $2a/a\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$

इसी प्रकार

sin 60° = AD/AB = $a\sqrt{3}/2a = \sqrt{3}/2$

cos 60° = 1/2

tan 60° = $\sqrt{3}$

cot 60° = $1/\sqrt{3}$

cosec 60° = $2/\sqrt{3}$

sec 60° = 2

0° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

प्रथम स्थिति 0° के लिए:

यदि समकोण त्रिभुज ABC के कोण A को तब तक और छोटा किया जाए जब तक कि यह शून्य नहीं हो जाता है, तब इस स्थिति में कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपातों पर क्या प्रभाव पड़ता है। जैसे-जैसे ∠A छोटा होता जाता है, वैसे-वैसे भुजा BC की लंबाई कम होती जाती है। बिदु C, बिदु B के निकट आता जाता है और अंत में, जब ∠A, 0° के काफी निकट हो जाता है तब AC लगभग वही हो जाता है जो कि AB है।

तब sin A = BC/AC = 0 (क्योंकि BC का मान 0 के निकट होता है)

cos A = AB/AC = 1 (क्योंकि AC = AB)

इस प्रकार ∠A = 0°

sin 0° = 0

cos 0° = 1

tan 0° = 0

cot 0° = 1/0 (परिभाषित नहीं है)

cosec 0° = (परिभाषित नहीं है)

sec 0° = 1

द्वितीय स्थिति 90° के लिए

उस स्थिति में देखें कि ∠A के त्रिकोणमितीय अनुपातों के साथ क्या होता है जबकि ∆ ABC के इस कोण को तब तक बड़ा किया जाता है, जब तक कि 90° का नहीं हो जाता। ∠A जैसे-जैसे बड़ा होता जाता है, ∠C वैसे-वैसे छोटा होता जाता है। अतः ऊपर वाली स्थिति की भाँति भुजा AB की लंबाई कम होती जाती है। बिदु A, बिदु B के निकट होता जाता है और, अंत में जब ∠A, 90° के अत्यधिक निकट आ जाता है, तो ∠C, 0° के अत्यधिक निकट आ जाता है और भुजा AC भुजा BC के साथ लगभग संपाती हो जाती है।

जब ∠C, 0° के अत्यधिक निकट होता है तो ∠A, 90° के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AC लगभग वही हो जाती है, जो भुजा BC है। अतः sin A, 1 के अत्यधिक निकट हो जाता है और, जब ∠A, 90° के अत्यधिक निकट होता है, तब ∠C, 0° के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AB लगभग शून्य हो जाती है। अतः cos A, 0 के अत्यधिक निकट हो जाता है।

परिभाषा

अतः हम परिभाषित करते हैं:

sin 90° = 1

cos 90° = 0

इनसे अन्य अनुपात भी ज्ञात किये जा सकते है।

tan 90° = परिभाषित नहीं है

cot 90° = 0

cosec 90° = 1

sec 90° = परिभाषित नहीं है

अतिरिक्त टिप्पणी

उपर्युक्त सारणी से आप देख सकते हैं कि जैसे-जैसे ∠A का मान 0° से 90° तक बढ़ता जाता है, sin A का मान 0 से बढ़कर 1 हो जाता है और cos A का मान 1 से घटकर 0 हो जाता है।

पूरक कोण

दो कोणों को पूरक कोण तब कहा जाता है जबकि उनका योग 90° के बराबर होता है। एक समकोण Δ ABC में यदि कोण B समकोण है तो ∠A + ∠C = 90° होगा।

इसलिए, ∠C = 90° – ∠A

∠A + ∠C को पूरक कोणों का युग्म कहा जाता है।

समकोण Δ ABC में AB आधार है, BC लम्ब है तथा AC कर्ण है।

अतः

1. sin A = लंब/कर्ण = BC/AC
2. cos A = आधार/कर्ण = AB/AC
3. tan A = लंब/आधार = BC/AB
4. cosec A = कर्ण/लंब = AC/BC
5. sec A = कर्ण/आधार = AC/AB
6. cot A = आधार/लंब = AB/BC

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

आइए, अब हम ∠C = 90° – ∠A के त्रिकोणमितीय अनुपात लिखेते हैं।

सुविधा के लिए हम 90° – ∠A के स्थान पर 90° – A लिखेंगे।

कोण 90° – A की सम्मुख भुजा और संलग्न भुजा क्या होगी?

आप देखेंगे कि AB कोण 90° – A की सम्मुख भुजा है और BC संलग्न भुजा है। अतः

1. sin (90° – A) = लंब/कर्ण = AB/AC

2. cos (90° – A) = आधार/कर्ण = BC/AC

3. tan (90° – A) = लंब/आधार = AB/BC

4. cot (90° – A) = आधार/लम्ब = BC/AB

5. cosec (90° – A) = कर्ण/लम्ब = AC/AB

6. sec (90° – A) = कर्ण/आधार = AC/BC

अनुपातों कि तुलना

उपरोक्त दोनों अनुपातों कि तुलना करने पर हम पाते हैं कि

1. sin (90° – A) = AB/AC = cos A

2. cos (90° – A) = BC/AC = sin A

3. tan (90° – A) = AB/BC = cot A

4. cot (90° – A) = BC/AB = tan A

5. cosec (90° – A) = AC/AB = sec A

6. sec (90° – A) = AC/BC = cosec A

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

एक समीकरण को एक सर्वसमिका तब कहा जाता है जबकि यह संबंधित चरों के सभी मानों के लिए सत्य हो। इसी प्रकार एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों से संबंधित सर्वसमिका को त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहा जाता है। जबकि यह संबंधित कोण (कोणों) के सभी मानों के लिए सत्य होता है।

1. $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ (जहाँ $0° \le A \le 90°$)

2. $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

3. $\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$

स्मरणीय तथ्य

1. यदि एक न्यून कोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो, तो कोण के शेष त्रिकोणमितीय

अनुपात सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं।

2. sin A या cos A का मान कभी भी 1 से अधिक नहीं होता, जबकि sec A या cosec A का मान सदैव 1 से अधिक या 1 के बराबर होता है।

- sin और cos में सम्बन्ध -

tan A = sin A/cos A

cot A = cos A/sin A

- त्रिकोणमितीय अनुपातों के नाम पूर्ण रूप में -

sin - sine

cos - cosine

tan - tangent

cosec - cosecant

sec - secant

cot - cotangent

- ध्यान रहे कि tan A, tan और A का गुणनफल नहीं है। tan का A से अलग हो जाने पर कोई मान नहीं रहता। इसी प्रकार अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के साथ भी होता है।

- पूर्ण रूप से समरूप त्रिभुजों के त्रिकोणमितीय अनुपातों में कोई अंतर नहीं होता है।

- कोण को दर्शाने के लिए हम English Alphabet के किसी Letter का प्रयोग करते हैं और कभी-कभी ग्रीक अक्षर थीटा (theta) का प्रयोग करते हैं।

- किसी भी समकोण त्रिभुज की दो भुजाएँ या उनका अनुपात दिए होने पर हम तीसरी भुजा पाइथागोरस प्रमेय के द्वारा ज्ञात कर सकते हैं और फिर सभी त्रिकोणमितीय अनुपात भी ज्ञात कर सकते हैं।

- निम्न सारणी त्रिकोणमिति के 0°, 30°, 45°, 60° और 90° के अनुपातों को दर्शाती है -

त्रिकोणमिति तालिका :Trigonometry Table

	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ (not defined)
cot θ	∞ (not defined)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞ (not defined)
cosec θ	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

• किसी समकोण त्रिभुज की कोई एक भुजा और एक न्यूनकोण दिए होने हम अन्य दो भुजाएँ, कोण का त्रिकोणमितीय मान रखकर ज्ञात कर सकते हैं, और फिर सभी त्रिकोणमितीय अनुपात भी ज्ञात कर सकते हैं।

• किसी समकोण त्रिभुज की दो या तीनों भुजाएँ दी होने पर त्रिभुज के कोण ज्ञात किये जा सकते हैं, यदि भुजाओं का अनुपात किसी भी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात के बराबर आता है।

• त्रिकोणमितीय प्रश्नों को हल करते समय ध्यान रखें कि सर्वप्रथम अनुपातों को सम्बन्धित सूत्र/अनुपात में परिवर्तित करे ताकि हल करने में आसानी हो जाए।

• पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

sin (90°-A) = cos A

cos (90°-A) = sin A

tan (90°-A) = cot A

cot (90°-A) = tan A

cosec (90°-A) = sec A

sec (90°-A) = cosec A

● त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- $\sec^2 A + \tan^2 A = 1$
- $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

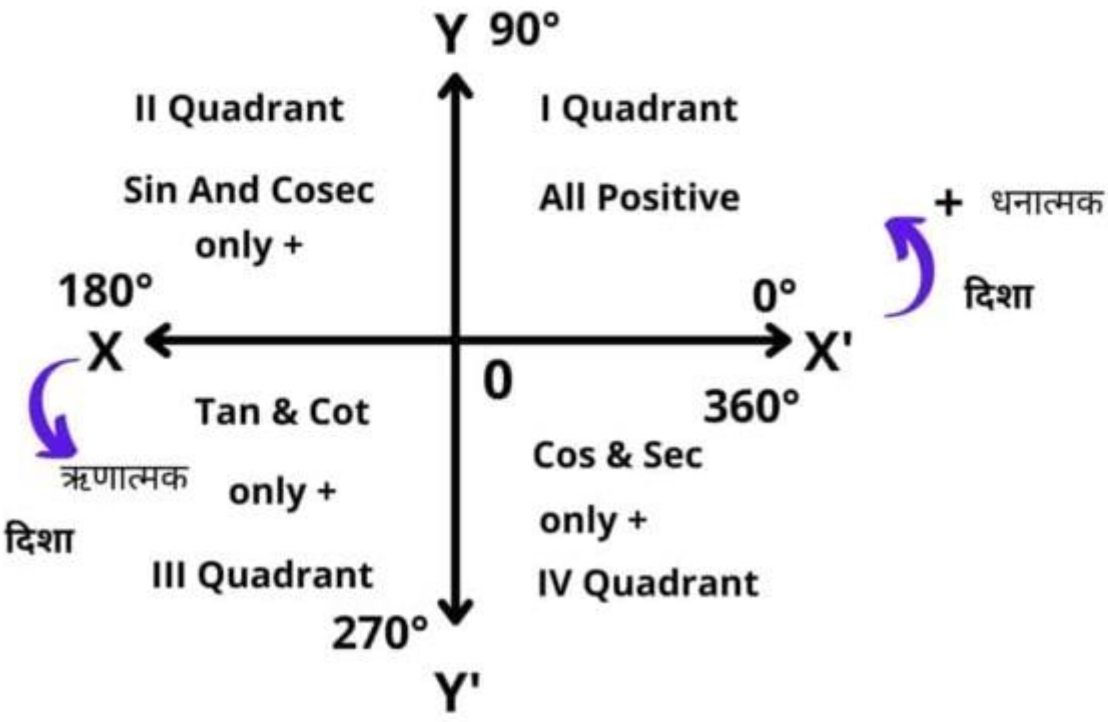
● कोई भी त्रिकोणमितीय अनुपात दिया होने पर हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं (identities) की सहायता से अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कर सकते हैं।

● त्रिकोणमितीय प्रश्नों को हल करते समय यदि किसी किसी प्रश्न या उसके हल में कहीं भी कोई सर्वसमिका लागू होती है तो, उसमें सर्वसमिका अवश्य लगाएँ।

● यदि त्रिकोणमिति के किसी प्रश्न में दो पक्षों को सत्यापित (prove) करने के लिए कहा जाए तो पहले बड़े पक्ष को हल करें और छोटे पक्ष के बराबर लाने का प्रयत्न करें। यदि पक्ष बराबर नहीं आते तो बड़े पक्ष को अधिकतम सीमा तक सरल (simplify) करने के बाद छोटे पक्ष को भी सरल करें, आपका उत्तर अवश्य सही होगा।

● दाएँ पक्ष के किसी धनात्मक पद को बाईं तरफ विस्थापित करने पर उसका चिन्ह ऋणात्मक हो जाता है। विलोमशः भी सत्य है।

त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिन्ह विभिन्न कोटि में



- चतुर्थांश में केवल 90° और 270° चेंज होते है शेष नही बदलते है.
- प्रथम चतुर्थांश में सभी त्रिकोणमितिय अनुपात धनात्मक होते है.
- द्वितीय चतुर्थांश में केवल Sin और Cosec धनात्मक होते है शेष ऋणात्मक होते है.
- तृतीय चतुर्थांश में Tan और Cot धनात्मक, शेष ऋणात्मक
- चतुर्थ चतुर्थांश में, Cos और Sec धनात्मक, शेष ऋणात्मक
- कोण की चाल घड़ी के विपरीत दिशा में पॉजिटिव एवं घड़ी के दिशा में नेगेटिव होता है.

प्रथम चतुर्थांश में (θ – 90°), सभी पॉजिटिव

- $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
- $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$
- $\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$
- $\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
- $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

प्रथम चतुर्थांश में ही (360° + θ)

- $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$
- $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360° + \theta) = \tan\theta$
- $\operatorname{cosec}(360° + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

- sec (360° + θ) = sec θ
- cot (360° + θ) = cot θ

द्वितीय चतुर्थांश में (90° – 180°), Sin और Cosec Positive

- sin (180° – θ) = sin θ
- cos (180° – θ) = – cos θ
- tan (180° – θ) = – tan θ
- cosec (180° – θ) = cosec θ
- sec (180° – θ) = – sec θ
- cot (180° – θ) = – cot θ

द्वितीय चतुर्थांश में (90° + θ)

- sin (90° + θ) = cos θ
- cos (90° + θ) = – sin θ
- tan (90° + θ) = – cot θ
- cosec (90° + θ) = sec θ
- sec (90° + θ) = – cosec θ
- cot (90° + θ) = – tan θ

तृतीय चतुर्थांश में (180° – 270°), Tan और Cot पॉजिटिव

- sin (180° + θ) = – sin θ
- cos (180° + θ) = – cos θ
- tan (180° + θ) = tan θ
- cosec (180° + θ) = – cosec θ
- sec (180° + θ) = – sec θ
- cot (180° + θ) = cot θ

तृतीय चतुर्थांश में (270° – θ)

- sin (270° – θ) = – cos θ
- cos (270° – θ) = – sin θ
- tan (270° – θ) = cot θ
- cosec (270° – θ) = – sec θ
- sec (270° – θ) = – cosec θ
- cot (270° – θ) = tan θ

चतुर्थ चतुर्थांश में (270° – 360°), Cos और Sec पॉजिटिव

- sin (360° – θ) = – sin θ
- cos (360° – θ) = cos θ
- tan (360° – θ) = – tan θ
- cosec (360° – θ) = – cosec θ
- sec (360° – θ) = sec θ
- cot (360° – θ) = – cot θ

चतुर्थ चतुर्थांश में (270° + θ)

- sin (270° + θ) = – cos θ
- cos (270° + θ) = + sin θ
- tan (270° + θ) = – cot θ
- cosec (270° + θ) = – sec θ
- sec (270° + θ) = + cosec θ
- cot (270° + θ) = – tan θ

त्रिकोणमितिय अनुपातों का चिन्ह (Trigonometric Sign)

- sin (-θ) = – sin θ
- cos (–θ) = cos θ
- tan (–θ) = – tan θ
- cosec (–θ) = – cosec θ
- sec (–θ) = sec θ
- cot (–θ) = – cot θ

दो कोणों का योग या घटाव फार्मूला

- sin (A + B) = sin A cos B + cos A sin B
- sin (A – B) = sin A cos B – cos A sin B
- cos (A + B) = cos A cos B – sin A sin B
- cos (A – B) = cos A cos B + sin A sin B
- tan(A – B)= (tan A – tan B) / (1 + tan A . tan B)
- cot(A – B) = (cot A . cot B + 1) / (cot B – cot A)
- tan(A + B) = [(tan A + tan B) / (1 – tan A tan B)]
- tan(A - B) = [(tan A – tan B) / (1 + tan A tan B)]

त्रिकोणमितिय असिमाका (Trigonometric Identitie)

- sin2A + cos2A = 1
- $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
- $\cos^2\theta = \sin^2\theta - 1$
- tan2A + 1 = sec2A
- $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
- cot2A + 1 = cosec2A
- $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

दो कोणों का फार्मूला

- sin(2 A) = 2sin(A) • cos(A)
- cos(2 A) = cos2(A)–sin2(A)
- tan(2 A) = [2 tan(A)] / [1−tan2(A)]

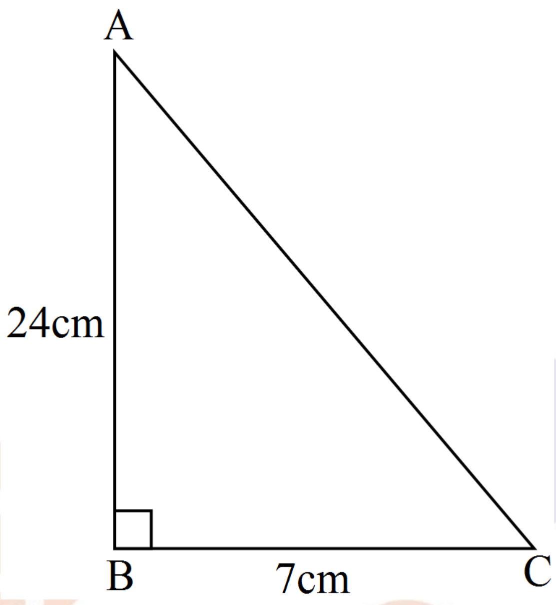
NCERT SOLUTIONS
प्रश्नावली 8.1 (पृष्ठ संख्या 200)

प्रश्न 1 △ABC में, जिसका कोण B समकोण है, AB = 24cm और BC = 7cm है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

i. sinA, cosA
ii. sinC, cosC

उत्तर- समकोण त्रिभुज △ABC में, AB = 24cm, BC = 7cm

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 24^2 + 7^2$$

$$= 576 + 49$$

$$= 625$$

$$AC = \sqrt{625} = 25cm$$

अब तत्रिकोणमितिय अनुपात लेने पर,

i. $\sin A, \cos A$

सम्मुख भुजा का अर्थ सामने वाली भुजा होता है।

$$\sin A = \frac{A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

$$\cos A = \frac{A \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

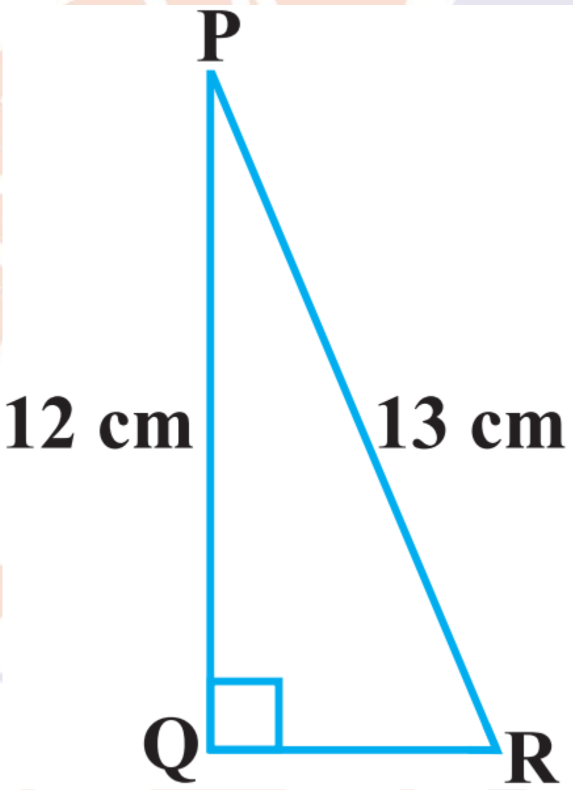
ii. $\sin C, \cos C$

संलग्न भुजा का अर्थ साथ (बगल वाली) भुजा होता है।

$$\sin C = \frac{\text{C की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$\cos C = \frac{\text{C की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

प्रश्न 2 आकृति 8.13 में, tanP – cotR का मान ज्ञात कीजिए।

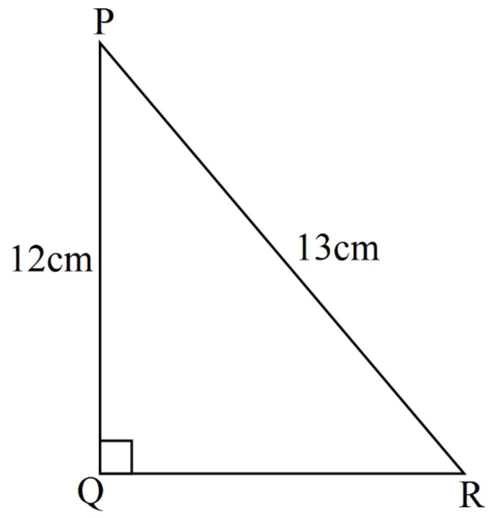


उत्तर-

$$PQ = 12cm, PR = 13cm\ QR = ?$$

समकोण त्रिभुज $\triangle PQR$ में, $PQ = 12cm, PR = 13cm$

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$13^2 = 12^2 + QR^2$$

$$169 = 144 + QR^2$$

$$169 - 144 = QR^2$$

$$QR^2 = 25$$

$$QR = \sqrt{25} = 5cm$$

अब तत्रिकोणमितिय अनुपात लेने पर,

सम्मुख भुजा का अर्थ सामने वाली भुजा होता है।

$$\tan P = \frac{\text{P की सम्मुख भुजा}}{\text{P की संलग्न भुजा}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

$$\cot R = \frac{\text{R की संलग्न भुजा}}{\text{R की सम्मुख भुजा}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

$$\tan P - \cot R$$

$$\frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

संलग्न भुजा का अर्थ साथ (बगल वाली) भुजा होता है।

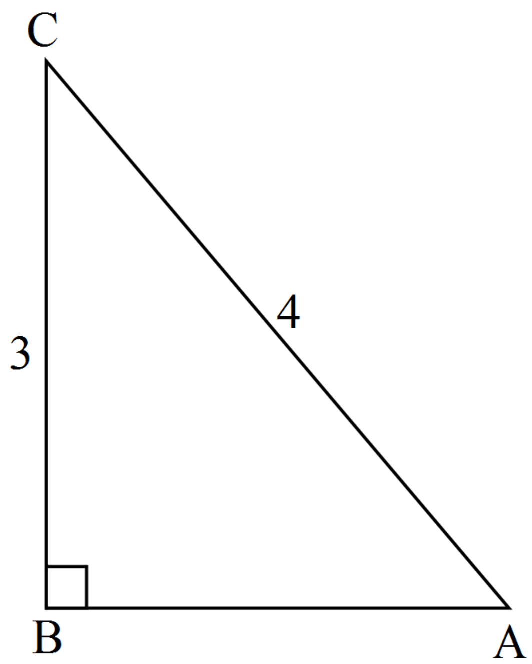
प्रश्न 3 यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।

उत्तर-

$$\sin A = \frac{3}{4}$$

A की सम्मुख भुजा = 3, समकोण की भुजा (कर्ण) = 4

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$4^2 = AB^2 + 3^2$$

$$16 = AB^2 + 9$$

$$AB^2 = 16 - 9 = 7$$

$$AB = \sqrt{7}$$

इसलिए, $\cos A = \dfrac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A = \dfrac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{A की संलग्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$

प्रश्न 4 यदि 15 cot A = 8 हो तो sin A और sec A का मान कीजिए।

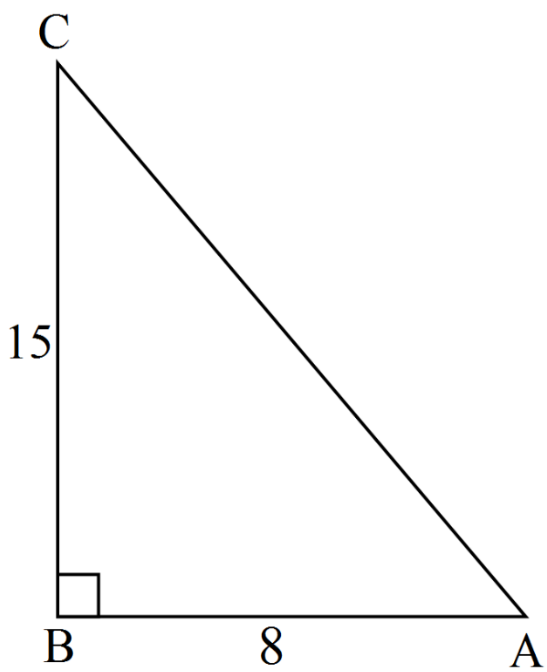
उत्तर-

$$15 \cot A = 8$$

$$\cot A = \frac{8}{15}$$

A की सम्मुख भुजा = 15, A की संलग्न भुजा = 8

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 8^2 + 15^2$$

$$= 64 + 225$$

$$AC^2 = 289$$

$$AC = \sqrt{289} = 17\text{cm}$$

इसलिए, $\sin A = \dfrac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{15}{17}$

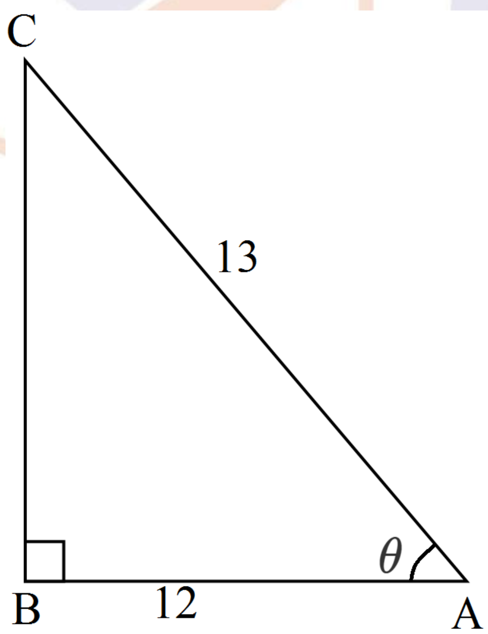
$\sec A = \dfrac{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}}{\text{A की संलग्न भुजा}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{17}{8}$

प्रश्न 5 यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$ हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

उत्तर- $\sec\theta = \frac{13}{12}$

θ की संलग्न भुजा = 12, समकोण की सम्मुख भुजा) कर्ण = (13

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$13^2 = 12^2 + BC^2$$

$$169 = 144 + BC^2$$

$$169 - 144 = BC^2$$

$$BC^2 = 25$$

$$BC = \sqrt{25} = 5$$

सभी त्रिकोणमितिय अनुपात

$$\sin A = \frac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$$

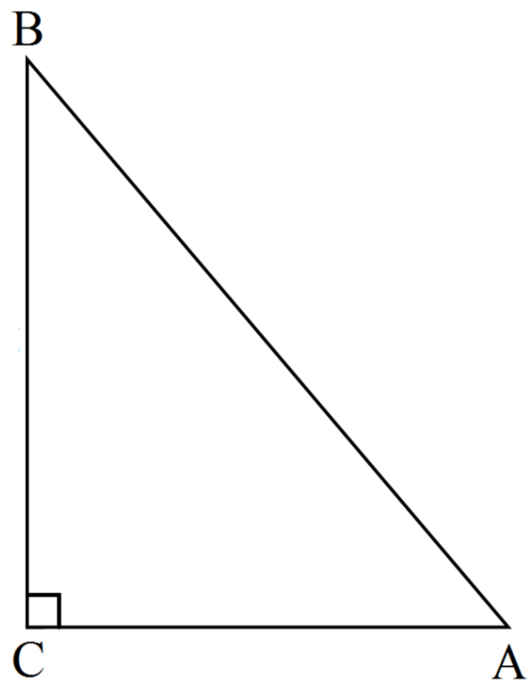
$$\tan A = \frac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{A की संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$$

$$\text{cosec } A = \frac{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}}{\text{A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{5}$$

$$\cot A = \frac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5}$$

प्रश्न 6 यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहाँ $\cos A = \cos B$ तो दिखाइए की $\angle A = \angle B$

उत्तर-



$$\cos A = \frac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{AB} \quad \text{............. (I)}$$

$$\cos B = \frac{\text{B की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AB} \quad \text{............. (II)}$$

दिया है: $\cos A = \cos B$

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$ सभी (i) तथा (ii) से

या $AC = BC$

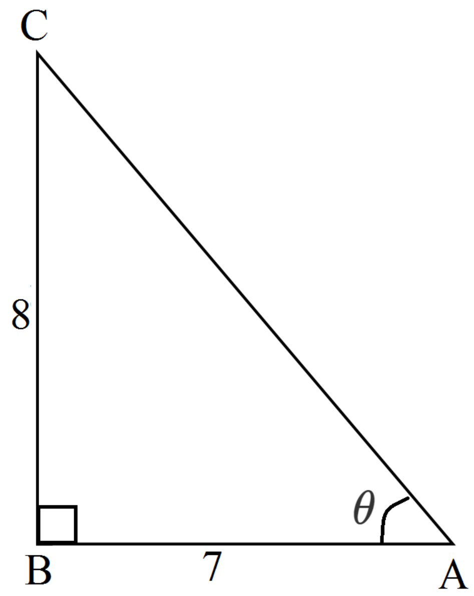
अतः $\angle A = \angle B$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते है)

प्रश्न 7 यदि cot $= \frac{7}{8}$, तो,

i. $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

ii. $\cot^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



i. $\cot\theta = \frac{7}{8}$

$\therefore$ AB $= 7$, और BD $= 8$;

$$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2$$

$$\mathrm{AC}^2 = 7^2 + 8^2$$

$$\mathrm{AC}^2 = 49 + 64$$

$$\mathrm{AC}^2 = 113$$

$$\mathrm{AC}^2 = \sqrt{113}$$

$$\sin\theta = \frac{8}{\sqrt{113}}, \cos\theta = \frac{7}{\sqrt{113}}$$

$$\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{1-\left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{1-\left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\frac{64}{113}}{1-\frac{49}{113}} = \frac{\frac{113-64}{113}}{\frac{113-49}{113}} = \frac{\frac{49}{113}}{\frac{64}{113}}$$

$$= \frac{49}{113} \times \frac{113}{64} - = \frac{49}{64}$$

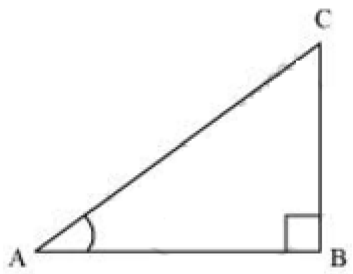
ii. $\cot^2 \theta$

$$= \left(\frac{7}{8}\right)^2$$

$$= \frac{49}{64}$$

प्रश्न 8 यदि $3\cot A = 4$, तो जाँच कीजिए की $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

उत्तर-



यह दिया गया है कि 3cot A = 4 या cot A = $\frac{4}{3}$

बिंदु B पर समकोण त्रिभुज ABC पर विचार करें।

cot A = $\frac{\text{बगल में} \angle A}{\text{के विपरीत भुजा} \angle A}$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

यदि AB 4k है, तो BC 3k होगा, जहाँ k एक धनात्मक पूर्णांक है।

In ΔABC,

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$= (4k)^2 + (3k)^2$

$= 16k^2 + 9k^2$

$= 25k^2$

$AC = 5k$

$$\cos A = \frac{\text{बगल में}\angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$= 4k/5k = 4/5$

$$\sin A = \frac{\text{बगल में}\angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$=3k/5k = 3/5$

$$\tan A = \frac{\text{बगल में}\angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AB}$$

$$= 3\frac{k}{4}k = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right) = \left(\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}\right)$$

$$= \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$$

$\cos^2 A + \sin^2 A = (4/5)^2 - (3/5)^2$

$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

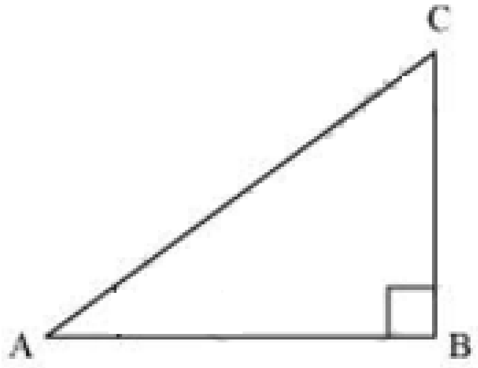
$$\therefore \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$$

प्रश्न 9 त्रिभुज ABC में जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिये:

i. $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

ii. $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

उत्तर-



$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

यदि BC k है, तो AB $\sqrt{3}k$ होगा, जहां k एक धनात्मक पूर्णांक है।

In ΔABC,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= \left(\sqrt{3}k\right)^2 + (k)^2$$

$= 3k^2 + k^2 = 4k^2$

$\therefore AC = 2k$

$$\sin A = \frac{\text{बगल में} \angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \frac{\text{बगल में} \angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin C = \frac{\text{बगल में} \angle C}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos C = \frac{\text{बगल में} \angle C}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

(i) sin A cos C + cos A sin C

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

(ii) cos A cos C – sin A sin C

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

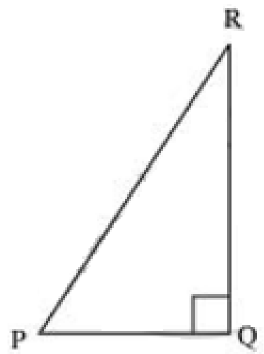
प्रश्न 10 △PQR में, जिसका कोण Q समकोण है, PR + QR = 25cm और PQ = 9cm है। sinP, cosP और tanP के मान ज्ञात कीजिये।

उत्तर- दिया गया है, PR + QR = 25

PQ = 5

माना PR x है।

इसलिए, QR = 25 – x



पाइथागोरस प्रमेय को ΔPQR में लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$x^2 = (5)^2 + (25 - x)^2$

$x^2 = 25 + 625 + x^2 - 50x$

$50x = 650$

$x = 13$

इसलिए, PR = 13 cm

QR = (25 − 13) cm = 12 cm

$$\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$$

$$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$$

प्रश्न 11 बताइए की निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। कारण सहित उत्तर की पुष्टि कीजिये।

(i) tanA का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$

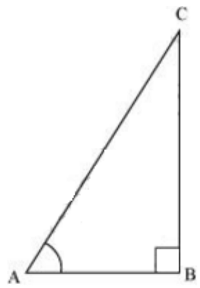
(iii) cosA, कोण A के व्युत्क्रमण के लिये प्रयुक्त एक संछिप्त रूप है।

(iv) cotA, cot और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिये $\sin \theta = \frac{4}{3}$

उत्तर-

(i)



एक ΔABC पर विचार करें, जो B पर समकोण है।

$$\tan A = \frac{\text{कोण A के विपरीत पक्ष}}{\text{कोण B के आसन्न पक्ष}}$$

$$= \frac{12}{5}$$

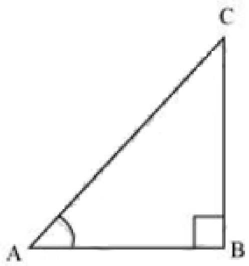
लेकिन 12/5 > 1

∴ tan A > 1

तो, tan A <1 हमेशा सत्य नहीं होता है।

अत: दिया गया कथन असत्य है।

(ii)



sec A = $\frac{12}{5}$

$\frac{\text{कर्ण}}{\text{पक्ष}}$ ∠A - 12/5 से सटा हुआ है

$$\frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}$$

मान लीजिए AC 12k है, AB 5k होगा, जहां k एक धनात्मक पूर्णांक है।

पाइथागोरस प्रमेय को ΔABC में लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(12k)^2 = (5k)^2 + BC^2$

$144k^2 = 25k^2 + BC^2$

$BC^2 = 119k^2$

$BC = 10.9k$

यह देखा जा सकता है कि दी गई दो भुजाओं के लिए $AC = 12k$ और $AB = 5k$,

BC ऐसा होना चाहिए,

$AC - AB < BC < AC + AB$

$12k - 5k < BC < 12k + 5k$

$7k < BC < 17\ k$

हालांकि, $BC = 10.9k$ स्पष्ट रूप से, ऐसा त्रिभुज संभव है और इसलिए, sec A का ऐसा मान संभव है।

अत :दिया गया कथन सत्य है।

(iii) दिया गया कथन **असत्य** है।

कोण A के व्युत्क्रमण के लिए इस्तेमाल किया जाने वाला संक्षिप्त नाम cosec A है। और cos A कोण A के व्युत्क्रमण के लिए इस्तेमाल किया जाने वाला संक्षिप्त नाम है।

(iv) cot A, cot और A का गुणनफल नहीं है। यह∠ A का कोटैंजेंट है।

अत :दिया गया कथन **असत्य** है।

(v) $\sin\theta = \frac{4}{3}$

हम जानते हैं कि एक समकोण त्रिभुज में,

$$\sin\theta = \frac{\text{कोण } \angle\theta \text{ के विपरीत पक्ष}}{\text{कर्ण}}$$

एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण हमेशा शेष दो भुजाओं से बड़ा होता है। इसलिए sin θ का ऐसा मूल्य संभव नहीं है।

अत :दिया गया कथन **असत्य** है

प्रश्नावली 8.2 (पृष्ठ संख्या 206-207)

प्रश्न 1 निम्नलिखित के मान निकालिए:

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec} 30°}$

(iv)

$$\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \text{coses} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$$

(v)

$$\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

उत्तर-

(i)

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$$

सभी त्रिकोंणमितीय अनुपातों का मान रखने पर

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii)

$$2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$$

$$= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2$$

(iii)

$$= \frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$$

हर का परिमेंइकरण करने पर

$$= \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})} \times \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2\left[(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{18}}{2[2-6]}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{9\times 2}}{2[-4]}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{-8}$$

$$= \frac{-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{-8}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

(iv)

$$\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \text{coses}60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4}$$

हर का परिमेइकरण करने पर

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4} \times \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}-4}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}-4)^2}{(3\sqrt{3})^2 - 4^2}$$

$$= \frac{27-24\sqrt{3}+16}{27-16} \quad [\because (a\text{-}b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$$

$$= \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

(v)

$$\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \text{coses} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{4}{3}\right) - 1}{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1}{\frac{1+3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}}$$

$$= \frac{15+64-12}{12} = \frac{67}{12}$$

प्रश्न 2 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिये:

(i)

$$\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$$

a. $\sin 60^\circ$

b. $\cos 60^\circ$

c. $\tan 60^\circ$

d. $\sin 30^\circ$

(ii)

$\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

a. $\tan 90^\circ$

b. 1

c. $\sin 45^\circ$

d. 0

(iii)

$\sin 2A = 2\sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

a. 0°

b. 30°

c. 45°

d. 60°

(iv)

$\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^\circ 30}$ बराबर है:

a. $\cos 60^\circ$

b. $\sin 60^\circ$

c. $\tan 60^\circ$

d. $\sin 30^\circ$

उत्तर-

(i)

a. $\sin 60^\circ$

हल:

$$\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$$

$$=\frac{2\times\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

दिये गए सभी विकल्पों मै से केवल $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ होता है इस लिये विकल्प (a) सही है।

(ii)

d. 0

हल:

$$=\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$$

$$=\frac{1-1^2}{1+1^2}$$

$$=\frac{1-1}{1+1}=\frac{2}{2}=0$$

दिये गए सभी विकल्पों मै से केवल (D) 0 सही है।

(iii)

a. 0°

हल:

$\sin A = 2\sin A$

$\Rightarrow 2\sin A\ \cos A = 2\sin A\ [\sin 2x = 2\sin x\cos x]$

$\Rightarrow \cos A\ = 2\sin A - 2\sin A$

$\Rightarrow A = 0$

$\therefore A = 0^\circ$

विकल्प (a) सही है।

(iv)

c. $\tan 60^\circ$

हल:

$\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^\circ 30}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

विकल्प (c) $\tan 60^\circ$ सही है।

प्रश्न 3

यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}; 0^\circ < A+B \leq 90^\circ; A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिये।

उत्तर-

$$\tan(A+B) = \sqrt{3}\,.......\,(i)$$

जबकि $60° = \sqrt{3}\,.......\,(ii)$

समीकरण (i) और (ii) की तुलना करने पर

$$\therefore \tan(A+B) = \tan 60°$$

या $A + B = 60°.......\,(iii)$

इसीप्रकार,

$$\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.......\,(iv)$$

जबकि $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.......\,(v)$

समीकरण (iv) और (v) की तुलना करने पर

$$A + B + A - B = 60° + 30°$$

$$\Rightarrow 2A = 90°$$

$$\Rightarrow A = \frac{90°}{2} = 45°$$

प्रश्न 4 बताइए कि निम्नलिखित में से कौन-कौन सत्य हैं या असत्य है। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) sin(A + B) = sinA + sinB
(ii) θ में वृद्धि होने के साथ sinθ के मान में भी वृद्धि होती है।
(iii) θ में वृद्धि होने के साथ cosθ के मान में भी वृद्धि होती है।
(iv) θ के साभी के मानो पर sinθ = cosθ
(v) A = 0° पर cotA परिभाषित नहीं है।

उत्तर-

(i) असत्य।

(ii) सत्य।

(iii) असत्य।

(iv) असत्य।

(v) सत्य।

प्रश्नावली 8.3 (पृष्ठ संख्या 209)

प्रश्न 1 निम्नलिखित का मान निकालिये:

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

(ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$

(iii) cos 48° − sin 42°

(iv) cosec 31° − sec 59°

उत्तर-

(i)

$$\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$$

$$= \frac{\cos(90^\circ - 18^\circ)}{\cos 72^\circ}$$

$$= \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1 \ [\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)]$$

(ii)

$$\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$$

$$= \frac{\cot(90^\circ - 26^\circ)}{\cot 64^\circ}$$

$$= \frac{\cos 64^\circ}{\cos 64^\circ} = 1 \ [\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta)]$$

(iii)

$$\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$$
$$\Rightarrow \sin(90^\circ - 48^\circ) - \sin 42^\circ$$
$$\Rightarrow \sin 42^\circ - \sin 42^\circ = 0$$

(iv)

$$\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$$
$$\Rightarrow \sec(90^\circ - 31^\circ) - \sec 59^\circ \ [\operatorname{cosec} q = \sec(90^\circ - q)]$$
$$\Rightarrow \sec 59^\circ - \sec 59^\circ = 0$$

प्रश्न 2 दिखाइए कि:

(i) tan48° tan23° tan42° tan67° = 1
(ii) cos38° cos52° − sin38° sin52° = 0

उत्तर-

(i)

$$\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$$
$$\text{LHS} = \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$
$$= \cot(90^\circ - 48^\circ) \tan(90^\circ - 23^\circ) \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$
$$= \cot 42^\circ \cot 67^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$
$$= (\cot 42^\circ \times \tan 42^\circ)(\cot 67^\circ \times \tan 67^\circ)$$
$$= 1 \times 1 \ [\cot A \times \tan A = 1]$$
$$= 1$$
$$\text{LHS=RHS}$$

(ii)

$$\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$$

$$\text{LHS} = \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$$

$$= \sin(90^\circ - 38^\circ)\cos 52^\circ - \cos(90^\circ - 38^\circ)\sin 52^\circ$$

$$= \sin 52^\circ \cos 52^\circ - \cos 52^\circ \sin 52^\circ$$

$$= \sin 52^\circ(\cos 52^\circ - \cos 52^\circ)$$

$$= \sin 52^\circ \times 0$$

$$= 0$$

LHS=RHS

प्रश्न 3 यदि tan 2A = cot(A – 18°), जहाँ 2A एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\tan 2A = \cot(A - 18^\circ),$$

$$\Rightarrow \cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$$

दोनों पक्षों में तुलना करने पर

$$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 18^\circ = A + 2A$$

$$\Rightarrow 3A = 108^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{108^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow A = 36^\circ$$

LHS=RHS

प्रश्न 4 यदि tan A = cotB, तो सिद्ध कीजिए कि A + B = 90°

उत्तर-

$\tan A = \cot B$ दिया है।

$\Rightarrow \tan A = \tan(90° - B)$ तुलना करने पर

$\Rightarrow A = 90° - B$

$\Rightarrow A + B = 90°$ इति सिद्धम्

प्रश्न 5 यदि sec 4A = cosec(A − 20°), जहाँ 4A एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$\sec 4A = \text{cosec}(A - 20°)$

$\Rightarrow \text{cosec}(90° - 4A) = \text{cosec}(A - 20°)\ [\sec q = (90° - q)]$

तुलना करने पर

$\Rightarrow 90° - 4A = A - 20°$

$\Rightarrow 90° + 20° = A + 4A$

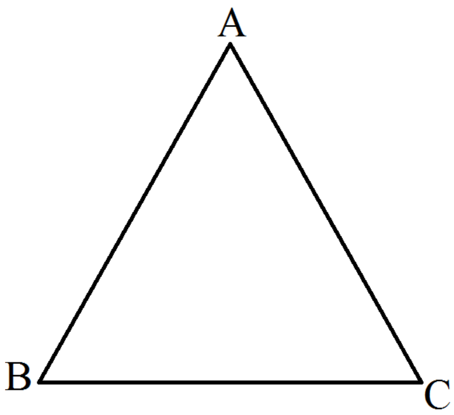
$\Rightarrow 5A = 110°$

$\Rightarrow A = \frac{110°}{5}$

$\Rightarrow A = 22°$

प्रश्न 6 यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अतः कोण हो, तो दिखाइए की $sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

उत्तर-



A, B और C त्रिभुज ABC के अतः कोण है

इसलिए, A + B + C = 180°

(त्रिभुज के तीनो कोणों का योग(

अथवा, B + C = 180° - A ....(i)

अब, $\mathrm{RHS}=\cos \frac{\mathrm{A}}{2}$

$$=\sin \left(90^{\circ}-\frac{\mathrm{A}}{2}\right)\ [\cos \theta=\sin (90^{\circ}-\theta)]$$

$$=\sin \left(\frac{180^{\circ}-\mathrm{A}}{2}\right)$$

$$=\sin \left(\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\right)$$

$$\mathrm{LHS}=\mathrm{RHS}$$

प्रश्न 7 sin67° + cos75° को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर-

$$\sin 67^{\circ}+\cos 75^{\circ}$$

$$\Rightarrow \cos (90^{\circ}-67^{\circ})+\sin (90^{\circ}-75^{\circ})$$

$$\Rightarrow \cos 23^{\circ}+\sin 15^{\circ}$$

प्रश्नावली 8.4 (पृष्ठ संख्या 213-214)

प्रश्न 1 त्रिकोणमितीय अनुपातों sin A, sec A को cot A के पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर-

$$\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}=\frac{1}{\sqrt{\cot ^2 A+1}}\left[\because \operatorname{cosec} \theta=\sqrt{\cot ^2 \theta+1}\right]$$

$$\sec =\sqrt{\tan ^2 A+1}\left[\because \sec \theta=\sqrt{\tan ^2 \theta+1}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\cot ^2 A}+1}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cot ^2 A}{\cot ^2 A}}\left[\because \sec \theta=\sqrt{\tan ^2 \theta+1}\right]$$

$$\tan A=\frac{1}{\cot A}$$

प्रश्न 2 ∠A के अन्य सभी त्रिकोणमितिय अनुपातों को sec A के पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर-

$$\sin A=\sqrt{1-\cos ^2 A}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{\sec ^2 A}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sec ^{2 A-1}}{\sec ^2 A}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sec ^2 A-1}}{\sec A}$$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}$$

$$\tan A=\sqrt{\sec ^2 A-1}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 A}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\sec^2 A-1}{\sec^2 A}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec^2 A}}$$

$$= \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$$

$$\cot = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$$

प्रश्न 3 मान लीजिए।

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

(ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

उत्तर-

(i)

$$\frac{\sin^2 63^\circ+\sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ+\cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 63^\circ+\cos^2(90^\circ-27^\circ)}{\sin^2(90^\circ-17^\circ)+\cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 63^\circ+\cos^2 63^\circ}{\sin^2 73^\circ+\cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

(ii)

$$\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$$
$$= \sin 25^\circ \sin(90^\circ - 65^\circ) + \cos 25^\circ \cos(90^\circ - 65^\circ)$$
$$= \sin 25^\circ \sin 25^\circ + \cos 25^\circ \cos 25^\circ$$
$$= 1 \ [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

प्रश्न 4 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:

(i)

$9 \sec 2A - 9 \tan 2A$ बराबर है:

a. 1
b. 9
c. 8
d. 0

(ii)

$(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{coses}\theta)$ बराबर है

a. 0
b. 1
c. 2
d. -1

(iii)

$(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है:

a. $\sec A$

b. $\sin A$

c. $\text{cosec} A$

d. $\cos A$

(iv)

$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$ बराबर है:

a. $\sec^2 A$

b. -1

c. $\cot^2 A$

d. $\tan^2 A$

उत्तर-

(i)

b. 9

हल:

$$9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A = 9(\sec^2 A - \tan^2 A)$$

$$= 9 \times 1 = 9$$

(ii)

c. 2

हल:

$$= \left(1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos + \sin A+1}{\cos A}\right)\left(\frac{\sin A+\cos A-1}{\sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{(\sin A+\cos A)^2-1}{\sin A.\cos A}\right) \text{सूत्र: } \because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \left(\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A-1}{\sin A.\cos A}\right) \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$= \left(\frac{1+2\sin A\cos A-1}{\sin A.\cos A}\right) \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{1\sin A\cos A}{\sin A.\cos A} = 2\sin^2 A+\cos^2 A = 1$$

(iii)

d. $\cos A$

हल: $(\sec A+\tan A)(1-\sin a)$

$$= \left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)(1-\sin A)$$

$$= \left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)(1-\sin A)$$

$$= \frac{(1+\sin A)(1-\sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{(1^2-\sin^2 A)}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos A\times\cos A}{\cos A} = \cos A$$

(iv)

d. $\tan^2 A$

हल: $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$$= \frac{\sec^2 A}{\mathrm{cosec}^2 A}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}} = \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A$$

प्रश्न 5 निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यूनकोण है:

(i) $(\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} + \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta$

[**संकेत:** व्यंजक को $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के पदों में लिखिए]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

[**संकेत:** वाम पक्ष और दाँया पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए।]

(v) सर्वसमिका $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

(vi) $$\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

(vii) $$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $$(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

[**संकेत :** वाम पक्ष और दाँया पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए]

(x) $$\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \tan^2 A$$

उत्तर-

(i)

$$\text{LHS} = (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \frac{\cos a}{\sin A} 2\right) = \frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{(1-\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1-\cos A)(1-\cos A)}{(1-\cos A(1+\cos A)} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(ii)

$$\text{LHS} = \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A + 1 + 2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2}{\cos A} = 2 \times \frac{1}{\cos A} = 2\sec A$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(iii)

$$\text{LHS} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$\cot\theta$ सभी पदों को $\tan\theta$ में बदलने पर

$$= \frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}} + \frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta} = \frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}} + \frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1} + \frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{-\tan\theta(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}-\frac{1}{\tan\theta(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1)}{\tan\theta(\tan\theta-1)}\ [\because x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)]$$

$$=\frac{(\tan^2\theta+\tan\theta+1)}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}$$

$$=\tan\theta+1+\cot\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \left[\because \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \text{और}\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta.\cos\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta.\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\ \left[\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\right]$$

$$=\frac{\sin\theta.\cos\theta+1}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta.\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=1+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\ \left[\because \frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta,\ \frac{1}{\sin\theta}=\mathrm{cosec}\theta\right]$$

$$=1+\sec\theta.\ \mathrm{cosec}\theta$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(iv)

$$\text{LHS}=\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$=\frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$=\frac{\cos A+1}{\cos a}\times\frac{\cos A}{1}=\cos A+1$$

$$\text{RHS}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}=\frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$$

$$=\frac{(1-\cos A)(1+\cos A)}{1-\cos A}$$

$=1+\cos A$ या $\cos A+1$

अतः $\text{LHS}=\text{RHS}$ इतिसिद्धम

(v)

$$\text{LHS}=\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$$

अंश और हर को $\sin A$ से भाग देने पर

$$=\frac{\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\sin A}{\sin A}+\frac{1}{\sin A}}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin A}-\frac{1}{\sin A}}=\frac{\cot A-1+\operatorname{cosec}A}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$=\frac{\cot A+\operatorname{cosec}A-1}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)-(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A-(\operatorname{cosec}A+\cot)+(\operatorname{cosec}A-\cot A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)[1-(\operatorname{cosec}A-\cot A)]}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)[1-(\operatorname{cosec}A-\cot A)]}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)(1-\operatorname{cosec}A+\cot A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)(\cot A+1-\operatorname{cosec}A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$=\operatorname{cosec}A+\cot A$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(vi)

$$\text{LHS}=\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}}$$

हर का परिमेइकरण करने पर

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}\times\frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+\sin A})^2}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{1+\sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$$

$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos^2 A}$$

$$=\sec A+\tan A$$

बाया पक्ष = दांया पक्ष

(vii)

$$\text{LHS}=\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{(1-2)(1-\cos^2\theta)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{(1-2+2\cos^2\theta)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{(-1+2\cos^2\theta)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{(2\cos^2\theta-1)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

(viii)

$$(\sin A+\operatorname{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2$$

$$\sin^2 A+2\sin A.\operatorname{cosec}A+\operatorname{cosec}^2A+\cos^2 A+2.\cos A.\sec A+\sec^2 A$$

$$=\sin^2 A+2.\sin A.\frac{1}{\sin A}+\operatorname{cosec}^2A+\cos^2 A+2.\cos A.\frac{1}{\cos A}+\sec^{2A}$$

$$=\sin^2 A+2+\operatorname{cosec}^2A+\cos^2 A+2+\sec^2 A$$

$$=\sin^2 A+\cos^2 A+2+2+\operatorname{cosec}^2A+\sec^2 A$$

$$1+4+(1+\tan^2 A)+(1+\cot^2 A)$$

$$=7\tan^2 A+\cot^2 A$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(ix)

$$\text{LHS} = (\text{cosec}A - \sin A)(\sec A - \cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \sin A . \cos A$$

$$\text{RHS} = \frac{1}{\tan A+\cot A}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}} \quad \left[\because \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \text{ और } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A.\cos A}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sin A.\cos A}} \quad \left[\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\right]$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{\sin A.\cos A}{1} = \cos A . \sin A$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(x)

$$\text{LHS} = \left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}}\right)$$

$$= \frac{1+\tan^2 A}{1} \times \frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$= \tan^2 A$$

$$\text{LHS} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A-1}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1} \times \frac{\tan A}{\tan A-1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1} \times \frac{\tan A}{1(1-\tan A)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1} \times \frac{\tan A}{(1-\tan A)}\right)^2$$

$$= (-\tan A)^2$$

$$= \tan^2 A$$

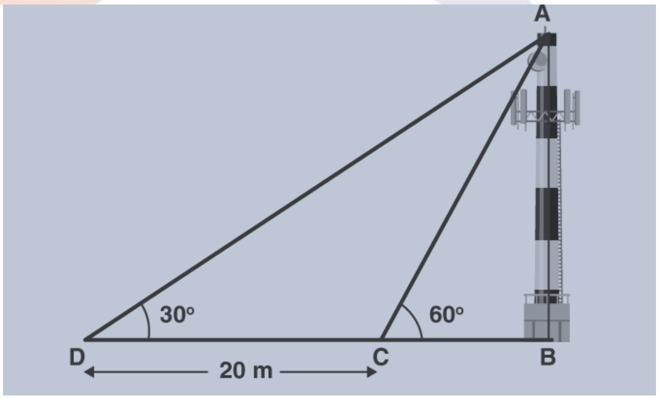
दैनिक जीवन में त्रिकोणमिति के उपयोग

त्रिकोणमिति का वास्तविक जीवन की स्थितियों से कई समस्याओं को हल करने में व्यापक अनुप्रयोग है। लंबाई या ऊंचाई की अप्रत्यक्ष माप के लिए सबसे अच्छे तरीकों में से एक त्रिकोणमितीय ही हैं। त्रिकोणमिति का उपयोग भूगोल, खगोल विज्ञान आदि में बड़े पैमाने पर किया जाता है।

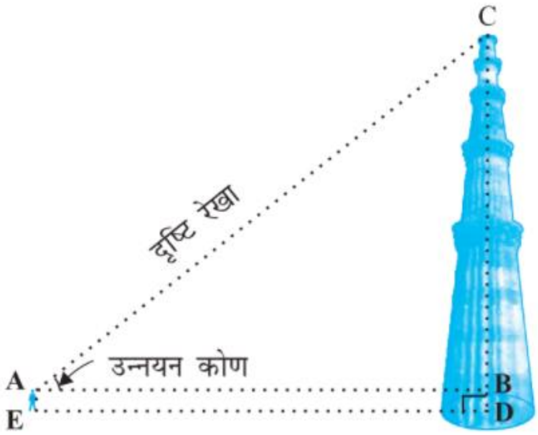
त्रिकोणमिति के ज्ञान का उपयोग मानचित्रों के निर्माण के लिए भी किया जाता है, जो अक्षांशों और अक्षांशों के संबंध में विभिन्न द्वीपों की स्थिति निर्धारित करते हैं। सीबीएसई सिलैबस में त्रिकोणमिति के केवल आधारभूत उदाहरण ही हैं। यदि आपको तिवारी अकादमी की वेबसाइट की सामग्री तक पहुंचने में कोई कठिनाई हो रही है, तो मदद के लिए हमसे संपर्क करें। हम जल्द से जल्द आपकी मदद करेंगे।

त्रिकोणमिति के प्रयोग (Use of Trigonometry)

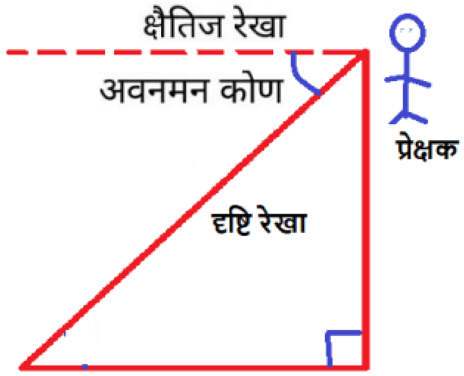
- किसी बहुत ऊँची इमारत (building) या मीनार (tower) की ऊँचाई ज्ञात करने में
- किसी नदी/समुद्र की चौड़ाई ज्ञात करने में
- पृथ्वी से ग्रहों (planets) और तारों (stars) की दूरी ज्ञात करने में
- मानचित्र (map) बनाने और अक्षांश एवं देशांतर (latitude and longitude) के सापेक्ष किसी द्वीप (island) की स्थिति ज्ञात करने में
- किसी उड़ती चीज की किसी बिंदु से दूरी या ऊँचाई ज्ञात करने में
- इंजीनियरिंग और भौतिक विज्ञान (physics) में



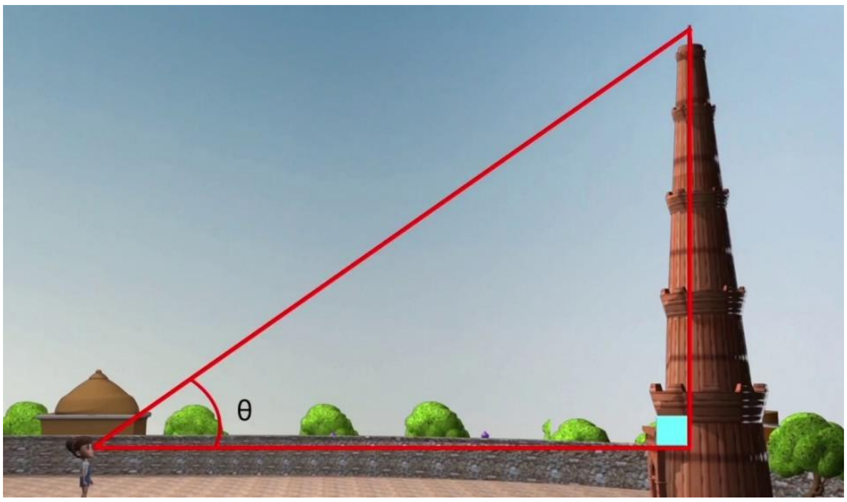
• **दृष्टि रेखा (sight line) -** प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिंदु को मिलाने वाली रेखा।



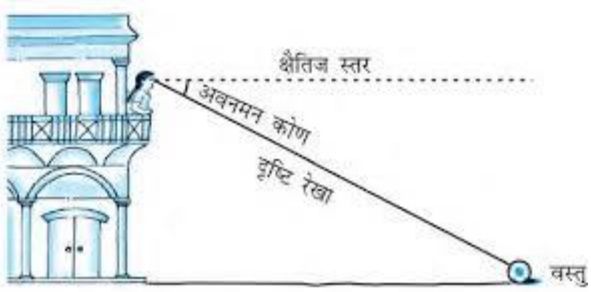
● **क्षैतिज रेखा (horizontal line) -** प्रेक्षक के पाद-बिंदु से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के पाद-बिंदु को मिलाने वाली रेखा जबकि वस्तु का पाद-बिंदु (footer point) उसी तल पर हो जिस तल पर स्वयं प्रेक्षक खड़ा है।



● **उन्नयन कोण (elevation angle) -** दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण जबकि यह क्षैतिज स्तर से ऊपर हो।



● **अवनमन कोण (depression angle) -** दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण जबकि यह क्षैतिज स्तर से नीचे हो।



• जैसे-जैसे प्रेक्षक/वस्तु अन्य प्रेक्षक/वस्तु की ओर चलते जाते हैं तो उन्नयन कोण/अवनमन कोण का मान बढ़ता जाता है। इसका विलोमशः भी सत्य है।

◆ प्रश्नों हल करते समय ध्यान रखें कि पहले प्रश्न को अच्छी तरह समझ लें अन्यथा आप हमेशा अनुचित उत्तर पाएँगे।

◆ यदि प्रश्न/हल में दो समकोण बनते हैं तो ध्यान रखें कि हमें सबसे पहले ये जानना होता है कि उनमें क्या चीज उभयनिष्ठ (Common) है। यदि उस उभयनिष्ठ भुजा का मान ज्ञात नहीं है तो सबसे पहले उसे ही ज्ञात करना होता है।

◆ उचित त्रिकोणमितीय अनुपात के प्रयोग द्वारा ही प्रश्न को हल करें। जहाँ आप cot A का प्रयोग करते हैं वहाँ tan A से भी उत्तर (answer) सही मिलता है।

इसी प्रकार का सम्बन्ध अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों में भी होता है।

◆ अज्ञात भुजा को आप कोई भी चर (variable) मान सकते हैं परंतु यदि किसी भुजा को दो भागों में बाँटा गया है और भुजा की कुल लम्बाई ज्ञात है, तो आप एक भाग को (x)और दूसरे भाग को (कुल लम्बाई-x) मानते हैं।

◆ अवनमन कोण ज्ञात होने पर हम पहले समांतर रेखा (parallel line) और एकांतर कोण की मदद से उन्नयन कोण ज्ञात करते हैं, फिर प्रश्न को हल करते हैं।

◆ समकोण त्रिभुज की वह भुजा जिसमें त्रिभुज से बाहर अतिरिक्त रेखा हो, पहले उसे घटाकर (subtract) प्रश्न को हल करें।

Example:

सर्कस का एक कलाकार एक 20 m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंध हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)|

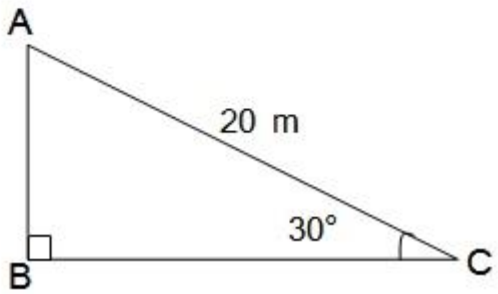
Solution:

माना खंभे की ऊँचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$\theta = 30°$

समकोण त्रिभुज ABC में;



माना खंभे की ऊँचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$\theta = 30°$

समकोण त्रिभुज ABC में;

$\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$\sin 30° = \dfrac{h}{20}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{20}$

2h = 20 [bi-cross Method के प्रयोग से]

$h = \dfrac{20}{2} = 10$ m

अत: खंभे की ऊँचाई = 10 मीटर

आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30० का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

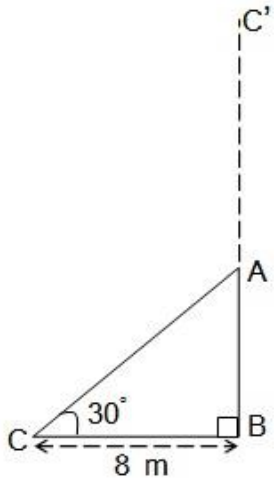
Solution:

माना पेड़ की ऊँचाई BC′ है और पेड़ बिंदु A से टूटकर

जमीन पर बिंदु C पर झुकी है |

$\theta = 30°$, BC = 8 m

समकोण त्रिभुज ABC में, AB भुजा के लिए,


C'
A
30°
C
B
8 m

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{8}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8}$

$AB\sqrt{3} = 8$

$AB = \frac{8}{\sqrt{3}}$ m

इसीप्रकार AC भुजा के लिए ;

$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC}$

$\sqrt{3}\,AC = 8 \times 2 = 16$

$AC = \frac{16}{\sqrt{3}}$ m

पेड़ की ऊँचाई = AB + AC

$= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$

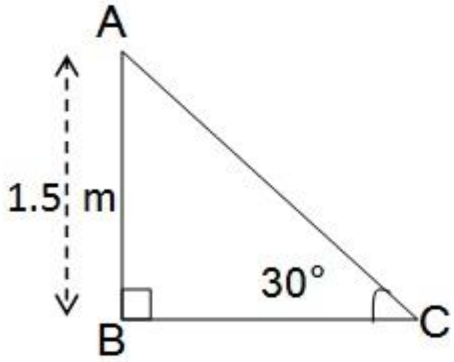
हर का परिमेइकरण करने पर

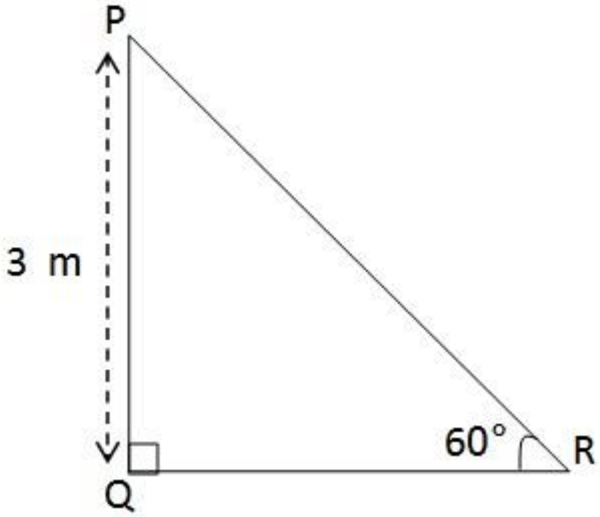
$\frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$ m

अत: पेड़ की ऊँचाई = $8\sqrt{3}$ मीटर

एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3 m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबाई क्या होनी चाहिए?

Solution:


A
1.5 m
30°
B
C


P
3 m
60°
Q
R

Case-I

समकोण त्रिभुज ABC में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई AC है

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\sin 30° = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{AC}$

AC = 2 × 1.5 = 3 m

अतः छोटी फिसलनपट्टी की लंबाई = 3 मीटर

अब, Case-II

समकोण त्रिभुज PQR में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई PR है

$\sin\theta = \frac{PQ}{PR}$

$\sin 60° = \frac{3}{PR}$

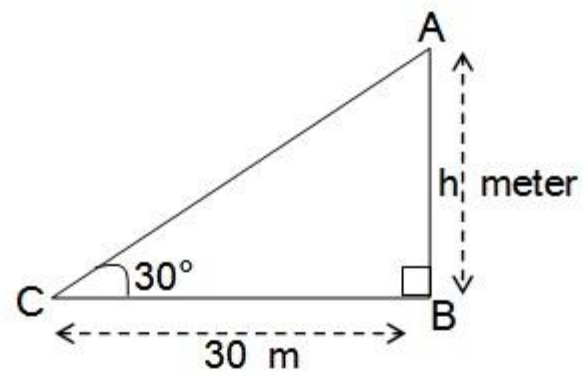
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{PR}$

$PR = \frac{2 \times 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ m

अतः बड़ी फिसलनपट्टी की लंबाई = $2\sqrt{3}$ मीटर

भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30 m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना मीनार AB की ऊँचाई = h मीटर

बिंदु C से मीनार के पाद बिंदु B की दुरी = 30 m

समकोण ΔABC में,

समकोण ΔABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

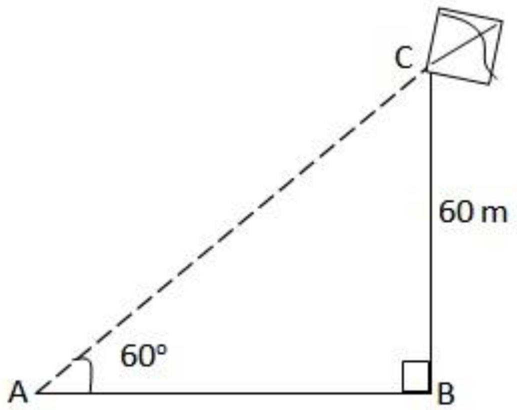
$$\sqrt{3}\,h = 30$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\text{ m}$$

अत: मीनार की ऊँचाई = $10\sqrt{3}$ मीटर

भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध् दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना AC डोरी की लंबाई है |

और भूमि से पतंग की ऊँचाई h = 60 m है |

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{60}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AC}$$

$$AC \times \sqrt{3} = 2 \times 60$$

$$AC = \frac{120}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}\,m$$

अत: डोरी की लंबाई = $40\sqrt{3}$ मीटर

1.5 m लंबा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।

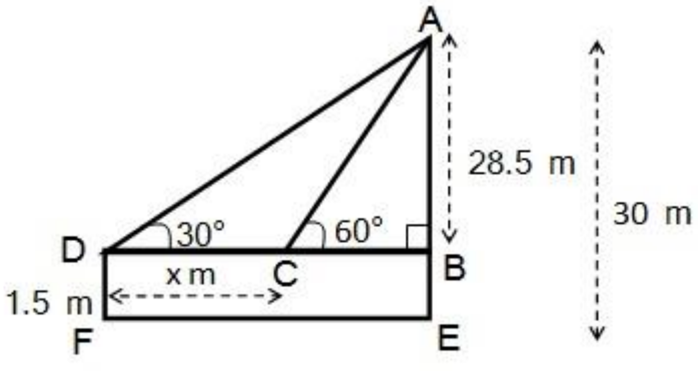
Solution:

माना कि वह लड़का x m दूर भवन की ओर गया |

लडके ऊंचाई छोड़कर भवन की ऊंचाई (AB) = 30 m - 1.5 m

= 28.5 m

समकोण त्रिभुज ABC में,


A
28.5 m
30 m
D
30°
60°
B
x m
C
1.5 m
F
E

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 60° = \frac{28.5}{BC}$

$\sqrt{3} = \frac{28.5}{BC}$

$BC = \frac{28.5}{\sqrt{3}}$ ....(1)

समकोण त्रिभुज ABD में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$

$\tan 30° = \frac{28.5}{x + BC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{x + BC}$

$BC + x = 28.5\sqrt{3}$

$\frac{28.5}{\sqrt{3}} + x = 28.5\sqrt{3}$ समी0 (1) से

$x = 28.5\sqrt{3} - \frac{28.5}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{28.5 \times 3 - 28.5}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{28.5\,(3 - 1)}{\sqrt{3}} = \frac{28.5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{57}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{57}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{57\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{x = 19\sqrt{3} \text{ m}}$

अतः वह मीनार की ओर $19\sqrt{3}$ m गया।

भूमि के एक बिंदु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

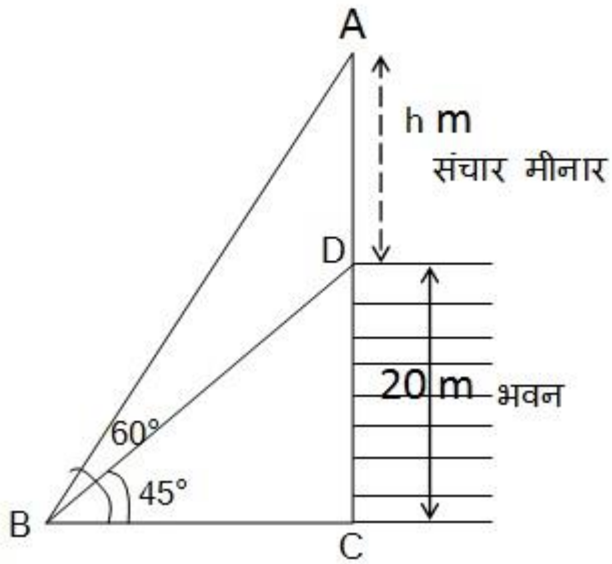
माना संचार मीनार की ऊंचाई (AD) = h m

भवन की ऊंचाई (DC) = 20 m

माना भूमि पर वह बिंदु B है |

भवन सहित मीनार की ऊंचाई (AC) = (20 + h) m

समकोण त्रिभुज BCD में,



$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$

$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$

$1 = \frac{20}{BC}$

$BC = 20\text{ m} .... (1)$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{20 + h}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{20 + h}{20}$ समी० (1) से

$20 + h = 20\sqrt{3}$

$h = 20\sqrt{3} - 20$

$\boxed{h = 20(\sqrt{3} - 1)\text{ m}}$

अत: संचार मीनार की ऊंचाई $= 20(\sqrt{3} - 1)$ m

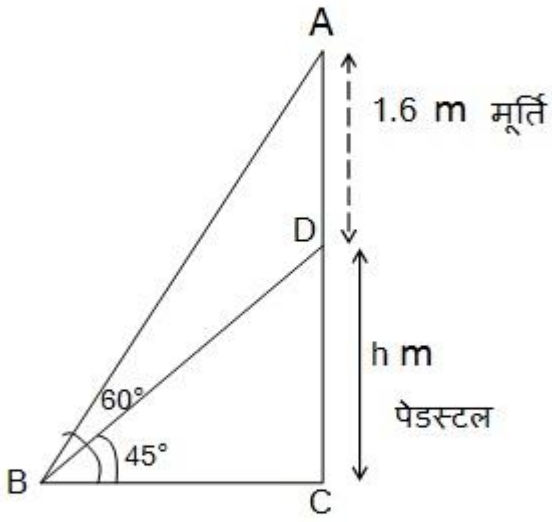
एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी ¯बदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना पेडस्टल की ऊंचाई h मीटर है |

मूर्ति की ऊंचाई = 1.6 m

समकोण त्रिभुज BCD में,


A
1.6 m मूर्ति
D
h m
पेडस्टल
60°
45°
B
C

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{BC}$$

$$BC = h\ m \ldots\ldots (1)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h+1.6}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h+1.6}{h}$$ समी० (1) से

$$h\sqrt{3} = h + 1.6$$

$$h\sqrt{3} - h = 1.6\ m$$

$$h(\sqrt{3} - 1)\ m = 1.6\ m$$

$$h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1}$$

हर का परिमेयीकरण करने पर

$$h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$\boxed{h = 0.8(\sqrt{3}+1)\ m}$$

अत: पेडस्टल की ऊंचाई $= 0.8(\sqrt{3}+1)\ m$ हैं |

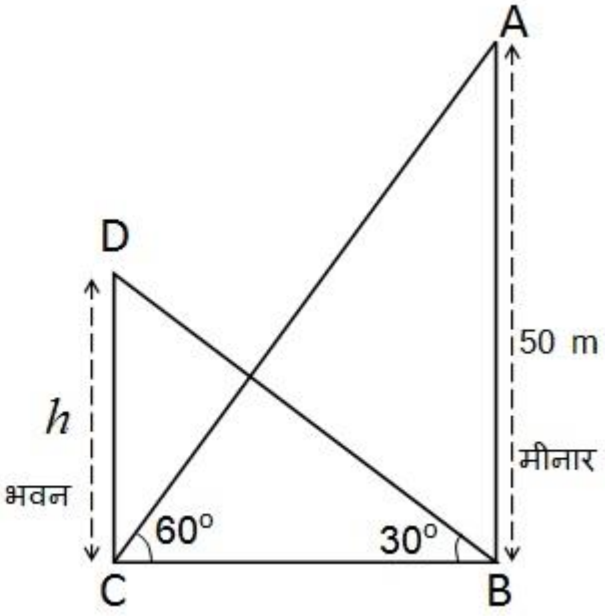
एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30o है और भवन केपाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50m ऊँची हो, तो भवन की

ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना भवन की ऊंचाई = h m

समकोण त्रिभुज ABC में,



$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{50}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{50}{BC}$

$BC = \frac{50}{\sqrt{3}}$ ....(1)

समकोण त्रिभुज BCD में,

$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$

$\tan 30^\circ = \frac{h}{BC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{BC}$

$BC = h\sqrt{3}$ .... (2)

$\frac{50}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$

$3h = 50$

$$\boxed{h = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}\ m}$$

अत: भवन की ऊंचाई $16\frac{2}{3}$ m है |

एक 80 m चैड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

Solution:

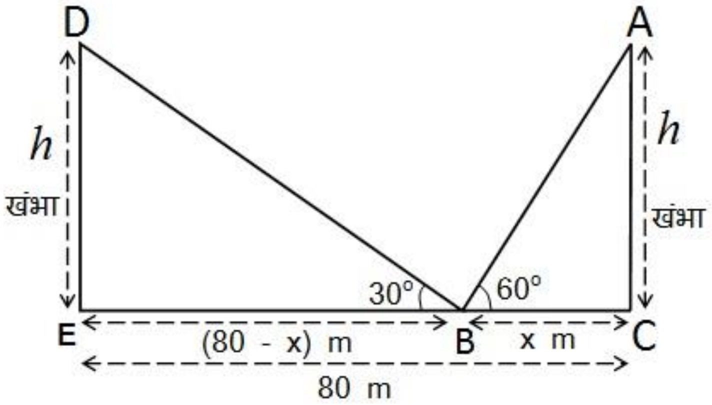
माना भूमि पर वह बिंदु B है |

और खंभों की ऊंचाई = h मीo,

B बिंदु से एक खंभे की दुरी = x m

तो दुसरे खंभे की दुरी = (80 - x) m

समकोण त्रिभुज ABC में,



$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{h}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$

$x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ....(1)

समकोण त्रिभुज BED में,

$\tan\theta = \frac{DE}{BE}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{BE}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(80 - x)}$

$\Rightarrow 80 - x = h\sqrt{3}$

समी० 1 से $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ रखने पर

$\Rightarrow 80 - \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$

$\Rightarrow h\sqrt{3} + \frac{h}{\sqrt{3}} = 80$

$\Rightarrow \frac{3h + h}{\sqrt{3}} = 80$

$\Rightarrow \frac{4h}{\sqrt{3}} = 80$

$\Rightarrow 4h = 80\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = \frac{80\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow h = 20\sqrt{3}\,m$

समी० में h का मान रखने पर

$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$x = 20\ m$

$\Rightarrow \boxed{h = 20\sqrt{3}\,m,\ x = 20\ m}$

अत: खंभे की ऊंचाई = $20\sqrt{3}\,m$

एक खंभे की दुरी = 20 m

दुसरे खंभे की दुरी = 80 - 20 = 60 m

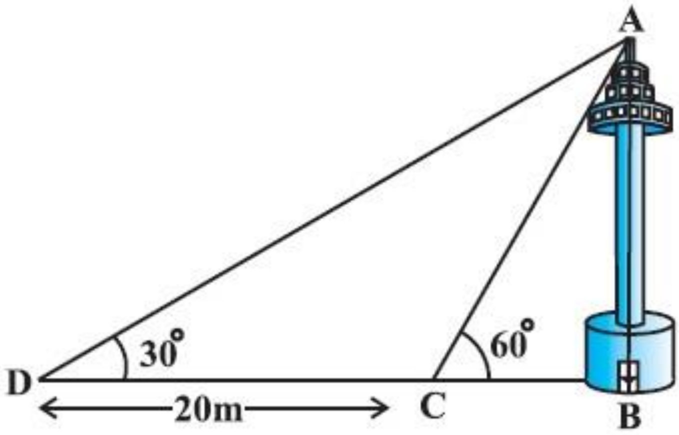
एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर उर्ध्वाधर खड़ा है टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिंदु से 20 m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टावर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है । टॉवर की ऊँचाई और नहर की चैड़ाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना टॉवर (AB) की ऊंचाई = h मी०

नहर BC की चौड़ाई = x मी०

समकोण त्रिभुज ABC में,


A
30°
60°
D
C
B
20m

$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$

$\tan 30^\circ = \frac{h}{DC + BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20 + x}$

$\Rightarrow 20 + x = h\sqrt{3}$

$\Rightarrow 20 + \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$

(x का मान रखने पर समी० 1 से)

$\Rightarrow 20 = h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 20$

$\Rightarrow 3h - h = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2h = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = 10\sqrt{3}\,m$

समी० 1 से

$x = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$x = 10\ m$

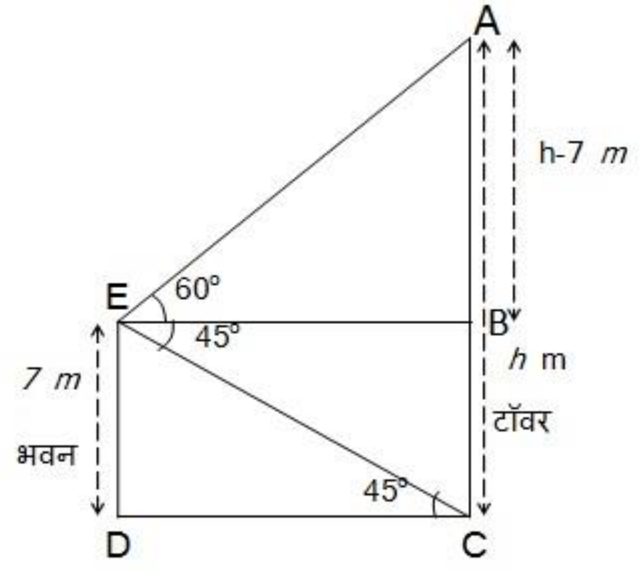
$\boxed{\Rightarrow h = 10\sqrt{3}\,m, x = 10\ m}$

अत: टॉवर की ऊंचाई = $10\sqrt{3}\,m$ और

नहर की चौड़ाई = 10 m

7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45o है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना टॉवर की ऊँचाई = h मीटर

भवन DE की ऊंचाई = 7 मी०

DE = BC = 7 मी०

AB की लंबाई = h - 7 मी०

समकोण त्रिभुज EDC में,

$\tan\theta = \frac{ED}{DC}$

$\tan 45^\circ = \frac{7}{DC}$

$\frac{1}{1} = \frac{7}{DC}$

DC = 7 m

DC = BE = 7 m

अब समकोण त्रिभुज ABE में

$\tan\theta = \frac{AB}{BE}$

$\tan 60^\circ = \frac{h-7}{BE}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h-7}{7}$

$h - 7 = 7\sqrt{3}$

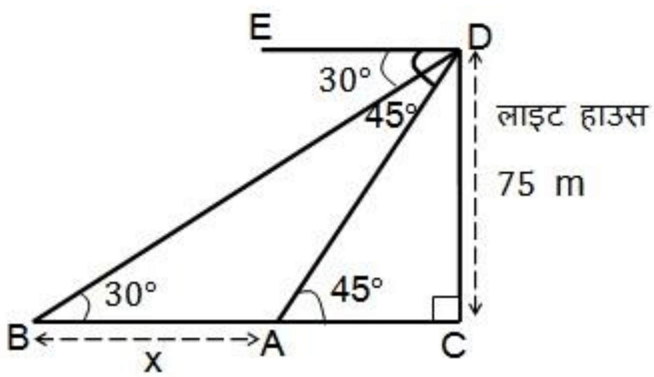
$h = 7\sqrt{3} + 7$

$\boxed{h = 7(\sqrt{3} + 1)\ m}$

टॉवर की ऊँचाई = $7(\sqrt{3} + 1)$ m

समुद्र-तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना दो जहाजों A तथा B है

जिनका अवनमन कोण क्रमश: 45° और 30° है |

लाइट-हाउस DC की ऊंचाई = 75 m

चूँकि अवनमन कोण उन्नयन कोण के बराबर होता है |

$\therefore \angle DAC = 45o$ और $\angle DBC = 30^o$

$$\tan\theta = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan 45^o = \frac{75}{AC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{75}{AC}$$

AC = 75 m

अब, समकोण त्रिभुज DBC **में,**

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^o = \frac{75}{BA + AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BA + 75}$$

$BA + 75 = 75\sqrt{3}$ m

$BA = 75\sqrt{3} - 75$

$\boxed{BA = 75(\sqrt{3} - 1) \text{ m}}$

दो जहाजों के बीच की दूरी = $75(\sqrt{3} - 1)$ m है |

1.2 m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2 m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है | इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दुरी ज्ञात कीजिए |

Solution:

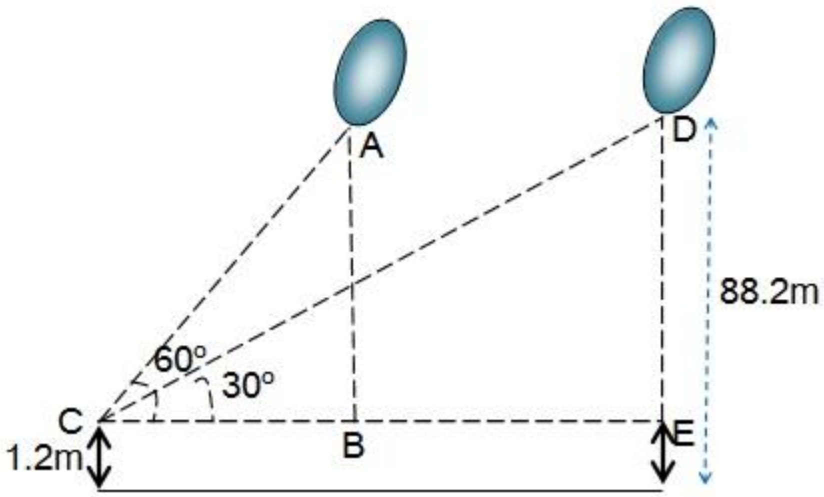
लड़की की ऊंचाई = 1.2 m

भूमि से गुब्बारे की ऊंचाई = 88.2 m

लड़की को छोड़कर गुब्बारे की ऊंचाई = 88.2 - 1.2

AB = DE = 87.0 m

तय दुरी = BE



समकोण DABC में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{87}{BC}$

$BC = \frac{87}{\sqrt{3}}$

समकोण ΔDEC में,

$\tan\theta = \frac{DE}{CE}$

$\tan 30^\circ = \frac{DE}{CE}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{87}{BC+BE}$

$BC + BE = 87\sqrt{3}$ m

$\frac{87}{\sqrt{3}} + BE = 87\sqrt{3}$ m

$BE = 87\sqrt{3} - \frac{87}{\sqrt{3}}$

$BE = \frac{87\times3-87}{\sqrt{3}}$

$BE = \frac{87(3-1)}{\sqrt{3}}$

$BE = \frac{87(2)}{\sqrt{3}}$

$BE = \frac{87\times2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$BE = \frac{87\times2\times\sqrt{3}}{3} = 29\times2\sqrt{3}$

$BE = 58\sqrt{3}$ m

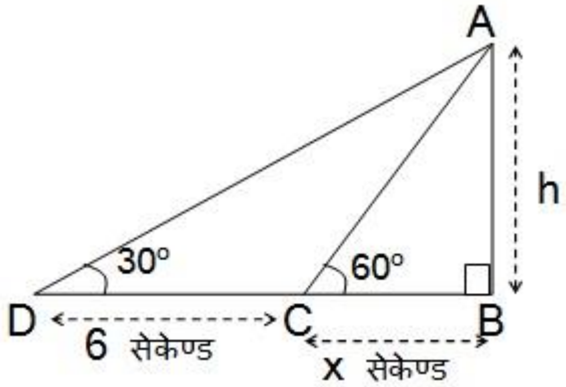
अर्थात इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दुरी $87\sqrt{3}$ m है |

एक सीध राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार

को 30° के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक समान चाल से जाता है। छः सेकंड बाद कार का अवनमन कोण 60° हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना कार को बिंदु C से मीनार के पाद B तक पहुँचने में x सेकेण्ड लगता है |



समकोण ΔABC में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$ .... (1)

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$

$h = x\sqrt{3}$ m .... (1)

समकोण ΔABD में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$

$\tan 30^\circ = \frac{h}{6+x}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{6+x}$

$6 + x = h\sqrt{3}$ m

$6 + x = (x\sqrt{3})\sqrt{3}$ m [$h = x\sqrt{3}$ रखने पर]

$6 + x = 3x$

$3x - x = 6$

$2x = 6$

$x = 3$

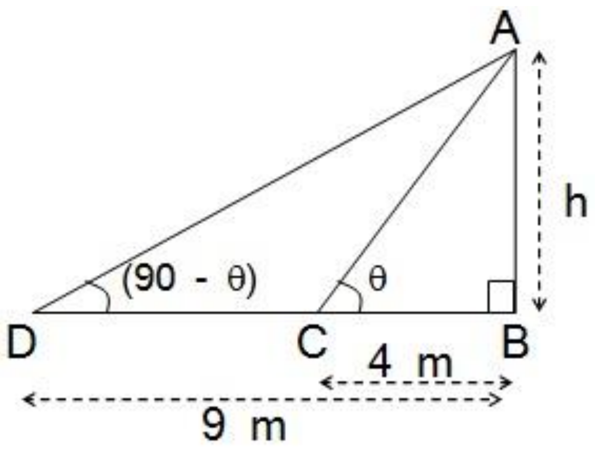
मीनार तक पहुँचने में लगा समय = 3 सेकंड

मीनार के आधर से और एक सरल रेखा में 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो ब्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 m है।

Solution:

माना मीनार की ऊँचाई = h मीटर है |

समकोण त्रिभुज ABC में,



$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan\theta = \frac{h}{4}$ .... (1)

समकोण त्रिभुज ABD में,

$\tan(90 - \theta) = \frac{AB}{BD}$

$\tan(90 - \theta) = \frac{h}{9}$

$\cot\theta = \frac{h}{9}$ .... (2) $[\because \tan(90 - \theta) = \cot\theta]$

समी० (1) को (2) से गुणा करने पर

$\tan\theta.\cot\theta = \frac{h}{4}.\frac{h}{9}$

$1 = \frac{h^2}{36}$

$h^2 = 36$

$h = \sqrt{36}$

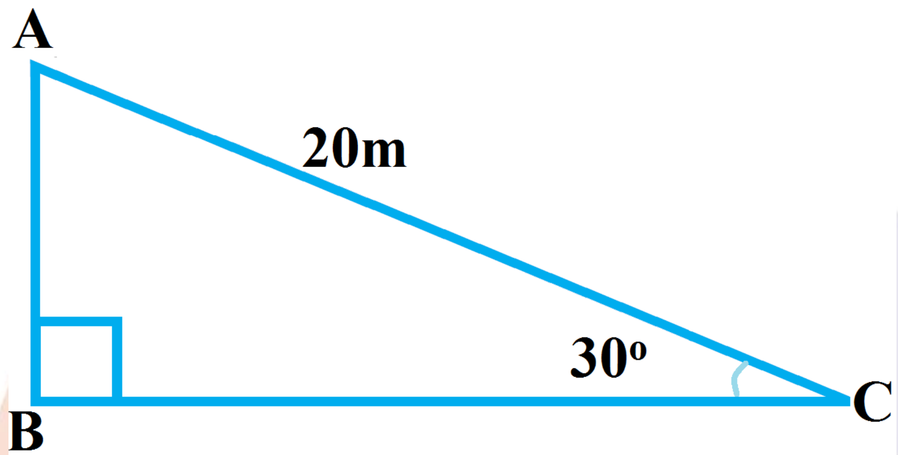
$h = 6$ m

अत: मीनार की ऊँचाई = 6 मीटर है | (सिद्ध हुआ)

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 9.1 (पृष्ठ संख्या 225-227)

प्रश्न 1 सर्कस का एक कलाकार एक 20m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंध हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)।



उत्तर- माना खंभे की ऊँचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$\theta = 30^\circ$

समकोण त्रिभुज ABC में;

माना खंभे की उचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$\theta = 30^\circ$

समकोण त्रिभुज ABC में;

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{20}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

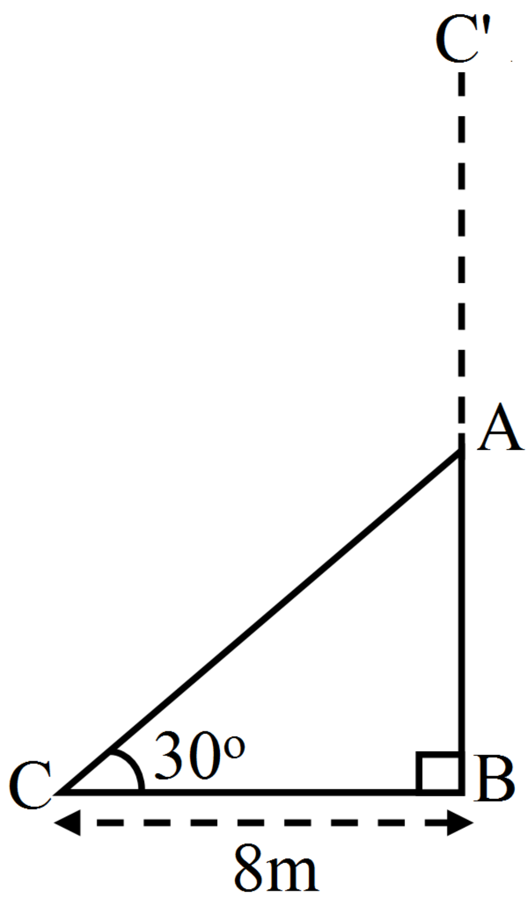
$2h = 20$ [द्वी पद विधि के प्रयोग से]

$$h = \frac{20}{2} = 10m$$

अतः खंभे की ऊँचाई = 10 मीटर

प्रश्न 2 आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना पेड़ की ऊँचाई BC′ है और पेड़ बिंदु A से टूटकर



जमीन पर बिंदु C पर झुकी है।

$$\theta = 30^\circ, \mathrm{BC} = 8\mathrm{m}$$

समकोण त्रिभुज ABC में, AB भुजा के लिए,

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{AB}}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\mathrm{AB}}{8}$$

$$\mathrm{AB}\sqrt{3} = 8$$

$$\mathrm{AB} = \frac{8}{\sqrt{3}}\mathrm{m}$$

इसप्रकार AC भुजा के लिये;

$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{\mathrm{AC}}$$

$$\sqrt{3}\mathrm{AC} = 8 \times 2 = 16$$

$$\mathrm{AC} = \frac{16}{\sqrt{3}}\mathrm{m}$$

पेड़ की ऊँचाई = AB + AC

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

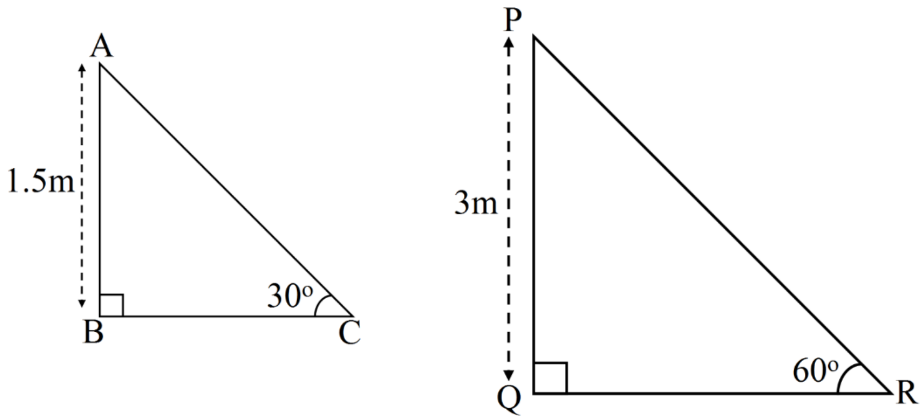
हर परिमेइकरण करने पर

$$\frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}\mathrm{m}$$

अतः पेड़ की ऊँचाई $= 8\sqrt{3}$ मीटर

प्रश्न 3 क ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबाई क्या होनी चाहिए?

उत्तर-



i. स्थिति

समकोण त्रिभुज ABC में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई AC है

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{AC}$$

$$AC2 \times 1.5 = 3m$$

अतः छोटी फिसलनपट्टी की लंबाई = 3 मीटर

ii. स्थिति

समकोण त्रिभुज PRQ में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई PR है

$$\sin\theta = \frac{PQ}{PR}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{3}{PR}$$

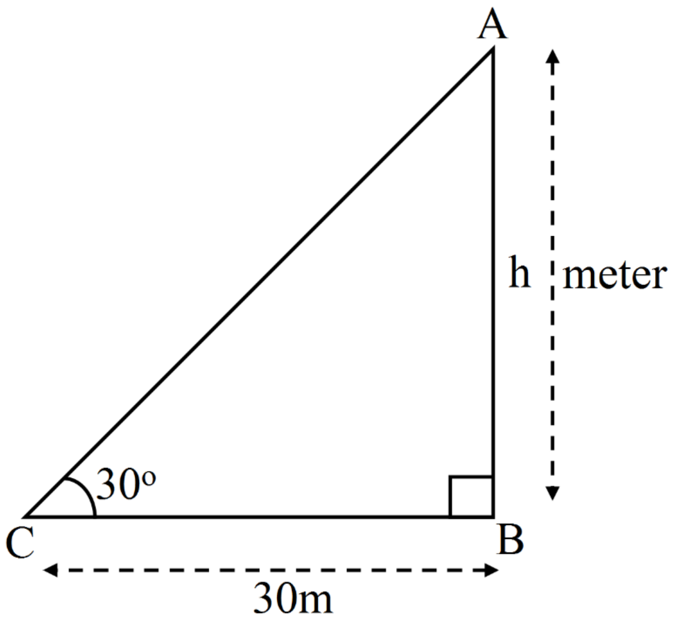
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{PR}$$

$$PR = \frac{2\times 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ m$$

अतः छोटी फिसलनपट्टी की लंबाई $= 2\sqrt{3}$ मीटर

प्रश्न 4 भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना मीनार AB की ऊँचाई = h मीटर

बिंदु C से मीनार के पाद बिंदु B की दुरी = 30m

समकोण $\triangle ABC$ में,

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

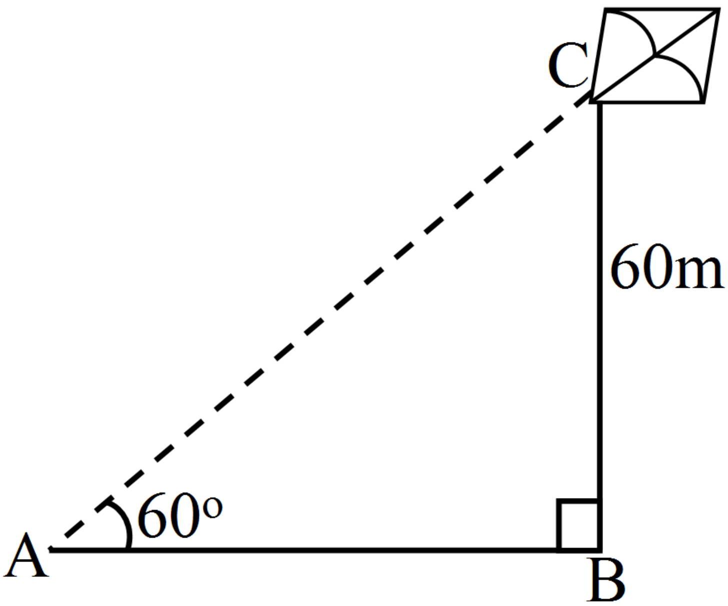
$$\sqrt{3}\,h = 30$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}m$$

अतः मीनार की ऊंचाई $= 10\sqrt{3}m$ मीटर

प्रश्न 5 भूमि से 60m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध् दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना AC डोरी की लांबई है।

और भूमि की लंबाई है।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{60}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AC}$$

$$AC \times \sqrt{3} = 2 \times 60$$

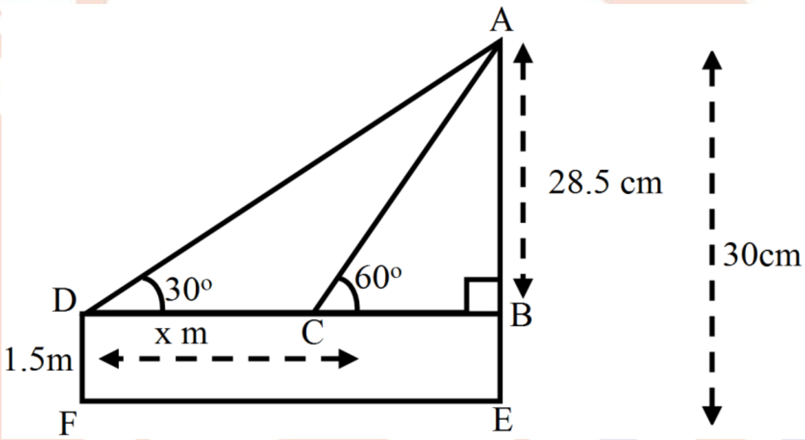
$$AC = \frac{120}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}\text{ m}$$

अतः डोरी की लंबाई $= 40\sqrt{3}\text{m}$ मीटर

प्रश्न 6 1.5m लंबा एक लड़का 30m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।

उत्तर- माना कि वह लड़का x m दूर भवन की ओर गया।

लडके ऊंचाई छोड़कर भवन की ऊंचाई) AB) = 30 m - 1.5m = 28.5m



समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{28.5}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{28.5}{BC}$$

$$BC = \frac{28.5}{\sqrt{3}} \ldots \text{(i)}$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{28.5}{x+BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{x+BC}$$

$$BC + x = 28.5\sqrt{3}$$

$$\frac{28.5}{\sqrt{3}} + x = 28.5\sqrt{3}$$ समी (i) से

$$x = 28.5\sqrt{3} - \frac{28.5}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{28.5\times3-28.5}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{28.5(3-1)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{28.5\times2}{\sqrt{3}} = \frac{57}{\sqrt{3}}$$

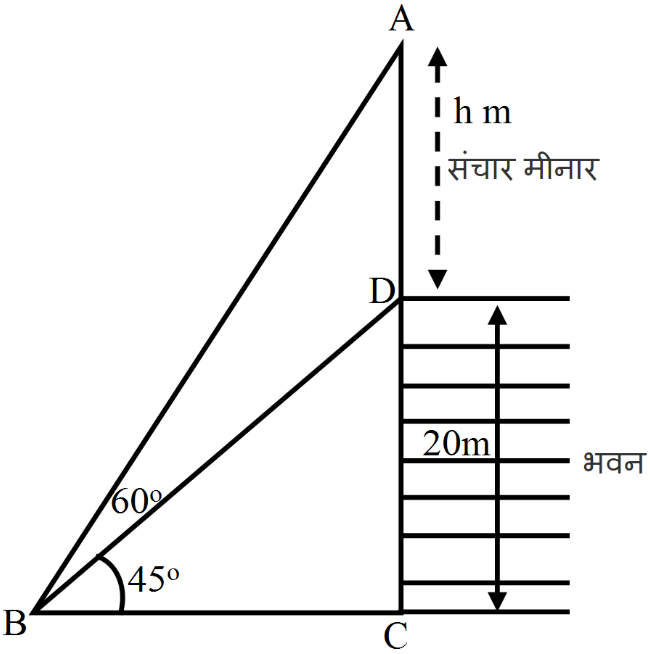
$$x = \frac{57}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{57\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 19\sqrt{3}m$$

अतः मीनार की और $= 19\sqrt{3}m$ गया।

प्रश्न 7 भूमि के एक बिंदु से एक 20m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना संचार मीनार की ऊंचाई) AD) = h m

भवन की ऊंचाई) DC) = 20m

माना भूमि पर वह बिंदु B है।

भवन सहित मीनार की ऊंचाई) AC) = (20 + h)m

समकोण त्रिभुज BCD में,

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{20}{BC}$$

$$BC = 20m \ldots (i)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{20+h}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{20+h}{20}$$ समी (i) से

$$20 + h = 20\sqrt{3}$$

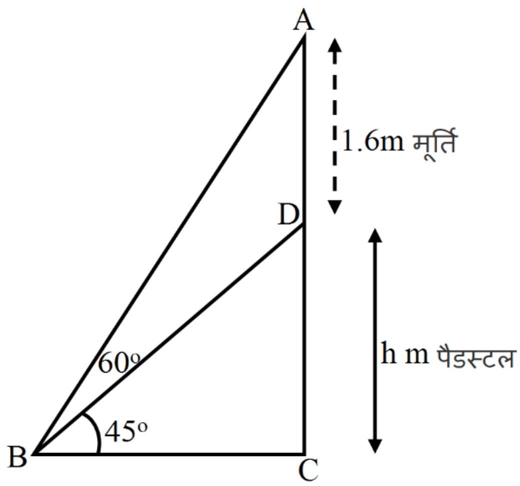
$$h = 20\sqrt{3} - 20$$

$$h = 20(\sqrt{3} - 1)m$$

अतः संचार मीनार की ऊंचाई $= 20(\sqrt{3} - 1)m$

प्रश्न 8 एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना पेडस्टल की ऊंचाई h मीटर है।

मूर्ति की ऊंचाई = 1.6m

समकोण त्रिभुज BCD में,

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$1 = \frac{h}{BC}$

$BC = h\ m \ldots (i)$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{h+1.6}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h+1.6}{h}$ समी (i) से

$h\sqrt{3} = h + 1.6$

$h\sqrt{3} - h = 1.6m$

$h(\sqrt{3} - 1)m = 1.6m$

$h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1}$

हर का परिमेंयीकरण करने पर

$h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$

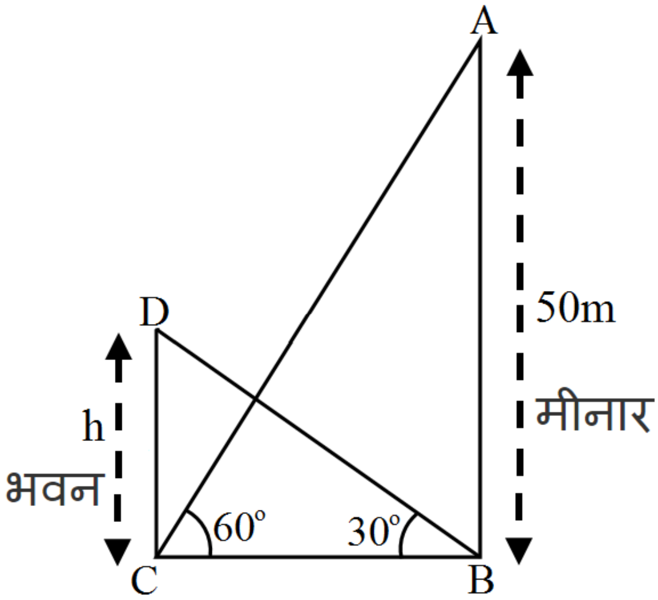
$= \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{2}$

$h = 0.8(\sqrt{3} + 1)m$

अतः संचार मीनार की ऊंचाई $= 0.8(\sqrt{3} + 1)m$ है।

प्रश्न 9 एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना भवन की ऊंचाई = h m

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{50}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{50}{BC}$$

$$BC = \frac{50}{\sqrt{3}} \ldots (i)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{BC}$$

$$BC = h\sqrt{3}. \ldots (ii)$$

$$\frac{50}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

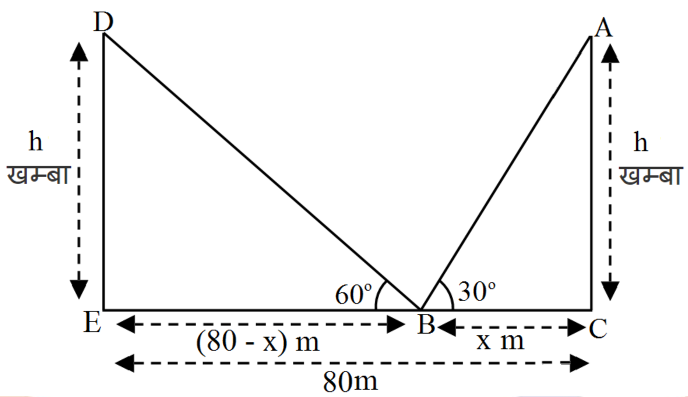
$$3h = 50$$

$$h = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}\,m$$

अतः भवन की ऊंचाई $= 16\frac{2}{3}\,m$ है।

प्रश्न 10 एक 80m चैड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना भूमि पर वह बिंदु B है।

और खंभों की ऊंचाई= h मी०,

B बिंदु से एक खंभे की दुरी = x m

तो दुसरे खंभे की दुरी) = 80 - x) m

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \ldots (i)$$

समकोण त्रिभुज BED में,

$$\tan\theta = \frac{DE}{BE}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(80-x)}$$

$$\Rightarrow 80 - x = h\sqrt{3}$$

समी 1 से $x = \frac{50}{\sqrt{3}}$ रखने पर,

$$\Rightarrow 80 - \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h\sqrt{3} + \frac{h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow \frac{3h+h}{h} = 80$$

$$\Rightarrow \frac{4h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow 4h = 80\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{80\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow h20\sqrt{3}$ m

समी में h का मान रखने पर,

$x = \frac{h}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$x = 20m$

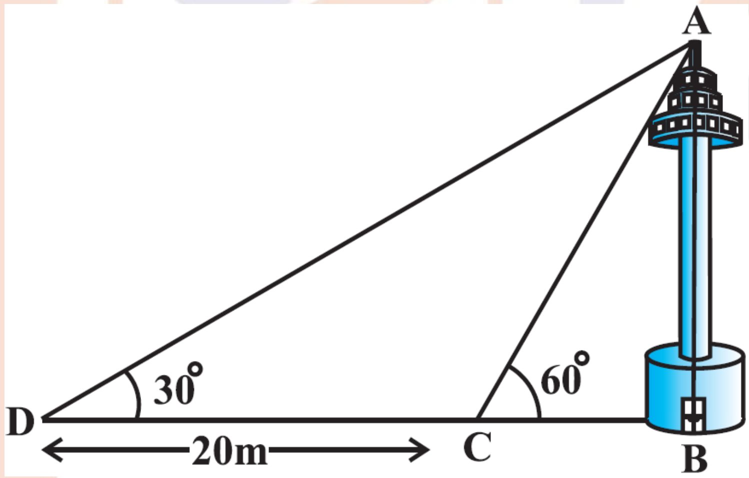
$\Rightarrow h = 20\sqrt{3}m, x = 20m$

अतः खंबे की ऊंचाई $= 20\sqrt{3}m$

एक खंबे की दूरी $= 20m$

दूसरे खंबे की दूरी $80 - 20 = 60m$

प्रश्न 11 एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर उर्ध्वाधर खड़ा है टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिंदु से 20m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टावर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चैड़ाई ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

माना टॉवर (AB) की ऊंचाई = h मी

नहर BC की चौड़ाई = x मी

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{DC+BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20+x}$$

$$\Rightarrow 20 + x = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 20 + \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

(x का मान रखने समी 1 से)

$$\Rightarrow 20 = h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 20$$

$$\Rightarrow 3h - h = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2h = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 10\sqrt{3}m$$

समी 1 से

$$x \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 10m$$

$$\Rightarrow h = 10\sqrt{3}m$$

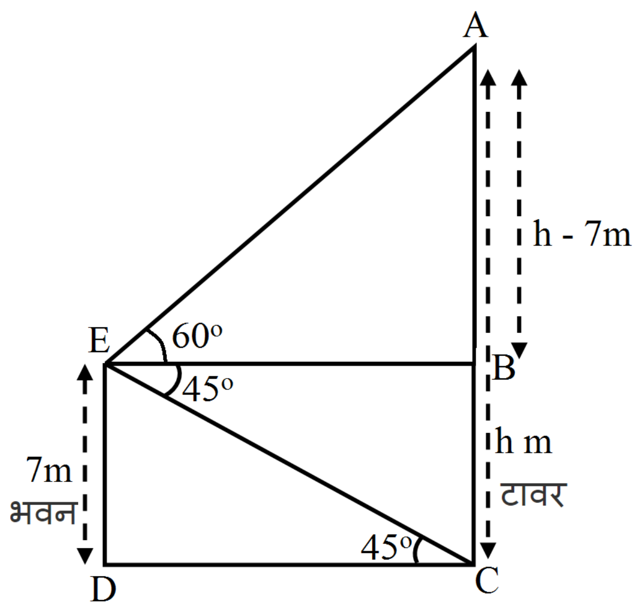
$$x = 10m$$

अतः टॉवर की ऊंचाई $= 10\sqrt{3}m$ और

नहर की चौड़ाई $x = 10m$

प्रश्न 12 7m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना टॉवर की ऊँचाई = h मीटर

भवन DE की ऊंचाई = 7 मी

DE = BC = 7 मी

AB की लंबाई = h - 7 मी

समकोण त्रिभुज EDC में,

$$\tan\theta = \frac{ED}{DC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{7}{DC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{7}{DC}$$

$$DC = 7m$$

$$DC = BE = 7m$$

अब समकोण त्रिभुज ABE में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BE}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h-7}{BE}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h-7}{7}$$

$$h - 7 = 7\sqrt{3}$$

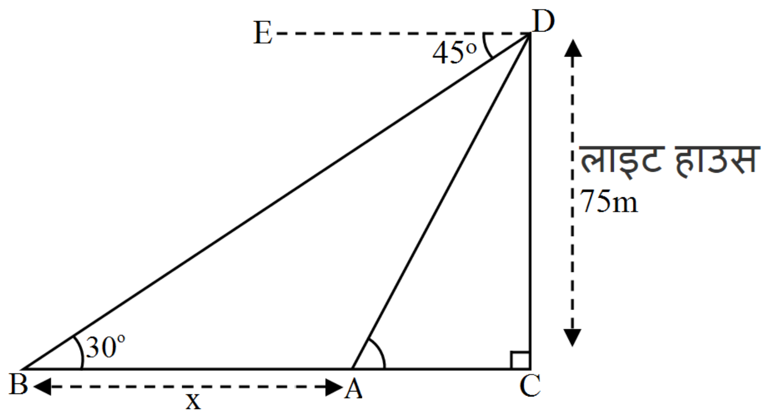
$$h = 7\sqrt{3} + 7$$

$$h = 7(\sqrt{3} + 7)m$$

अतः टॉवर की ऊंचाई $h = 7(\sqrt{3} + 7)m$ और

प्रश्न 13 समुद्र-तल से 75m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना दो जहाजों A तथा B है।

जिनका अवनमन कोण क्रमश: 45° और 30° है।

लाइट-हाउस DC की ऊंचाई = 75m

चूँकि अवनमन कोण उन्नयन कोण के बराबर होता है।

$\therefore \angle DAC = 45^\circ$ और $\angle DBC = 30^\circ$

$$\tan\theta = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{75}{AC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{75}{AC}$$

$$AC = 75m$$

अब समकोण त्रिभुज DBC में,

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{75}{BA+AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BA+75}$$

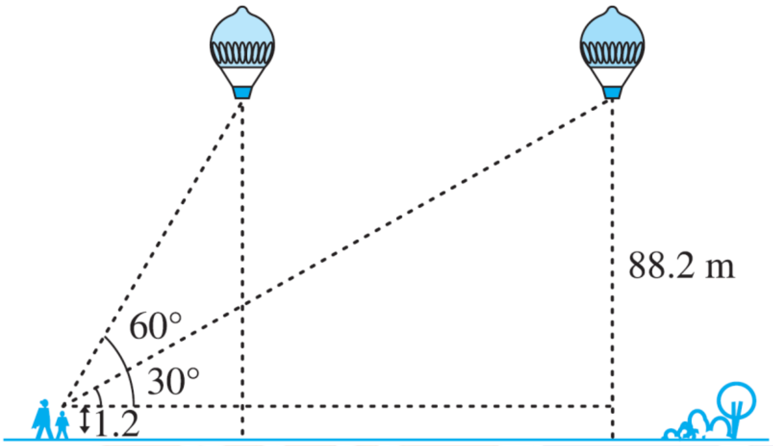
$$BA + 75 = 75\sqrt{3}m$$

$$BA = 75\sqrt{3} - 75$$

$$BA = 75(\sqrt{3} - 1)m$$

दो जहाजों के बीच की दूरी $= 75(\sqrt{3} - 1)m$ है।

प्रश्न 14 1.2m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है। इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दुरी ज्ञात कीजिए।



उत्तर- लड़की की ऊंचाई = 1.2m

भूमि से गुब्बारे की ऊंचाई = 88.2m

लड़की को छोड़कर गुब्बारे की ऊंचाई = 88.2 - 1.2

AB = DE = 87.0m

तय दुरी = BE

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{87}{BC}$$

$$BC = \frac{87}{\sqrt{3}}$$

अब समकोण त्रिभुज $\triangle ABC$ में,

$$\tan\theta = \frac{DE}{CE}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{DE}{CE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{87}{BC+BE}$$

$$BE = 87\sqrt{3} - \frac{87}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87\times3-87}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87(3-1)}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87(2)}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87\times2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87\times2\times\sqrt{3}}{3}$$

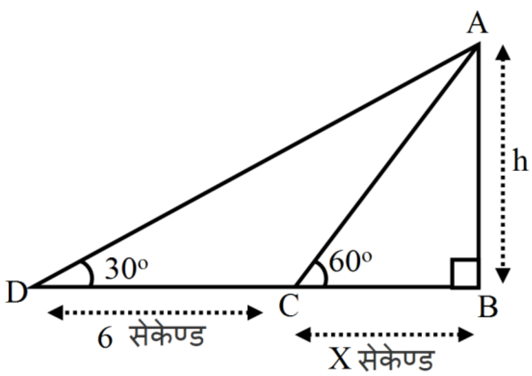
$$= 29 \times 2\sqrt{3}$$

$$BE = 58\sqrt{3}m$$

अर्थात इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी $= 58\sqrt{3}m$ दुरी है।

प्रश्न 15 एक सीध राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक समान चाल से जाता है। छः सेकंड बाद कार का अवनमन कोण 60° हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना कार को बिंदु C से मीनार के पाद B तक पहुँचने में x सेकेण्ड लगता है।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x} \ldots (i)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$$

$$BC = x\sqrt{3}m \ldots (i)$$

अब समकोण त्रिभुज $\triangle ABC$ में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{6+x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{6+x}$$

$$6 + x = h\sqrt{3}m$$

$$6 + x = (x\sqrt{3})\sqrt{3}m \ [h = x\sqrt{3} \text{ रखने पर}]$$

$$6 + x = 3x$$

$$3x - x = 6$$

$$2x = 6$$

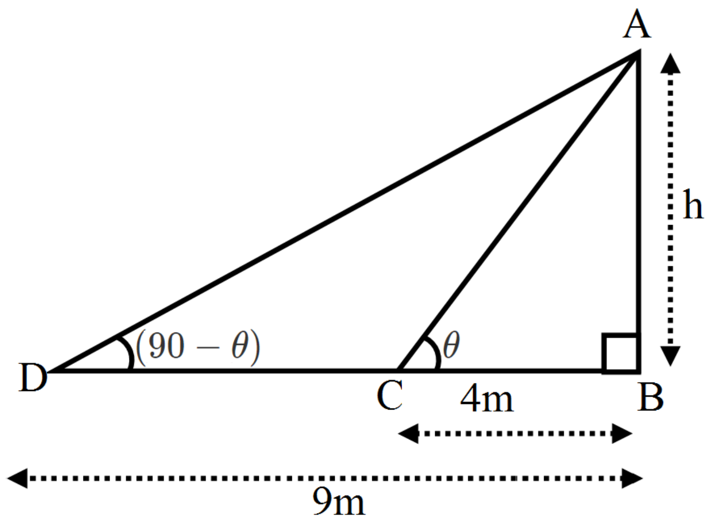
$$x = 3$$

$$= 29 \times 2\sqrt{3}$$

मीनार तक पहुंचने में लगा समय = 3 सैकंड

प्रश्न 16 मीनार के आधर से और एक सरल रेखा में 4m और 9m की दूरी पर स्थित दो बदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6m है।

उत्तर-



माना मीनार की ऊँचाई = h मीटर है।

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\theta = \frac{h}{4} \ldots .(i)$$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan(90-\theta) = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan(90-\theta) = \frac{h}{9}$$

$$\cot\theta = \frac{h}{9} \ldots .(ii)\ [\because \tan(90-\theta) = \cot\theta]$$

समी (i) को (ii) से गुणा करने पर

$$\tan\theta.\cot\theta = \frac{h}{4}\cdot\frac{h}{9}$$

$$1 = \frac{h^2}{36}$$

$$h^2 = 36$$

$$h = \sqrt{36}$$

$$h = 6m$$

अतः मीनार की ऊँचाई = 6 मीटर है।

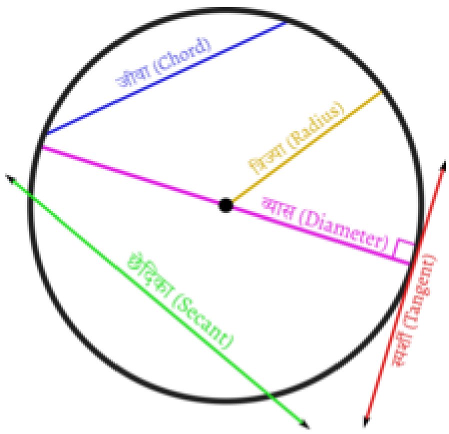
वृत्त

किसी एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर स्थित बिंदुओं का बिन्दुपथ वृत्त कहलाता है। यह निश्चित बिंदु, वृत्त का केंद्र कहलाता है, केंद्र और वृत्त की परिधि के किसी भी बिन्दु के बीच की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। वृत्त एक साधारण बंद वक्र होता है जो समतल को दो क्षेत्रों में विभाजित करता है: एक आंतरिक और एक बाहरी।

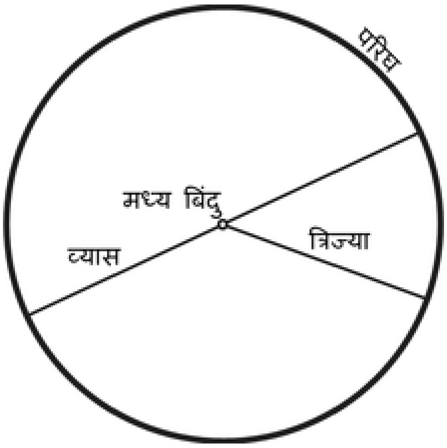
वृत्त एक प्रकार का शांकव (शंकु परिच्छेद) होता है जिसकी उत्केंद्रता (Eccentricity) शून्य होती है अर्थात नियता (Directrix) समतल में अनंत पर स्थित होती है। एक वृत्त को एक विशेष प्रकार के दीर्घवृत्त के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है जिसमें दोनों नाभियाँ (Focii) संपाती होती हैं और उत्केन्द्रता 0 होती है। यूक्लिड के अनुसार, 'वृत्त एक रेखा से घिरा हुआ एकविमीय समतल होता है और किसी निश्चित बिंदु से लेकर उस बंधरेखा तक खींची गई सभी रेखाएं बराबर होती हैं। इस बंधरेखा को परिधि और इस निश्चित बिंदु को वृत्त का केंद्र कहते हैं।'

वृत्त और त्रिज्या

वृत्त: वृत्त एक तल के उन बिदुओं का समूह होता है जो एक नियत बिदु (केंद्र) से अचर दूरी (त्रिज्या) पर होते हैं।



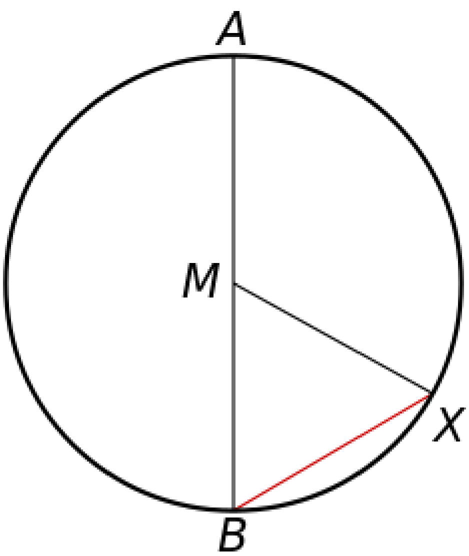
त्रिज्या: त्रिज्या या अर्धव्यास किसी वृत्त के केन्द्र से उसकी परिधि तक की दूरी को कहते हैं।



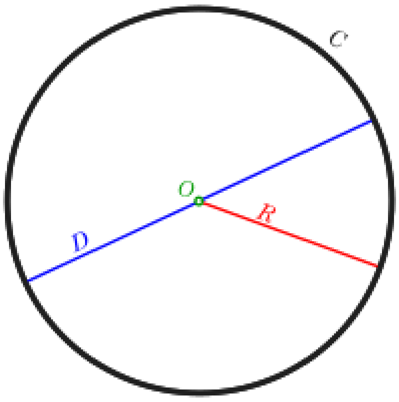
चाप (Arc): वृत्त की परिधि का कोई भी भाग।

केंद्र (Centre): वृत्त पर स्थित सभी बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु।

जीवा (Chord): एक रेखाखंड, जो वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलने पर बनता है। एक जीवा वृत्त को दो वृत्तखंडों में विभाजित करती है।



परिधि (Circumfrence): वृत्त के चारों ओर की वक्र लंबाई।

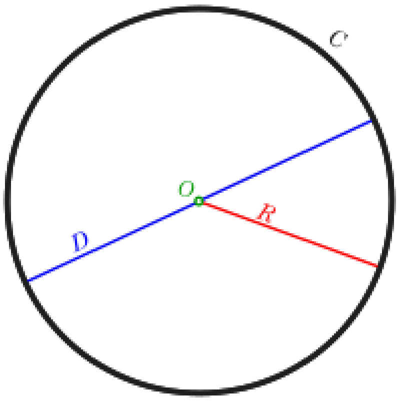


व्यास (Diameter): एक रेखाखंड जिसके अंतबिन्दु वृत्त पर स्थित होते हैं और जो केंद्र से गुजरता है या वृत्त के किन्हीं दो बिंदुओं के बीच की अधिकतम दूरी है। यह वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है और

यह त्रिज्या की दोगुनी होती है।

डिस्क (Disc): एक वृत्त से घिरा अन्तः समतलीय क्षेत्र।

त्रिज्या (Radius): वृत्त के केंद्र से वृत्त की परिधि के किसी भी बिंदु तक का एक रेखाखंड, जो व्यास का आधा होता है।



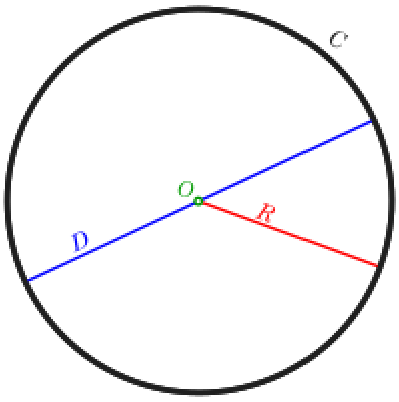
चाप (Arc), त्रिज्यखंड (Sector) एवं वृत्तखंड (Segment)

त्रिज्यखंड (Sector): किन्हीं दो त्रिज्याओं के बीच एक चाप से घिरा क्षेत्र।

वृत्तखण्ड (Segment): केंद्ररहित एक क्षेत्र जो वृत्त की एक जीवा और एक चाप से घिरा होता है। एक जीवा वृत्त को दो वृत्तखंडों में विभाजित करती है।

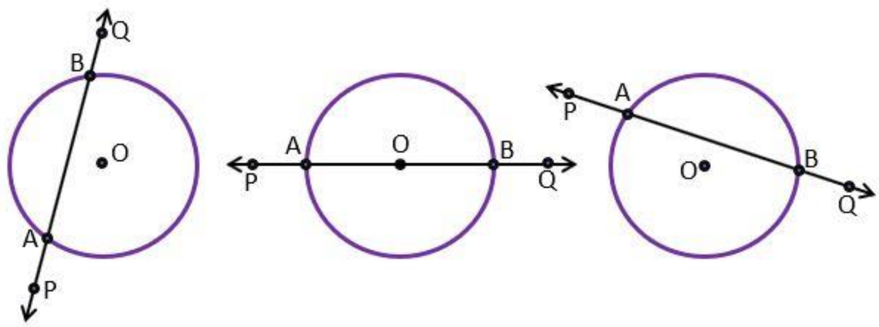
छेदन रेखा या छेदिका (Secant): एक विस्तारित जीवा, जो वृत्त के समतलीय होती है तथा वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है।

स्पर्शी या स्पर्श रेखा (Tangent): वृत्त के समतलीय सीधी रेखा जो एक बिंदु पर वृत्त को स्पर्श करती है।



अर्धवृत्त (Semicircle): वृत्त के व्यास तथा व्यास के अंतबिन्दुओं से बने चाप के मध्य का क्षेत्र अर्धवृत्त होता है। अर्धवृत्त का क्षेत्रफल, वृत्त के सम्पूर्ण क्षेत्रफल का आधा होता है।

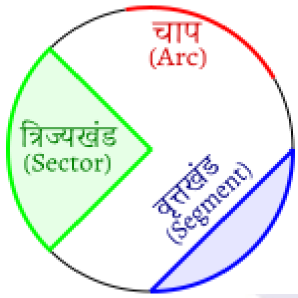
वृत्त की स्पर्श रेखा



रेखा जो एक वृत्त को केवल और केवल एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, वृत्त की स्पर्श रेखा कहलाती है। अर्थात वृत की स्पर्श रेखा उसे केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। स्पर्श रेखा जहाँ पर वृत्त को स्पर्श करती है उस बिंदु को स्पर्श बिंदु कहते हैं।

नोट: वृत्त के एक बिदु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।

वत्त की स्पर्श रेखा के गुण



- वृत्त के एक बिन्दु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।
- किसी वृत्त की स्पर्श रेखा छेदक रेखा की एक विशिष्ट दशा है जब संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ।
- स्पर्श रेखा और वृत्त के कॉमन प्वांट (उभनिष्ठ बिन्दु) को स्पर्श बिन्दु (point of contact) कहते हैं। तथा स्पर्श रेखा को वृत के उभयनिष्ठ बिन्दु पर स्पर्श करना कहते हैं।
- वृत्त के अंदर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा नहीं है।
- वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा है।
- वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ हैं।
- बाह्य बिन्दु P से वृत के स्पर्श बिन्दु तक स्पर्श रेखा खंड की लम्बाई को बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई कहते हैं।

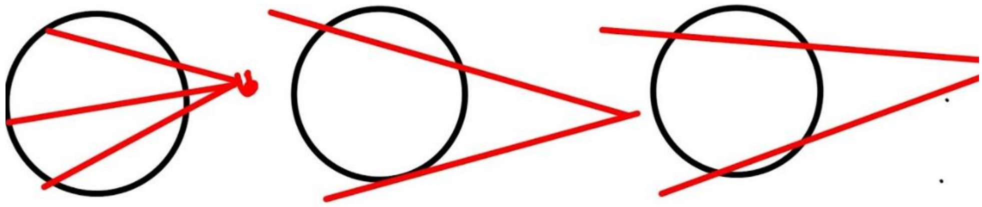
छेदक रेखा तथा वृत्त का केंद्र

छेदक रेखा: एक वृत्त को दो बिंदुओं में प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को छेदक कहा जाता है।

वृत्त का केंद्र: वृत्त के मध्य वह बिंदु, जिससे परिधि हमेशा समान दूरी पर होता है, वृत्त का केन्द्र कहलाता है।

छेदक रेखा-वृत के बाहर वृत को दो भागों में बांटते हुई दूसरी तरफ निकलने वाली रेखा को छेदक रेखा कहते हैं

छेदक रेखा के वह कॉन्सेप्ट्स आपको TET में 30 में से 30 दिलाएंगे



वृत्त के किसी बिदु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

हमें केंद्र O वाला एक वृत्त दिया है और एक बिदु P पर स्पर्श रेखा XY दी है। हमें सिद्ध करना है कि OP, XY पर लंब है।

XY पर P के अतिरिक्त एक बिदु Q लीजिए और OQ को मिलाइए।

बिदु Q वृत्त के बाहर होना चाहिए (क्यों?)

ध्यान दीजिए कि यदि Q वृत्त के अंदर है तो XY वृत्त की एक छेदक रेखा हो जाएगी और वह वृत्त की स्पर्श रेखा नहीं होगी)।

अतः, OQ त्रिज्या OP से बड़ी है।

अर्थात् OQ > OP

क्योंकि यह बिदु P के अतिरिक्त XY के प्रत्येक बिदु के लिए सत्य है, OP बिदु O से XY के अन्य बिदुओं की न्यूनतम दूरी है। इसलिए OP, XY पर लंब है।

टिप्पणी:

1. उपर्युक्त प्रमेय से हम यह भी निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वृत्त के किसी बिदु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।
2. स्पर्श बिदु से त्रिज्या को समाहित करने वाली रेखा को वृत्त के उस बिदु पर 'अभिलंब' भी कहते हैं।

एक बिंदु से एक वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की संख्या

किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

वाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती है।

उपपत्ति:

हमें केंद्र O वाला एक वृत्त, वृत्त के बाहर का एक बिंदु P तथा P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ, PR दी है।

हमें सिद्ध करना है कि PQ = PR

इसके लिए हम OP, OQ और OR को मिलाते हैं। तब ∠ OQP तथा ∠ ORP समकोण हैं क्योंकि ये

त्रिज्याओं और स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण हैं और प्रमेय 10.1 से ये समकोण है।

अब समकोण त्रिभुजों OQP तथा ORP में,

OQ = OR (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

OP = OP (उभयनिष्ठ)

अतः Δ OQP / Δ ORP (RHS सर्वांगसमता द्वारा)

इससे प्राप्त होता है PQ = PR (CPCT)

टिप्पणी:

1. प्रमेय को पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करके भी निम्न प्रकार से सिद्ध किया जा सकता हैः

   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (क्योंकि OQ = OR)

   जिससे प्राप्त होता है कि PQ = PR
2. यह भी ध्यान दीजिए कि $\angle OPQ = \angle OPR$, अतः OP कोण QPR का अर्धक है, अर्थात् वृत्त का केंद्र स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण अर्धक पर स्थित होता है।
3. सिद्ध कीजिए कि दो सकेंद्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिदु पर समद्विभाजित होती है।

हमें केंद्र O वाले दो सकेंद्रीय वृत्त C_1 और C_2 तथा बड़े वृत्त C_1 की जीवा AB, जो छोटे वृत्त C_2 को बिदु P पर स्पर्श करती है, दिए हैं।

हमें सिद्ध करना है कि AP = BP

आइए OP को मिलाएँ। इस प्रकार AB, C_2 के बिदु P पर स्पर्श रेखा है और OP त्रिज्या है।

अतः प्रमेय 10.1 से

$OP \perp AB$

अब AB वृत्त C_1 की एक जीवा है और $OP \perp AB$ है। अतः, OP जीवा AB को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब उसे समद्विभाजित करता है,

अर्थात् AP = BP

स्मरणीय तथ्य

किसी वृत्त पर बाह्य बिंदु से केवल दो स्पेश रेखाएं खींची जा सकती है।

वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

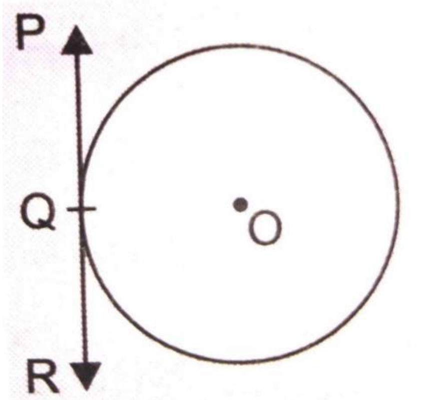
बाह्य बिदु से किसी वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं।

वृत्त (Circle) - उन सभी बिंदुओं का समूह जो एक स्थिर बिंदु (केंद्र) बराबर दुरी (त्रिज्या) पर होते हैं, वृत्त कहलाता है।

अप्रतिच्छेदी रेखा (non-intersecting lines or parallel lines) - जब दी गई रेखा और वृत्त का कोई बिंदु उभयनिष्ठ (common) न हो, तो वह रेखा अप्रतिच्छेदी रेखा कहलाती है।

छेदक रेखा (penetrative lines) - जब दी गई रेखा और वृत्त के दो बिंदु उभयनिष्ठ हो, तो वह रेखा छेदक रेखा कहलाती है।

स्पर्श रेखा (tangent line) - जब दी गई रेखा और वृत्त का केवल एक बिंदु उभयनिष्ठ हो, तो वह रेखा स्पर्श रेखा कहलाती है।



स्पर्श बिंदु (touch point) - दी गई रेखा और वृत्त के एकमात्र उभयनिष्ठ बिंदु को स्पर्श बिंदु कहते हैं।

- वृत्त के स्पर्श बिंदु पर केवल एक ही रेखा सम्भव है।
- वृत्त की किसी छेदक रेखा के समांतर केवल दो स्पर्श रेखाएँ होती हैं।
- वृत्त की स्पर्श रेखा छेदक रेखा की वह विशेष स्थिति है जब संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती (coincidence) हो जाते हैं।

वृत्त की स्पर्श रेखा वृत्त की उस त्रिज्या (radius) पर लंब होती है, जो स्पर्श बिंदु से खींची गई हो।

- एक बिंदु और एक वृत्त दिए होने पर निम्न में से कोई एक स्थिति सम्भव है : -
  - **स्थिति I -** वृत्त के अंदर स्थित बिंदु से वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती।
  - **स्थिति II -** वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।
  - **स्थिति III -** वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
- स्पर्श रेखा की लंबाई (length of tangent line) - वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से स्पर्श बिंदु तक की दूरी स्पर्श रेखा की लंबाई कहलाती है।
- वृत्त के किसी बाह्य बिंदु (exterior point) से खींची गई स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।
- केंद्र से वृत्त की जीवा (chord) पर खींचा गया लंब (perpendicular) जीवा को समद्विभाजित (bisect) करता है।
- दो सकेंद्रीय वृत्तों (concentric circles) में यदि बड़े वृत्त की जीवा छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है, तो जीवा स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित (bisect) होगी।
- वृत्त के बाहर स्थित किसी बिंदु से दो स्पर्श रेखाएँ खींचकर और और स्पर्श बिंदुओं को मिलाने पर एक समद्विबाहु त्रिभुज (isosceles triangle) बनता है और स्पर्श बिंदुओं पर बने कोण बराबर होते हैं।

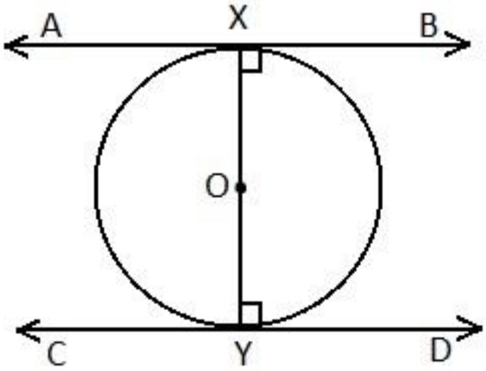
Example:

सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती है |

हल :

दिया है : O केंद्र वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ AB तथा CD हैं जो वृत्त को X तथा Y पर क्रमशः स्पर्श करती है |

सिद्ध करना है : AB || CD



प्रमाण :

OX ⊥ AB (स्पर्श बिंदु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा स्पर्श बिंदु पर लंब होती है)

अत: ∠BXO = 90० .... (i)

इसीप्रकार, OY ⊥ CD

अत: ∠DYO = 90० .... (i)

समीकरण (i) तथा (ii) जोड़ने पर

∠BXO + ∠DYO = 90० + 90०

∠BXO + ∠DYO = 180०

चूँकि एक ही ओर से अंत:आसन्न कोण संपूरक हैं, इसलिए

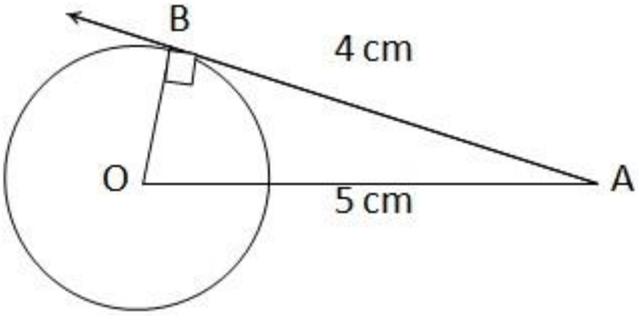
AB || CD Proved

एक बिन्दु A से जो एक वृत्त के केंद्र से 5cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4cm है | वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए |

हल : बिंदु A से केंद्र की दुरी (OA) = 5 cm

स्पर्श रेखा AB की लंबाई = 4 cm

वृत्त की त्रिज्या OB = ?



समकोण त्रिभुज AOB में, पैथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = OB^2 + AB^2$

5^2 = OB2 + 42

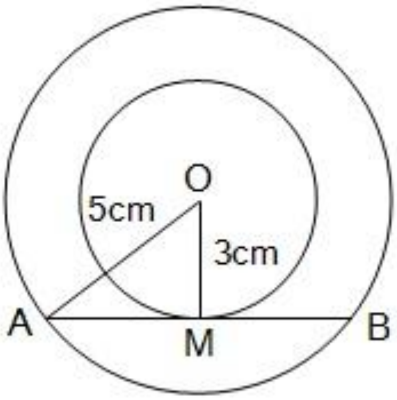
$5^2 - 4^2 = OB^2$

$25 - 16 = OB^2$

$OB^2 = 9$

दो सकेंद्रिय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm है | बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो|

हल :



दो संकेंद्री वृत्त जिसका केंद्र O है और बड़े वृत्त की जीवा AB है जो छोटे वृत्त को बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती है |

त्रिज्याएँ क्रमश: AO = 5 cm और OM = 3 cm है |

OM ⊥ AB है | (चूँकि जीवा को केंद्र से मिलाने वाली रेखाखण्ड जीवा पर लंब होती है |)

अत: समकोण त्रिभुज AOM में, पाइथागोरस प्रमेय से,

OA2 = OM2 + AM2

52 = 32 + AM2

52 - 32 = AM2

25 - 9 = AM2

AM2 = 16

AM = = 4 cm

अत: AB = 2 × AM

= 2 × 4 = 8 cm

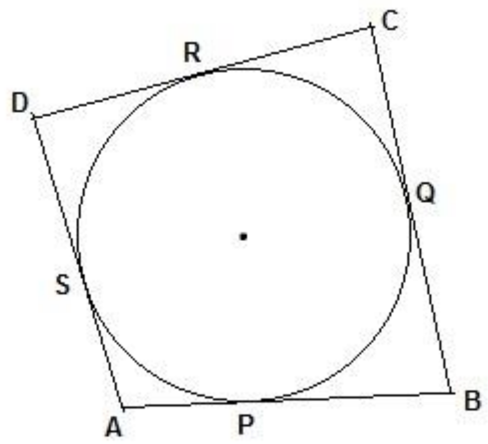
जीवा की लंबाई 8 cm है |

एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भज ABCD खींचा गया है (देखिए आकृति 10.12) | सिद्ध कीजिए : AB + CD = AD + BC

हल :

दिया है : ABCD एक O केंद्र वाले वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है | रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमश: बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं |

सिद्ध करना है : AB + CD = AD + BC



प्रमाण : P और S स्पर्श बिंदु हैं |

अत: AP = AS .... (i) प्रमेय 10.2 से

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती है |)

इसीप्रकार,

BP = BQ .... (ii)

CR = CQ .... (iii)

और DR = DS .... (iv)

समी० (i), (ii), (iii) और (iv) जोड़ने पर

AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ

AB + CD = AD + BC Proved

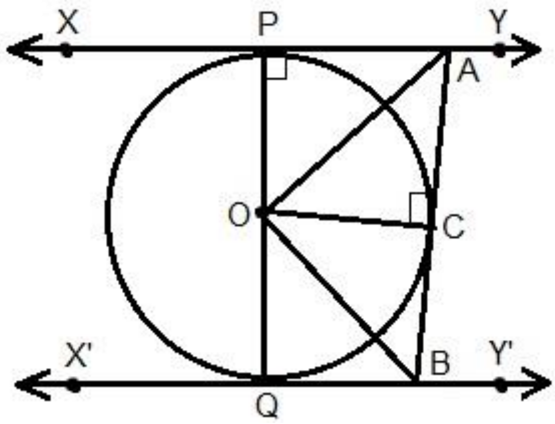
आकृति 10.13 में XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है | सिद्ध कीजिए की ∠AOB = 90o है |

हल :

दिया है : XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है : ∠AOB = 90o

प्रमाण :



DAOP और DAOC में

PA = CA (भुजा) प्रमेय 10.2 से

∠APO = ∠ACO   90o प्रत्येक

AO = AO उभयनिष्ठ कर्ण

RHS सर्वांगसमता नियम से

DAOP @ DAOC

इसलिए, ∠PAO = ∠CAO   (i) BY CPCT

इसीप्रकार DBOQ @ DBOC

इसलिए, ∠QBO = ∠CBO   (ii) BY CPCT

अब XY || X'Y' दिया है |

इसलिए, ∠PAC + ∠QBC = 180o (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोणों का योग)

या (∠PAO + ∠CAO) + (∠QBO + ∠CBO) = 180o

या (∠CAO + ∠CAO) + (∠CBO + ∠CBO) = 180o   (समी० (i) तथा (ii) के प्रयोग से)

या 2 ∠CAO + 2 ∠CBO = 180o

या 2 (∠CAO + ∠CBO) = 180o

या $\angle CAO + \angle CBO = 90^\circ$ .... (iii)

अब त्रिभुज AOB में,

$\angle AOB + \angle CAO + \angle CBO = 180^\circ$

$\angle AOB + 90^\circ = 180^\circ$

$\angle AOB = 180^\circ - 90^\circ$

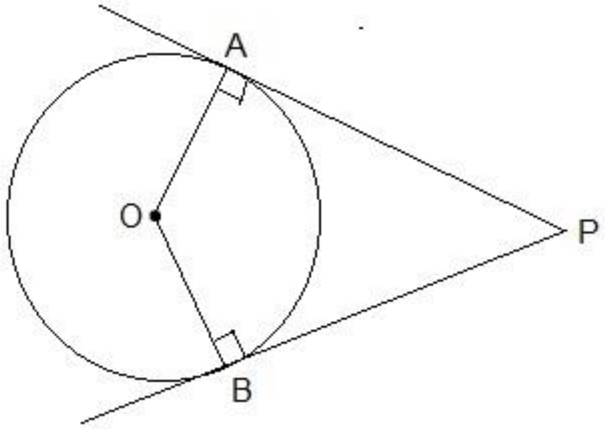
$\angle AOB = 90^\circ$ Proved

सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है |

हल :

दिया है : O केंद्र वाले वृत्त की की बाह्य बिंदु P से खिंची गई स्पर्श रेखाओं AP तथा BP है |

सिद्ध करना है : $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$



प्रमाण :

$OA \perp AP$ और $OB \perp BP$ (चूँकि स्पर्श रेखा से केंद्र को मिलाने वाली रेखाखंड लंब होती है |)

अत: $\angle OAP = 90$=........... (i)

और $\angle OBP = 90^\circ$ .... (ii)

चूँकि APBO एक चतुर्भुज है इसलिए,

$\angle OAP + \angle AOB + \angle OBP + \angle APB = 360^\circ$

=> $90^\circ + \angle AOB + 90^\circ + \angle APB = 360^\circ$

=> $180^\circ + \angle AOB + \angle APB = 360^\circ$

=> $\angle AOB + \angle APB = 360^\circ - 180^\circ$

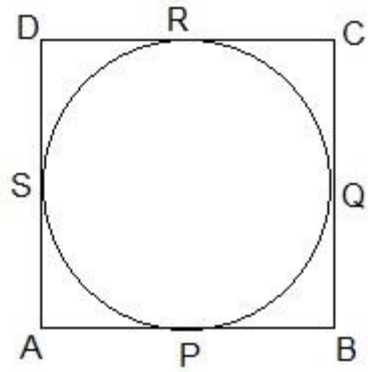
=> $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$ Proved

सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है |

हल :

दिया है : ABCD एक O केंद्र वाले वृत्त के परिगत बना समांतर चतुर्भुज है | रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमश: बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं |

सिद्ध करना है : ABCD एक समचतुर्भुज है |



प्रमाण : चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है इसलिए

AB = CD .... (i) (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा)

इसीप्रकार, BC = AD .... (ii)

अब, P और S स्पर्श बिंदु हैं |

अत: AP = AS .... (iii) प्रमेय 10.2 से

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती है |)

इसीप्रकार,

BP = BQ .... (iv)

CR = CQ .... (v)

और DR = DS .... (vi)

समी० (iii), (iv), (v) और (vi) जोड़ने पर

AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ

या AB + CD = AD + BC

या AB + AB = AD + AD समी० (i) तथा (ii) से

या 2 AB = 2 AD

या AB = AD .... (vii)

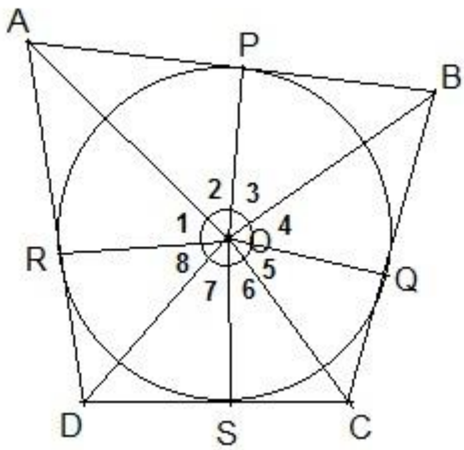
समीकरण (i), (ii) और (vii) से

AB = BC = CD = AD

अत: ABCD एक समचतुर्भुज है | Proved

सिद्ध कीजिए की वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने - सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण

अंतरित करती हैं |



हल :

दिया है : ABCD O केंद्र वाले एक वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है |

सिद्ध करना है : $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$

प्रमाण : $\Delta AOP \cong AOR$ प्रमेय 10.2 से

अत: $\angle 1 = \angle 2$ .... (i) संगत भाग

इसी प्रकार,

$\angle 3 = \angle 4$ .... (ii)

$\angle 5 = \angle 6$ .... (iii)

$\angle 7 = \angle 8$ .... (iii)

अब $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$
(केंद्र पर अंतरित कोण)

या $\angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 7 = 360^\circ$

समी० (i) (ii) (iii) और (iv) के प्रयोग से

या $2\angle 2 + 2\angle 3 + 2\angle 6 + 2\angle 7 = 360^\circ$

या $2(\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = 360^\circ$

या $(\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = \dfrac{360^\circ}{2}$

या $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ **Proved**

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 10.1 (पृष्ठ संख्या 231-232)

प्रश्न 1 एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?

उत्तर- अनेक।

प्रश्न 2 रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:

(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे _____ बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
(ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को _____ कहते हैं।

(iii) एक वृत्त की _____ समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ट बिन्दु को ______ कहते हैं।

उत्तर-

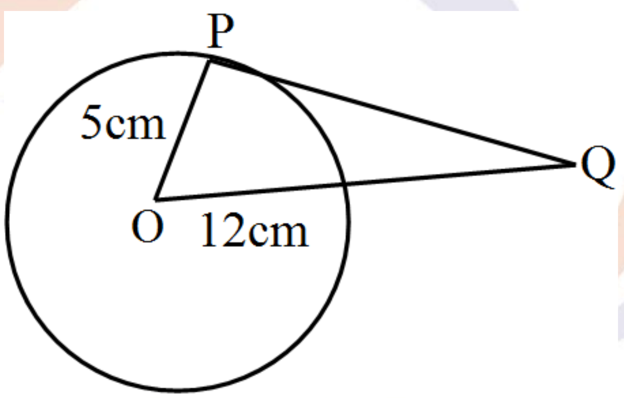
(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे **एक** बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
(ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को **जीवा** कहते हैं।
(iii) एक वृत्त की **दो** समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ट बिन्दु को **स्पर्श बिंदु** कहते हैं।

प्रश्न 3 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है की OQ = 12 सेमी PQ की लंबाई है:

a. 12 सेमी
b. 13 सेमी
c. 8.5 सेमी
d. $\sqrt{119}$ सेमी

उत्तर-

d. $\sqrt{\mathbf{119}}$ सेमी



$PQ^2 = OQ^2 - PO^2$

$= 12^2 - 5^2$

$= 144 - 25$

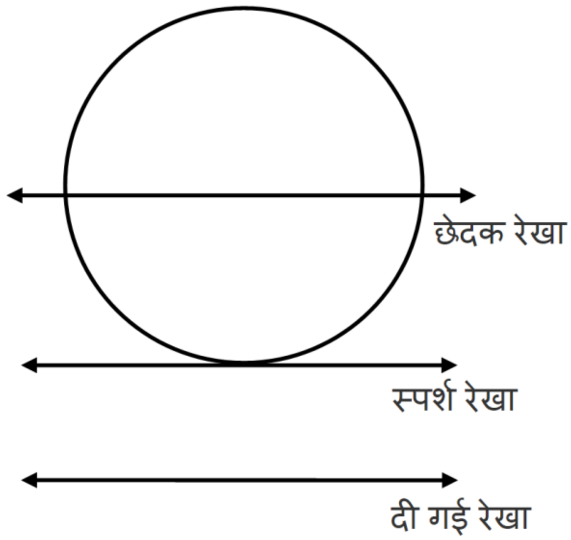
$= 119$

$PQ = \sqrt{119}$ cm

प्रश्न 4 एक वृत्त खींचिए और दो एक दी गई रेखा के समांतर दो ऐसी रेखाएँ खींचिए की उनमें से एक

स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदक रेखा हो|

उत्तर-



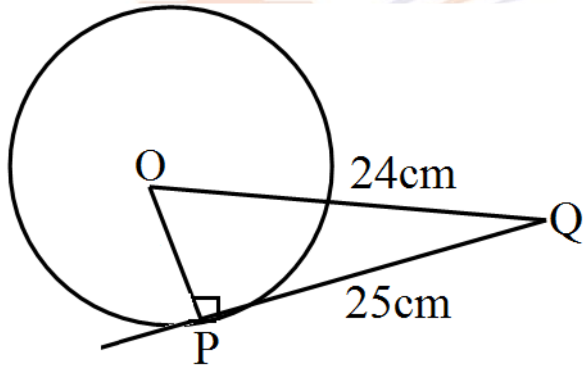
प्रश्नावली 10.2 (पृष्ठ संख्या 236-237)

प्रश्न 1 एक बिंदु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 सेमी तथा Q की केंद्र से दूरी 25 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या है:

a. 7 सेमी
b. 12 सेमी
c. 15 सेमी
d. 24.5 सेमी

उत्तर-

a. 7 सेमी



त्रिज्या (OP) = ?

OQ = 24 सेमी, PQ = 25 सेमी

चूँकि $OP \perp PQ$ है, पाइथागोरस प्रमेय से

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$$

$$25^2 = OP^2 + 24^2$$

$$OP^2 = 625 - 576$$

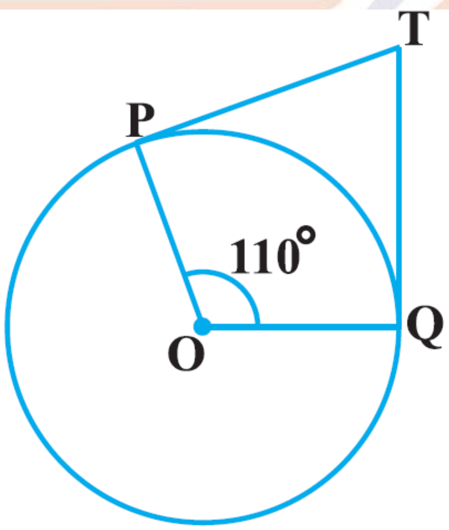
$$OP^2 = 49$$

$$OP = \sqrt{49}$$

$$= 7cm$$

प्रश्न 2 आकृति में, यदि TP, TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार है की ∠POQ = 110°, तो ∠PTQ बराबर है:

a. 60°
b. 70°
c. 80°
d. 90°



उत्तर-

b. 70°

हल:

$$\angle POQ + \angle PTQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 110^\circ + \angle PTQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PTQ = 180^\circ - 110^\circ$$

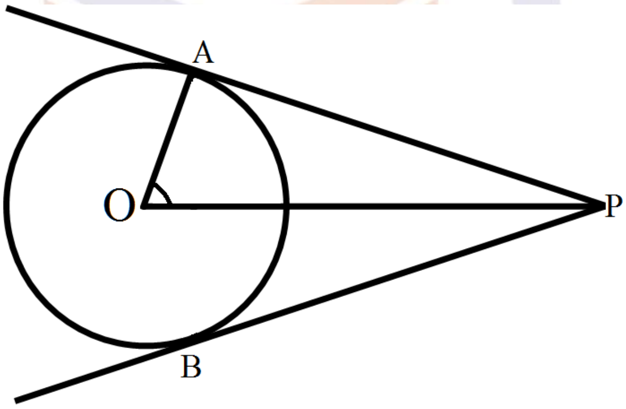
$$\Rightarrow 70^\circ$$

प्रश्न 3 यदि एक बिन्दु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ बराबर है:

a. 50°
b. 60°
c. 70°
d. 80°

उत्तर-

a. 50°



दिया है: $\angle APB = 80^\circ$

इसलिए $\angle APO = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

स्पर्श बिंदु पर $\angle A = 90^\circ$

त्रिभुज AOP में,

$\Rightarrow \angle A + \angle APO + \angle POA = 180^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ + 40^\circ \angle POA = 180^\circ$

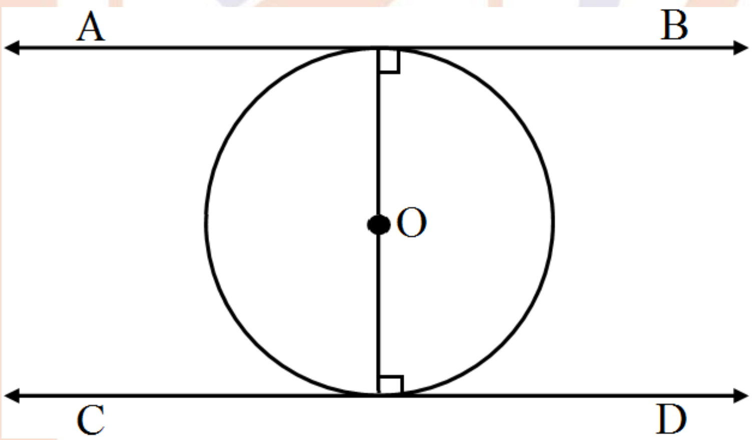
$\Rightarrow \angle POA = 180^\circ - 130^\circ$

$\Rightarrow \angle POA = 50^\circ$

प्रश्न 4 सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती है।

उत्तर- दिया है**:** O केंद्र वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ AB तथा CD हैं जो वृत्त को X तथा Y पर क्रमश : स्पर्श करती है|

सिद्ध करना है: AB || CD



प्रमाण:

$OX \perp AB$ (स्पर्श बिंदु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा स्पर्श बिंदु पर लंब होती है)

अत: $\angle BXO = 90^\circ \ldots\ldots (i)$

इसी प्रकार $OY \perp CD$

अत: $\angle DYO = 90^\circ \ldots\ldots (ii)$

समीकरण (i) तथा (ii) जोड़ने पर

$\angle BOX + \angle DOY = 90^\circ + 90^\circ$

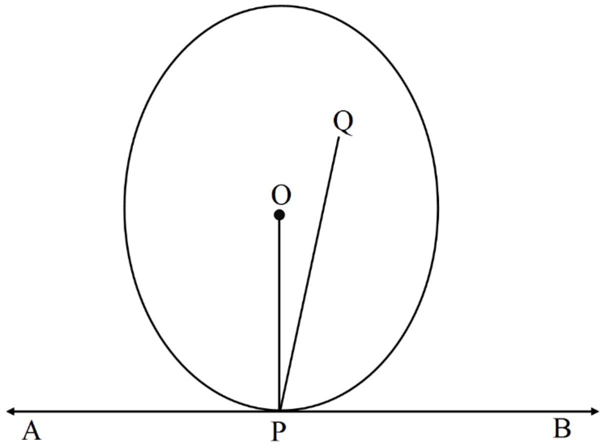
$\Rightarrow \angle BXO + \angle DYO = 180^\circ$

चूँकि एक ही ओर से अंत:आसन्न कोण संपूरक हैं, इसलिए

AB || CD Proved

प्रश्न 5 सिद्ध कीजिए की स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है|

उत्तर- AB को O के साथ वृत्त पर बिंदु P पर स्पर्श रेखा बनाएं।



यदि संभव हो, तो OQ से गुजरते हुए, PQ को AB से सीधा होने दें।

OP से जुड़ें।

चूँकि किसी बिंदु पर वृत्त पर स्पर्शरेखा बिंदु के माध्यम से त्रिज्या के लंबवत होती है।

इसलिए, $AB \perp OP$

$\angle POB = 90^\circ$

इसके अलावा $\angle QPB = 90^\circ$ [चित्र के द्वारा]

इसलिए $\angle QPB = OPB$

जो एक भाग के रूप में संभव नहीं है, पूरे के बराबर नहीं हो सकता है।

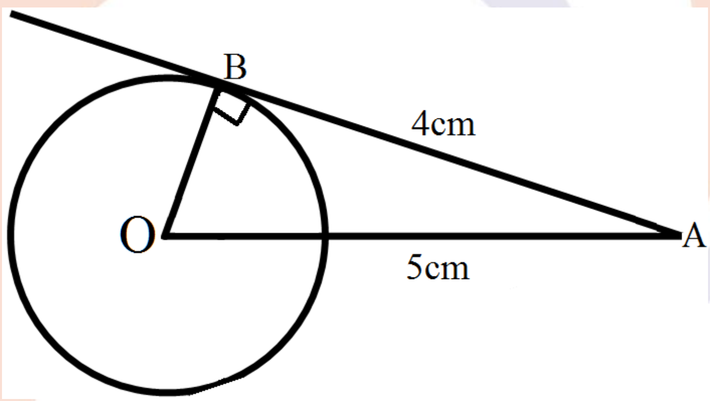
इस प्रकार, स्पर्शरिखा के संपर्क के बिंदु पर सीधा केंद्र के माध्यम से गुजरता है।

प्रश्न 6 एक बिन्दु A से जो एक वृत्त के केंद्र से 5 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- बिंदु A से केंद्र की दुरी) OA) = 5 सेमी

स्पर्श रेखा AB की लंबाई = 4 सेमी

वृत्त की त्रिज्या OB = ?



समकोण त्रिभुज AOB में, पैथागोरस प्रमेय से

$OA^2 = OB^2 + AB^2$

$5^2 = OB^2 + 4^2$

$5^2 - 4^2 = OB^2$

$25 - 16 = OB^2$

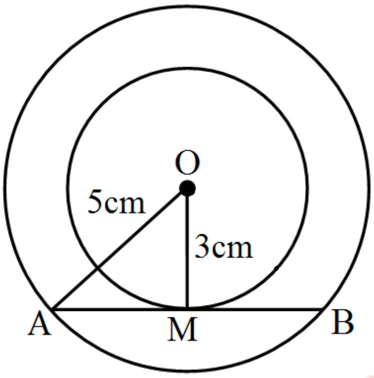
$OB^2 = 9$

$OB = \sqrt{9}$

$= 3cm$

प्रश्न 7 दो सकेंद्रिय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 सेमी तथा 3 सेमी है। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

उत्तर-



दो संकेंद्री वृत्त जिसका केंद्र O है और बड़े वृत्त की जीवा AB है जो छोटे वृत्त को बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती है।

त्रिज्याएँ क्रमश :AO = 5 सेमी और OM = 3 सेमी है।

$OM \perp AB OM \perp AB$ है। (चूँकि जीवा को केंद्र से मिलाने वाली रेखाखण्ड जीवा पर लंब होती है।(

अत :समकोण त्रिभुज AOM में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$OA^2 = OM^2 + AM^2$

$5^2 = 3^2 + AM^2$

$5^2 - 3^2 = AM^2$

$25 - 9 = AM^2$

$AM^2 = 16$

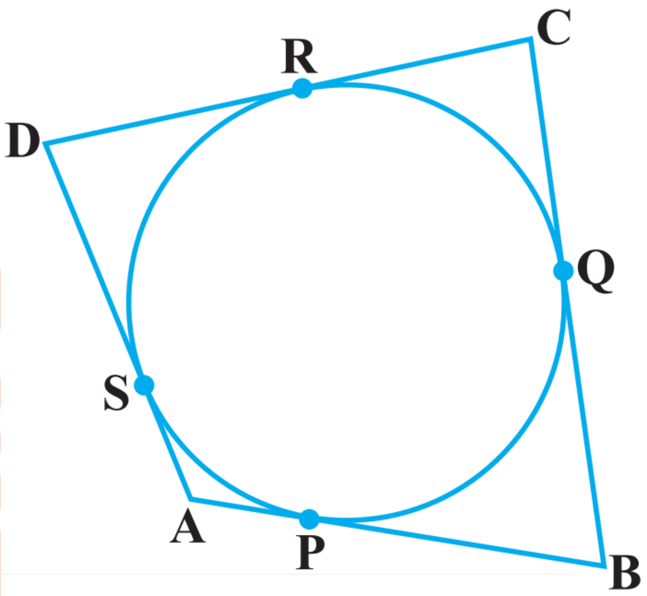
$AM = \sqrt{16} = 4cm$

अत: $AB = 2 \times AM$

$= 2 \times 4 = 8$ सेमी

जीवा की लंबाई 8 सेमी है।

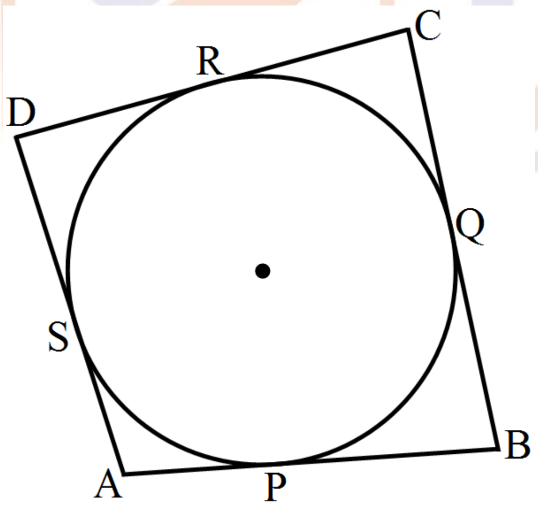
प्रश्न 8 एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भज ABCD खींचा गया है (देखिए आकृति) सिद्ध कीजिए : AB + CD = AD + BC.



उत्तर- दिया है: ABCD एक O केंद्र वाले वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है। रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमश :बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है: AB + CD = AD + BC

प्रमाण: P और S स्पर्श बिंदु हैं।



अत :AP = AS ..... (i) प्रमेय 10.2 से

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती है।

इसी प्रकार,

BP = BQ ..... (ii)

CR = CQ ....(iii)

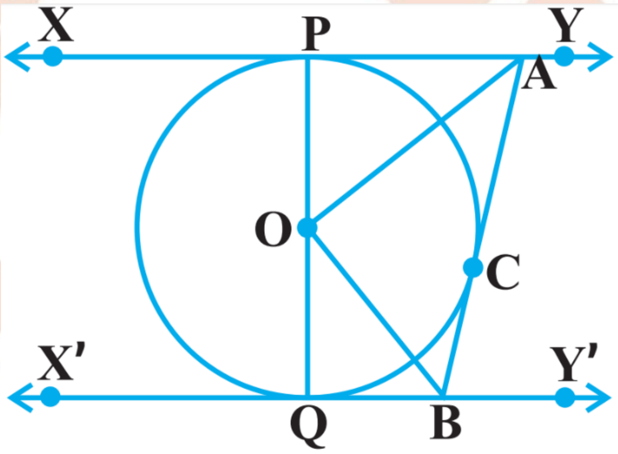
और DR = DS .... (iv)

समी०) i), (ii), (iii) और) iv) जोड़ने पर

AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ

AB + CD = AD + BC यही सिद्ध करना था।

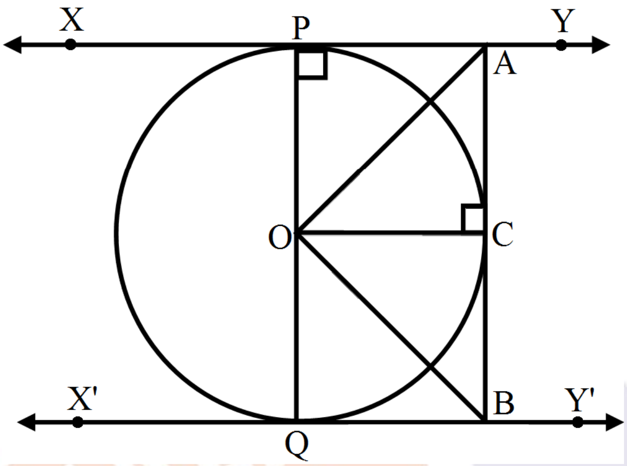
प्रश्न 9 आकृति 10.13 में XY तथा X′Y′, O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X′Y′ को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए की $\angle AOB = 90^\circ$ है।



उत्तर- दिया है: XY तथा X′Y′, O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X′Y′ को B पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है: $\angle AOB = 90^\circ$

प्रमाण:



$\triangle AOP$ और $\triangle AOC$

$PA = CA$ (भुजा) प्रमेय 10.2 से

$\angle APO = \angle ACO$ 90° प्रत्येक

$AO = AO$ उभयनिष्ठ कर्ण

RHS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOP \cong \triangle AOP$

इसलिए $\angle PAO = \angle CAO$ (i) CPCT के द्वारा

$\triangle BOQ \cong \triangle BOC$

इसलिए $\angle QBO = \angle CBO$ (ii) CPCT के द्वारा

अब $XY||X'Y'$ दिया है।

इसलिए, $\angle PAC + \angle QBC = 180^\circ$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोणों का योग)

$(\angle PAO + \angle CAO) + (\angle QBO + \angle CBO) = 180^\circ$

$(\angle CAO + \angle CAO) + (\angle CBO + \angle CBO) = 180^\circ$ (समी॰ (i) तथा (ii) के प्रयोग से)

$2\angle CAO + 2\angle CBO = 180^\circ$

$2(\angle CAO + 2\angle CBO) = 180^\circ$

$\angle CAO + \angle CBO = \frac{180^\circ}{2}$

$\angle CAO + \angle CBO = 90^\circ \ldots (i)$

अब त्रिभुज AOB में,

$\angle AOB + \angle CAO + \angle CBO = 180^\circ$

$\angle AOB + 90^\circ = 180^\circ$

$\angle AOB = 180^\circ - 90^\circ$

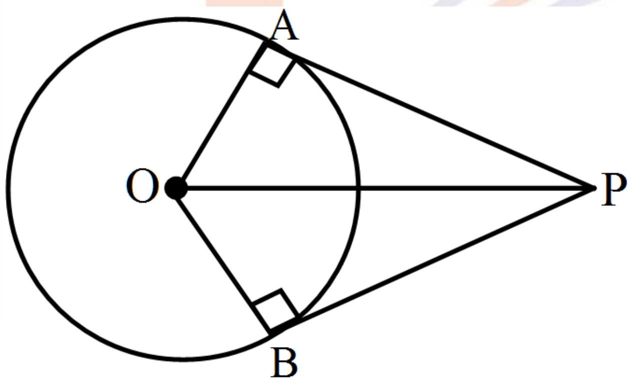
$\angle AOB = 90^\circ$ के द्वारा

प्रश्न 10 सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

उत्तर-दिया है: O केंद्र वाले वृत्त की की बाह्य बिंदु P से खिंची गई स्पर्श रेखाओं AP तथा BP है।

सिद्ध करना है: ∠AOB + ∠APB = 180°

प्रमाण:



$OA \perp AP$ और $OB \perp BP$ (चूँकि स्पर्श रेखा से केंद्र को मिलाने वाली रेखाखंड लंब होती है।)

अतः $\angle OAP = 90° \ldots\ldots (i)$

और $\angle OBP = 90° \ldots\ldots (ii)$

चूँकि APBO एक चतुर्भुज है इसलिए,

$\angle OAP + \angle AOB + \angle OBP + \angle APB = 360°$

$\Rightarrow 90° \angle AOB + 90° + \angle APB + 360°$

$\Rightarrow 180° \angle AOB + \angle APB = 360°$

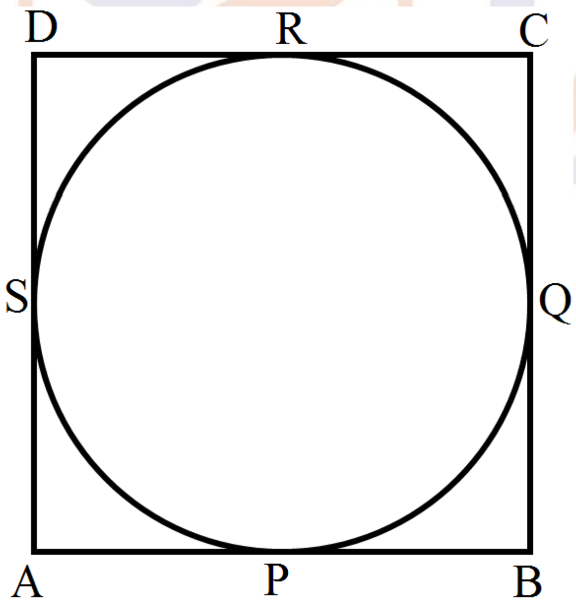
$\Rightarrow \angle AOB + \angle APB = 360° - 180°$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle APB = 180°$ के द्वारा

प्रश्न 11 सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

उत्तर- दिया है: ABCD एक O केंद्र वाले वृत्त के परिगत बना समांतर चतुर्भुज है। रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमश :बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है: ABCD एक समचतुर्भुज है।



प्रमाण: चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है इसलिए

AB = CD ......(i) (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा(

इसी प्रकार, BC = AD .....(ii)

अब, P और S स्पर्श बिंदु हैं |

अत :AP = AS .....(iii) प्रमेय से

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती है|)

इसी प्रकार,

BP = BQ ......(iv)

CR = CQ .....(v)

और DR = DS ......(vi)

समी० iii), (iv), (v) और) vi) जोड़ने पर

AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ

या AB + CD = AD + BC

या AB + AB = AD + AD समी० (i) तथा (ii) से

या 2AB = 2AD

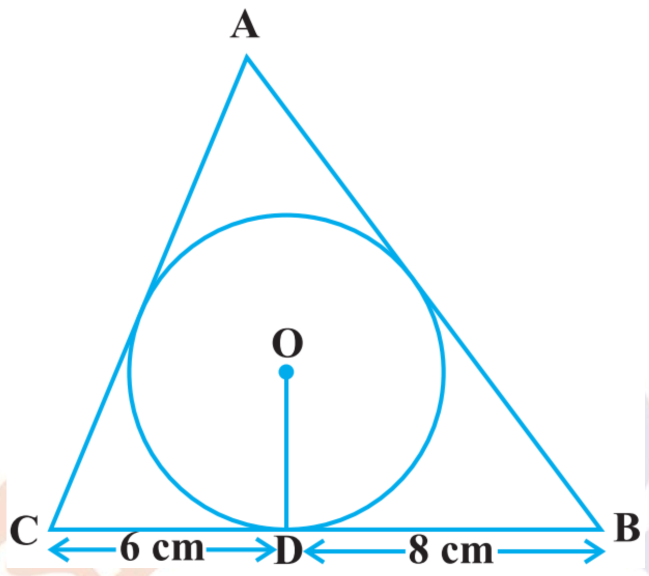
या AB = AD ......(vii)

समीकरण (i), (ii) और (vii) से

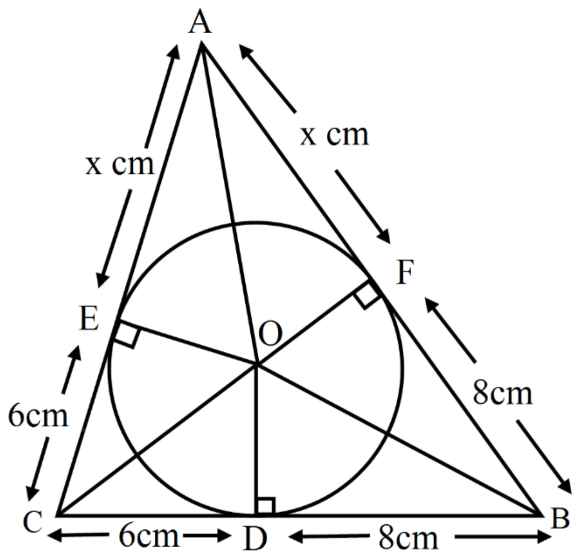
AB = BC = CD = AD

अत :ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रश्न 12 4 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है की रेखाखंड BD और DC (जिनमें स्पर्श बिन्दु D द्वारा BC विभाजित है (की लंबाई क्रमशः 8 सेमी और 6 सेमी हैं) देखिए आकृति(। भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।



उत्तर-



माना AF = AE = x सेमी (प्रमेय 10.2 से(

इसी प्रकार CD = CE = 6 सेमी

और BD = BF = 8 सेमी

अत :AB = 8 + x सेमी, BC = 8 + 6 = 14 सेमी और AC = 6 + x सेमी

OD = OF = OE = 4 सेमी (त्रिज्या(

अब त्रिभुज का क्षेत्रफल हेरॉन सूत्र से

a = 8 + x सेमी, b = 14 सेमी और c = 6 + x सेमी

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+x+14+6+x}{2} = \frac{28+2x}{2}$

$s = \frac{2(14+x)}{2} = 14 + x$

$\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{(14+x)[14+x-(8+x)][14+x-14][14+x-(6+x)}$

$= \sqrt{(14+x)[14+x-8-x[x][14+x-6-x]}$

$\sqrt{(14+x)[6][x][8]}$

$\sqrt{48x(14+x)}cm^2 \ldots\ldots (i)$

$\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= ar(AOB) + ar(BOC) + ar(AOC)$

$= \frac{1}{2} \times AB \times OF + \frac{1}{2} \times BC \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OE$

$= \frac{1}{2} \times (AB \times OF \times BC \times OD \times AC \times OE)$

$= \frac{1}{2}(8 \times x \times 4 + 14 \times 4 + 6 + x + 4)$

$= \frac{1}{2} \times 4(8 + x + 14 + 6 + x)$

$= 2(28 + 2x)cm^2 \ldots\ldots (ii)$

समीकरण (i) और (ii) से चूँकि दोनों त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल हैं।

$$\sqrt{48x(14+x)}\text{cm}^2 = 2(28+2x)\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow 48x(14+x) = [2(28+2x)]^2$$

$$\Rightarrow 48x(14+x) = [4(14+x)]^2$$

$$\Rightarrow 48x(14+x) = [4 \times 4(14+x)(4+x)]$$

$\Rightarrow 48x = 16(14+x)$ सरल करने पर

$\Rightarrow 3x = (14+x)$ सरल करने पर

$$\Rightarrow 2x = 14$$

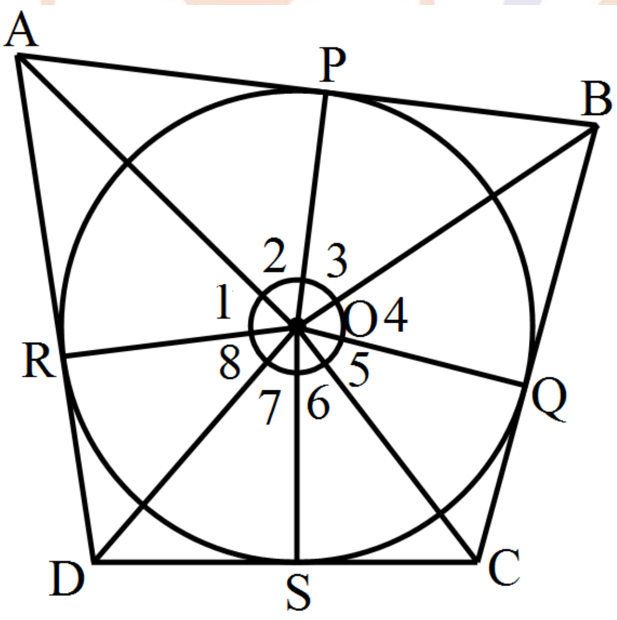
$$\Rightarrow x = 7$$

अत: भुजाएँ AB = 8 + 7 = 15 सेमी और AC = 6 + 7 = 13 सेमी

प्रश्न 13 सिद्ध कीजिए की वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने - सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।

उत्तर- दिया है: ABCD O केंद्र वाले एक वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है|

सिद्ध करना है: ∠AOB + ∠COD = 180°



प्रमाण: $\triangle AOP \cong AOR$ प्रमेय 10.2 से

$\angle 1 = \angle 2 \ldots\ldots (i)$ संगत भाग

इसी प्रकार,

$\angle 3 = \angle 4 \ldots\ldots (ii)$

$\angle 5 = \angle 6 \ldots\ldots (iii)$

$\angle 7 = \angle 8 \ldots\ldots (iv)$

अब $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$

(केंद्र पर आंतरिक कोण)

$\angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 7 = 360^\circ$

समीकरण (i) (ii) (iii) और (iv) के प्रयोग से

$2\angle 2 + 2\angle 3 + 2\angle 6 + 2\angle 7 = 360^\circ$

$2(\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = 360^\circ$

$(\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = \frac{360^\circ}{2}$

$\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ यह सिद्ध हुआ है।

रचनाएं

ज्यामितीय आकृतियों के निर्माण तथा उनसे सम्बन्धित नियमों का अध्ययन इस अध्याय के अंतर्गत विस्तार से समझाया गया है।

रेखाखंड का विभाजन

मान लीजिए कि एक रेखाखंड दिया है और आपको उसे एक दिए गए अनुपात, माना 3 : 2 में विभाजित करना है। आप इसकी लंबाई माप कर तथा दिए गए अनुपात के अनुसार एक बिंदु चिह्नित कर सकते हैं। परंतु यदि आपके पास इसे सही-सही मापने की कोई विधि न हो, तो आप इस बिंदु को कैसे प्राप्त करेंगे? इस प्रकार के बिंदु को प्राप्त करने के लिए, कई विधियाँ हैं।

एक रेखाखंड AB दिया है, हम इसको m : n के अनुपात में विभाजित करना चाहते हैं। प्रक्रिया को समझने में सहायता करने के लिए, हम m = 3 और n = 2 लेंगे।

रचना के चरणः

1. AB से न्यूनकोण बनाती कोई किरण AX खींचिए।
2. AX पर 5 (= m + n) बिंदु A_1, A_2, A_3, A_4 और A_5 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ हो।
3. BA_5 को मिलाइए।
4. बिंदु A_3 (m = 3) से होकर जाने वाली A_5B के समांतर एक रेखा (A_3 पर $\angle AA_5B$ के बराबर कोण बनाकर) AB को एक बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।

तब, AC : CB = 3 : 2 है।

यह विधि कैसे हमें अभीष्ट विभाजन देती है।

क्योंकि A_3C, A_5B के समांतर है,

अतः $AA_3/A_3A_5 = AC/CB$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

रचना से, $AA_3/A_3A = 3/2$ है।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि बिंदु C, AB को 3 : 2 अनुपात में विभाजित करता है।

एक दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की 5/3 हों (अर्थात् स्केल गुणक 5/3 है)।

एक त्रिभुज ABC दिया गया है। हमें एक त्रिभुज की रचना करनी है, जिसकी भुजाएँ Δ ABC की संगत भुजाओं की 5/3 हों।

रचना के चरणः

1. BC से शीर्ष A के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।

2. 5 (5/3 में 5 और 3 में से बड़ी संख्या) बिंदु B_1, B_2, B_3, B_4 और B_5, BX पर इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3 = B_4B_5$ हो।

3. B_3 (तीसरा बिंदु, 5/3 में 5 और 3 में से छोटी संख्या) को C से मिलाइए और B_5 से होकर जाने वाली B_3C के समांतर एक रेखा, बढ़ाए गए रेखाखंड BC को C′ पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।

4. C′ से होकर जाने वाली CA के समांतर एक रेखा, बढ़ाने पर रेखाखंड BA को A′ पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।

तब, A′BC′ अभीष्ट त्रिभुज है।

रचना के औचित्य सिद्ध करने के लिए, ध्यान दीजिए

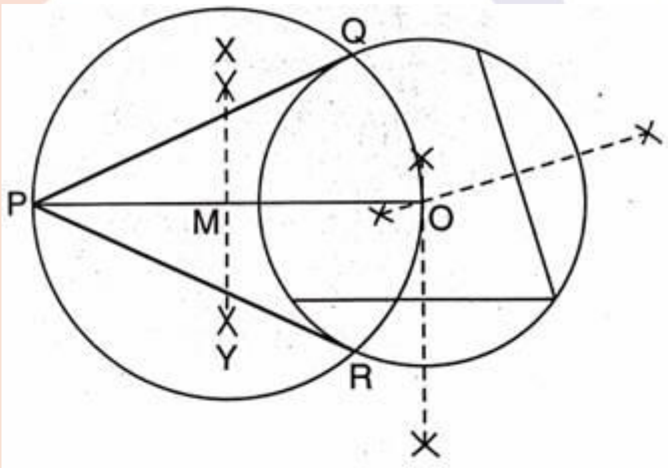
Δ ABC ~ Δ A′BC′ (कोण कोण कोण नियम से)

इसलिए, AB/A′B = AC/A′C′ = BC/BC′ है।

परंतु BC/BC′ = BB_3/BB_5 = 3/5 है।

इसलिए, BC′/BC = 5/3 है और इसीलिए A′B/AB = A′C′/AC = BC′/BC = 5/3 है।

किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना



यदि कोई बिंदु वृत्त के अंदर स्थित है, तो इस बिंदु से जाने वाली वृत्त की कोई स्पर्श रेखा नहीं हो सकती है। परंतु यदि बिंदु वृत्त पर स्थित है, तो उस बिंदु पर वृत्त की एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है, जो उस बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है। अतः यदि आप वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचना चाहते हैं, तो केवल उस बिंदु से जाने वाली त्रिज्या खींचिए और उसी बिंदु पर इसकी लंब रेखा खींचिए। तब, यही अभीष्ट स्पर्श रेखा होगी। आपने यह भी देखा है कि यदि बिंदु वृत्त के बाहर स्थित है, तो इस बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ होती हैं।

1. हमें एक वृत्त जिसका केंद्र O है तथा इसके बाहर एक बिंदु P दिए हुए हैं। हमें P से वृत्त पर दोनों स्पर्श रेखाएँ खींचनी हैं।

रचना के चरण

1. PO को मिलाइए और इसे समद्विभाजित करिए।

माना PO का मध्य बिंदु M है।

2. M को केंद्र मान कर तथा MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए। माना यह दिए गए वृत्त को Q और R पर प्रतिच्छेद करता है।

3. P को Q तथा R से मिलाइये।

तब, PQ और PR अभीष्ट दो स्पर्श रेखाएँ है।

आइए अब देखें कि इस रचना से हमें स्पर्श रेखाएँ किस प्रकार मिलती हैं। OQ को मिलाइए।

तब, $\angle PQO$ अर्धवृत्त में बना एक कोण है और इसीलिए $\angle PQO = 90^\circ$ है।

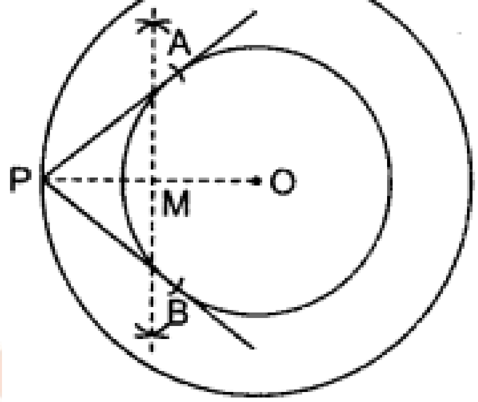
यहाँ हम कह सकते हैं कि $PQ \perp OQ$ है,

क्योंकि, OQ दिए वृत्त की त्रिज्या है, इसलिए PQ वृत्त की स्पर्श रेखा ही होगी। इसी प्रकार, PR भी वृत्त की स्पर्श रेखा है।

ध्यान देने योग्य बातें

यदि वृत्त का केंद्र नहीं दिया है, तो आप कोई दो असमांतर जीवाएँ लेकर तथा उनके लंब समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिंदु के रूप में केंद्र ज्ञात कर सकते हैं। इसके बाद, आप उपर्युक्त रूप से आगे बढ़ सकते हैं।

- **किसी रेखाखंड (line segment) को दिए गए अनुपात(2:5) में विभाजित करना : -**
  - पहले दी गई रेखा (AB) से न्यूनकोण (acute angle) बनाती हुई एक रेखा (AX) खींचो जिसकी लम्बाई दोनों अनुपातों के योग(2 + 5 = 7)के बराबर होनी चाहिए।
  - खींची गई रेखा(AX) पर दोनों अनुपातों के योग (7) के बराबर बिंदु अंकित करो(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7) समान दूरियों पर (equidistant)।
  - खींची गई रेखा के अंतिम बिंदु (A7) को दी गई रेखा के बिंदु (B) से मिलाकर एक अन्य रेखा (BA7) खींचो।
  - दिए गए अनुपात (ratio) में से पहले अनुपात (2 = A2) से अन्य रेखा (BA7) के समांतर (parallel) एक रेखा खींचो और दी गई रेखा(AB) पर कोई बिंदु(C) अंकित करो।
  - दी गई रेखा अभीष्ट अनुपात में विभाजित हो गई है। (AB:BC = 2:5)



- **किसी रेखाखंड को दिए गए अनुपात (2:5) में विभाजित करना (वैकल्पिक विधि द्वारा)**
    - दिए गए रेखाखंड (AB) से न्यूनकोण (<BAX) बनाती हुई एक रेखा (AX) और दूसरा न्यूनकोण (<ABY) बनाती हुई अन्य रेखा (BY) खींचो।
    - पहले रेखाखंड (AX) पर पहले अनुपात (2) के बराबर, समान दूरियों पर बिंदु (A1, A2) अंकित करो।
    - दूसरे रेखाखंड (BY) पर दूसरे अनुपात (5) के बराबर, समान दूरियों पर बिंदु (B1, B2, B3, B4, B5) अंकित करो।
    - पहले रेखाखंड (AX) और दूसरे रेखाखंड (BY) के अंतिम बिंदुओं (A2 और B5) को मिलाओ।
    - रेखाखंड (A2B5) और दिए गए रेखाखंड (AB) के प्रतिच्छेद बिंदु (intersecting point) को (C) अंकित करो।
    - दी गई रेखा अभीष्ट अनुपात में विभाजित हो गई है। (AB:BC = 2:5)

- **स्केल गुणक (scale factor) -** दिए गए त्रिभुज और जिस त्रिभुज की रचना की जानी है उसकी भुजाओं (sides) के अनुपात को स्केल गुणक कहते हैं।

- **स्केल गुणक (2/3) के अनुसार दिए गए त्रिभुज (ABC) के समरूप (similar) त्रिभुज की रचना करना : -**
    - दिए गए त्रिभुज के आधार (base) (BC) से शीर्ष (vertice) (A) के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण (ray) (BX) खींचो।
    - किरण (BX) पर 3 बिंदु (2/3 में 3 बड़ा है) समान दूरियों पर अंकित करो B1, B2, B3
    - किरण के अंतिम बिंदु (B3) को आधार (BC) से मिलाकर रेखा (B3C) खींचो फिर रेखा (B3C) के समांतर बिंदु (B2) से (2/3 में 2 छोटा) एक रेखा (B2C') खींचो।
    - बिंदु (C') से रेखा (CA) के समांतर एक रेखा (C'A') खींचो।
    - Δ A'BC' ~ Δ ABC

- वृत्त (circle) के बाहर स्थित किसी बिंदु (L) से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं (tangent line) की रचना करना : -

- दिए गए बिंदु (L) को वृत्त के केंद्र (O) से मिलाओ और OL को समद्विभाजित (bisect) करो।
- OL के मध्य बिंदु (midpoint) (S) को केंद्र (center) और OS को त्रिज्या (radius) मानकर एक अन्य वृत्त की रचना (construction) करो और प्रतिच्छेद बिंदुओं के नाम लिखो (P और Q)
- दिए गए बिंदु (L) को बिंदुओं (P और Q) से मिलाओ।
- LP और LQ अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

Example:

7.6 cm लंबा एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5: 8 अनुपात में विभाजित कीजिए | दोनों को मापिए

हल: रचना के पद

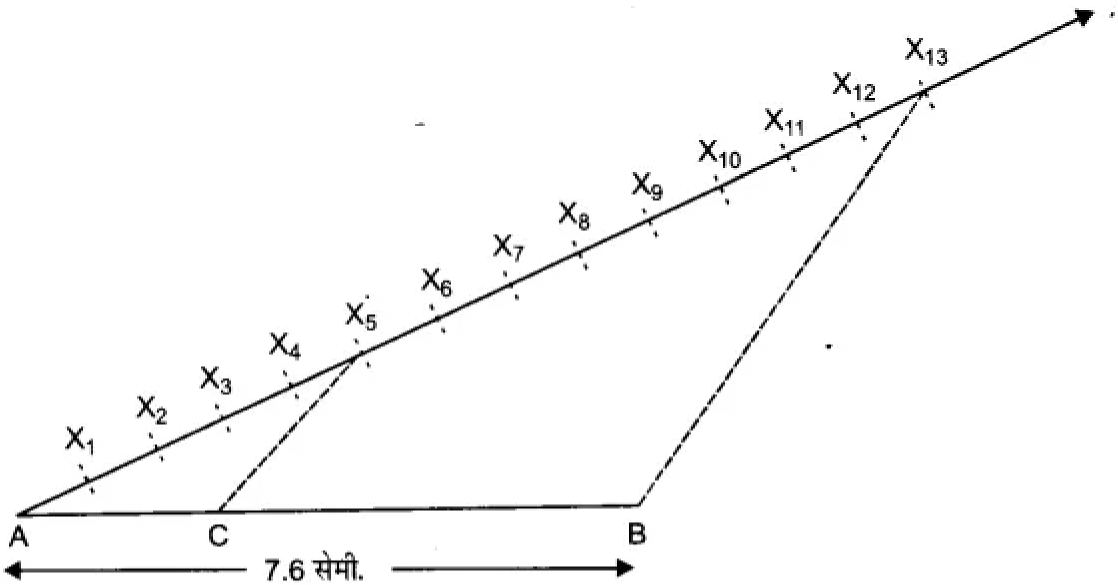
I. एक रेखाखंड AB = 7.6 सेमी खींचो।

II. एक किरण AX खींचो जो AB के साथ एक न्यून कोण बनाए।

III. किरण AX पर (8 + 5) = 13 समान खंड काटो और उन्हें $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_{13}$ से अंकित करो।

IV. X_{13} को B से मिलाओ।

V. X_5 से $X_6C \parallel X_{13}B$ खींचो जो AB को C पर मिले।



इस प्रकार बिन्दु C रेखाखंड AB को 5 : 8 अनुपात में विभाजित करता है।

दोनों रेखाखंडों को मापने पर, हमें प्राप्त होता है AC = 4.7 सेमी., BC = 2.9 सेमी

इस प्रकार बिन्दु C रेखाखंड AB को 5 : 8 अनुपात में विभाजित करता है।
दोनों रेखाखंडों को मापने पर, हमें प्राप्त होता है AC = 4.7 सेमी., BC = 2.9 सेमी

सत्यापन: ΔABX_{13} और ΔACX_5 में हमें प्राप्त होता है:

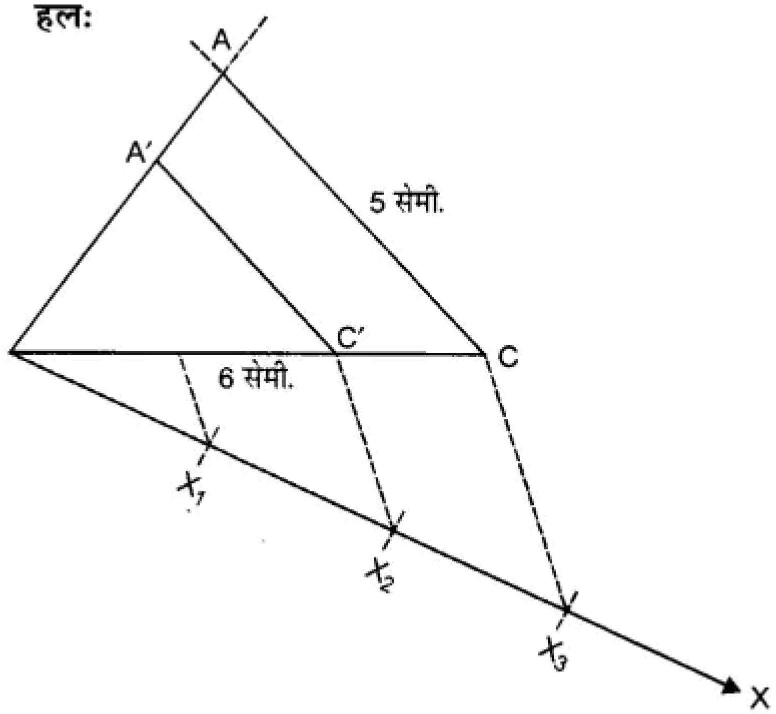
$$C_5 \parallel B_{13}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{CB} = \frac{A_5}{X_5X_{13}} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \quad AC : CB = 5 : 8.$$

4cm, 5cm और 6cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 2/3 गुनी हों |

हल:



रचना के पद

I. एक ΔABC की रचना इस प्रकार करो कि BC = 6 सेमी, AC = 5 सेमी और AB = 4 समी है।

II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की $\angle CBX$ एक न्यून कोण हो।

III. BX पर तीन बिन्दु X_1, X_2, और X_3 इस प्रकार अंकित करो कि

$BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3$

IV. X_3 और C को मिलाओ।

V. X_2 से एक रेखा X_3C के समान्तर खींचो जो BC को C पर काटे।

VI. C से एक रेखा CA के समान्तर खींचो जो BA को A' पर मिले।

इस प्रकार अभिष्ठ त्रिभुज ABC' है।

सत्यापनः रचना से हमें प्राप्त होता है किः

$$X_3C \parallel X_2C' \Rightarrow \frac{BX_2}{X_2X_3} = \frac{BC'}{C'C}$$

$$\text{परन्तु} \quad \frac{BX_2}{X_2X_3} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{BC'}{C'C} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C'C}{BC'} = \frac{1}{2}$$

दोनों ओर 1 जोड़ने पर

$$\frac{C'C}{BC'} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C'C + BC'}{BC'} = \frac{1+2}{2} \Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{3}{2}$$

अब, $\Delta BC'A'$ और ΔBCA में,

$$CA \parallel C'A'$$

AA समरूपता से, हमें प्राप्त होता है:

$$\Delta BC'A' \sim \Delta BCA$$

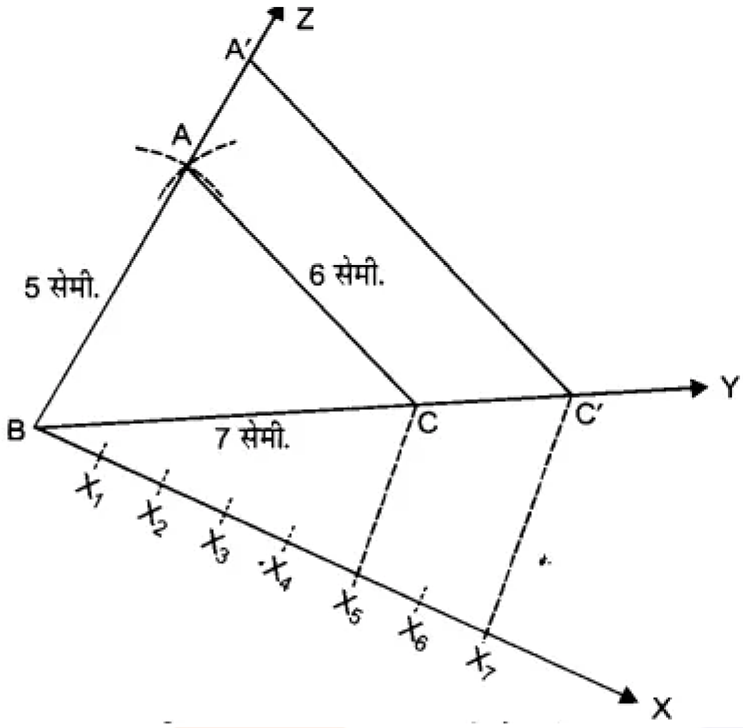
$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \quad \left[\text{प्रत्येक} = \frac{2}{3}\right]$$

5 cm, 6cm और 7cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 7/5 गुनी हो|

हलः

रचना के पद

I. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी., BC = 7 सेमी. और AC = 6 सेमी. है।



II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की ∠CBX एक न्यून कोण हो।

III. BX पर 7 बिन्दु $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_7$ अंकित करो।

IV. X_5 और C को मिलाओ।

V. बिन्दु X_7 से $X_5C \parallel X_7C'$ खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।

VI. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर काटे।

इस प्रकार ΔABC अभीष्ठ त्रिभुज है।

सत्यापनः रचना से, हमें प्राप्त होता है कि

C'A' || CA

AA' समरूपता से हमें प्राप्त होता है:

ΔABC ~ ΔA'B'C'

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \text{ तथा } X_7C' \parallel X_5C$$

[रचना द्वारा]

$$\therefore \quad \Delta BX_7C' \sim \Delta BX_5C \Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{BX_5}{BX_7}$$

$$\therefore \quad \frac{BX_5}{BX_7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7} \text{ or } \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}.$$

आधार 8cm तथा ऊँचाई 4cm के एक समद्विबाहू त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहू त्रिभुज की संगत भुजाओं की 1,1/2 गुनी हों|

हलः

रचना के पद

I. BC = 8 सेमी खींचो।

II. BC का लम्ब समद्विभाजक खींचो जो BC को D पर काटे।

III. उक्त लम्ब पर एक बिन्दु A इस प्रकार अंकित करो कि DA = 4 सेमी.

IV. AB और AC को मिलाओ। इस प्रकार ΔABC वांछित समद्विबाहु A है।

V. अब, एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠X एक न्यून कोण हो।

VI. BX पर तीन बिन्दु X_1, X_2, X_3 इस प्रकार
अंकित करो किः

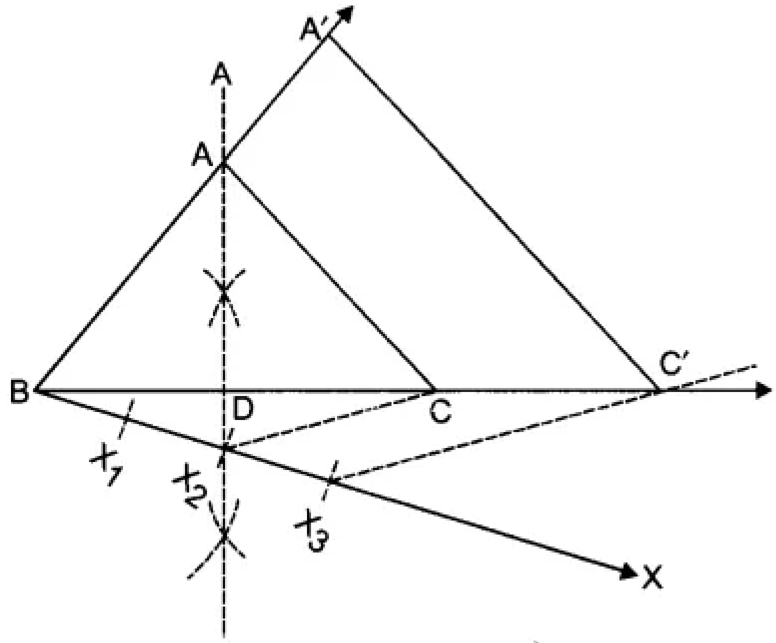
$BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3$

VII. X_2 और C को मिलाओ।

VIII. X_3 से एक रेखा B2C के समान्तर खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।

IX. C' से एक रेखा CA के समान्तर खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर काटे।

इस प्रकार ΔA'B'C' अभीष्ठ त्रिभुज है।



सत्यापन: हमें प्राप्त है कि:

$C'A' \parallel CA$ [रचना से]

$\therefore$ AA समरूपता से, $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC'}$$

चूँकि, $X_3C' \mid X_2C$ [रचना से]

$$\Rightarrow \quad \Delta BX_3C' \sim \Delta BX_2C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_3}{BX_2} \quad \text{[By BTP]}$$

परन्तु $\dfrac{BX_3}{BX_2} = \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2}$$

इस प्रकार, $\dfrac{A'B}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{BC'}{BC} = \dfrac{3}{2}.$

एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें BC = 6 cm, AB = 5 cm और angle = 60o हो | फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की 3/4 गुनी हों|

हल:

रचना के पद

I. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार करो कि: BC = 6 सेमी, AB = 5 सेमी और $\angle ABC = 60°$.

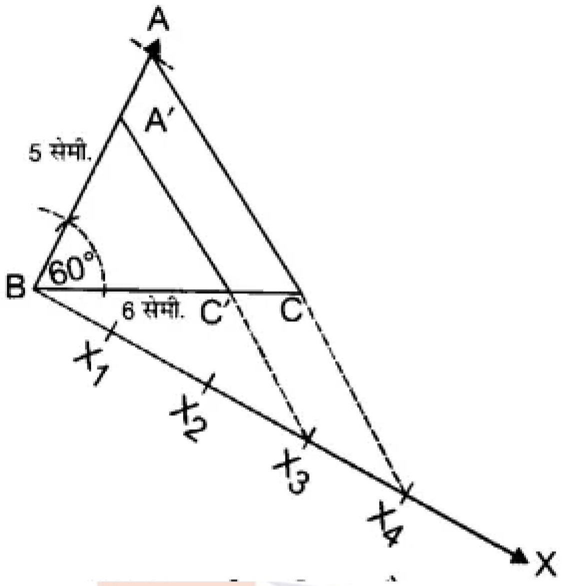
II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि $\angle CBX$ एक न्यून कोण हो।

III. BX पर चार बिन्दु X_1, X_2, X_3 और X_4 इस प्रकार अंकित करो कि $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4$

IV. X_4C को मिलाओ।

V. $X_3C' \parallel X_4C$ खींचो जो कि BC को C' पर काटे।

VI. एक अन्य रेखा C' से CA के समान्तर खींचो जो BA को A' पर काटे।



इस प्रकार $\Delta A'BC'$ अभीष्ठ त्रिभुज है।

सत्यापन: रचना से हमें प्राप्त है कि:

$$X_4C \parallel X_3C' \qquad \textbf{[BPT प्रमेय से]}$$

$$\therefore \quad \frac{BX_3}{BX_4} = \frac{BC'}{BC} \quad \text{परन्तु} \quad \frac{BX_3}{BX_4} = \frac{3}{4}$$

[रचना से]

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4} \qquad ...(1)$$

अब, हमें प्राप्त है कि:

$$CA \parallel C'A' \qquad \text{[रचना से]}$$

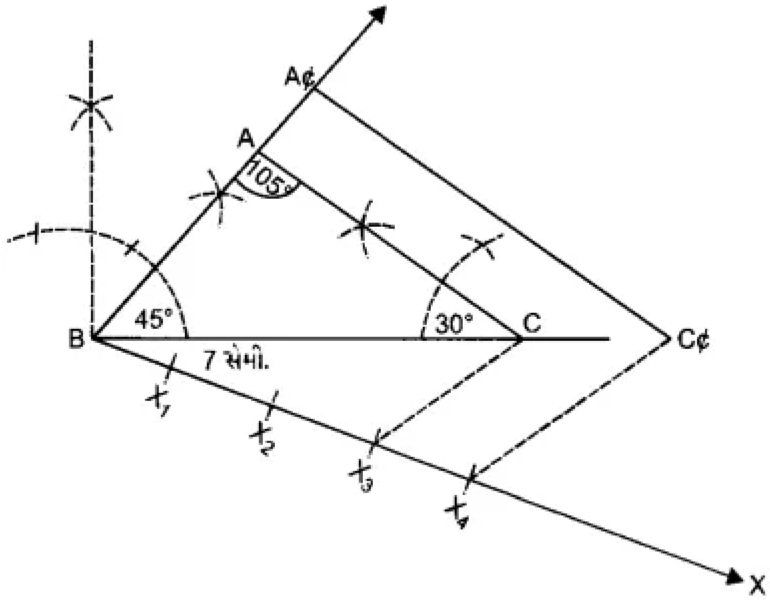
$$\therefore \quad \Delta BC'A' \sim \Delta BCA \qquad \textbf{[AA समरूपता से]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}. \qquad \textbf{[(1) से]}$$

एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें BC = 7 cm, angle B = 45° , angle A = 105° हो| फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की 4/3 गुनी हों |

हल:

रचना के पद



I. एक ΔABC की रचना इस प्रकार करो कि BC = 7 सेमी, ∠B = 45° और ∠A = 105° हो।

II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠CBX एक न्यून कोण हो।

III. BX पर चार बिन्दु X_1, X_2, X_3 और X_4 इस प्रकार अंकित करो कि:

$BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4$ हो।

IV. X_3 और C को मिलाओ।

V. $X_4C' \parallel X_3C$ इस प्रकार खींचो कि C', BC (बढ़ाने पर) को मिले।

VI. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर मिले।

इस प्रकार ΔABC अभीष्ठ त्रिभुज है।

सत्यापन: रचना से हमें प्राप्त है कि:

$C'A' \parallel CA$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ [**AA समरूपता से**]

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \qquad ...(1)$$

पुनः रचना से,

$X_4C' \parallel X_3C$

$\therefore \quad \Delta BX_4C' \sim \Delta BX_3C$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_4}{BX_3}$$

परन्तु $\quad \dfrac{BX_4}{BX_3} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{BC'}{BC} = \dfrac{4}{3} \qquad ...(2)$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त है कि:

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{4}{3}$$

एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) 4 cm तथा 3 cm लंबाई की हों | फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 5/3 गुनी हों |

हलः रचना के पद

I. एक ΔABC की रचना इस प्रकार करो कि $\angle B = 90°$, $BC = 4$ सेमी और $BA = 3$ सेमी हो।

II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि $\angle CBX$ एक न्यून कोण हो।

III. BX पर पाँच बिन्दु X_1, X_2, X_3, X_4 और X_5

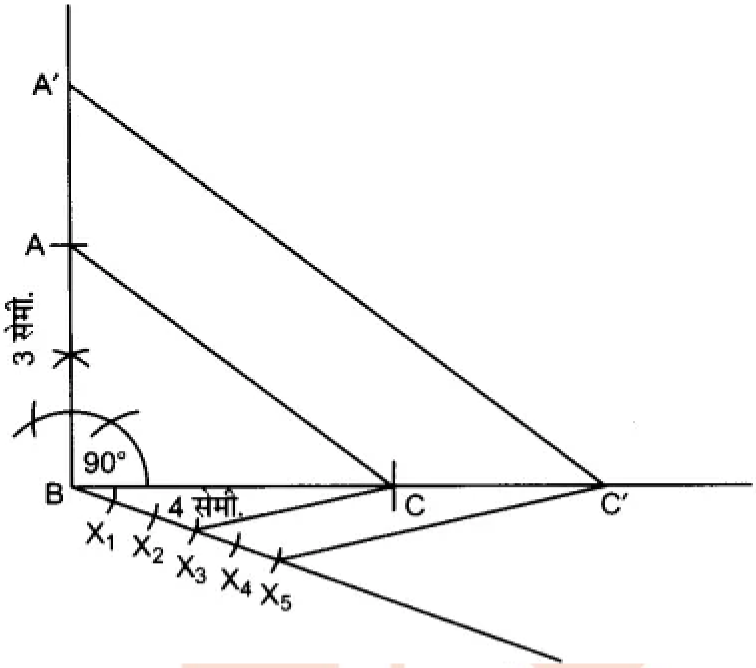
इस प्रकार खींचो कि: $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4 = X_4X_5$ हो।

IV. X_3 और C को मिलाओ।

V. X_5 से X_3C के समान्तर एक रेखा खींचो जो BC को बढ़ाने पर C' पर काटे।

VI. एक अन्य रेखा C' से CA के समान्तर खींचो जो BA को बढ़ाने पर A' पर मिले।।

इस प्रकार $\Delta A'B'C'$ अभीष्ट त्रिभुज है।



सत्यापन: रचना से, हमें प्राप्त है कि:

$C'A' \parallel CA$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ **[AA समरूपता से]**

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C}{AC} = \frac{BC'}{BC} \qquad ...(1)$$

पुन: $X_5C' \parallel X_3C$ [रचना से]

$\therefore \quad \Delta BX_5C' \sim \Delta BX_3C$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_5}{BX_3}$$

परन्तु $\dfrac{BX_5}{BX_3} = \dfrac{5}{3}$ ...(2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$$

6 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए | केंद्र से 10 cm दूरी स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लंबाइयाँ मापिए |

हलः

रचना के पद

I. एक बिन्दु 0 अंकित करो।

II. केन्द्र O और त्रिज्या 6 सेमी से एक वृत्त खींचो।

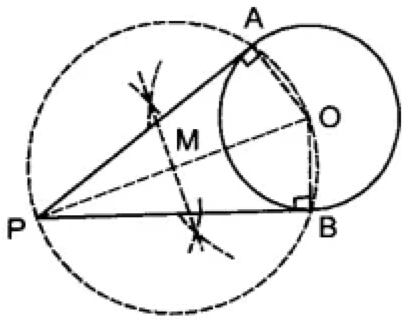
III. केन्द्र से 10 सेमी की दूरी पर एक बिन्दु P अंकित करो।

IV. O और P को मिलाओ।

V. OP को M पर समद्विभाजित करो।

VI. बिन्दु M को केन्द्र लेकर MO या MP के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।

VII. PA और PB को मिलाओ। इस प्रकार, PA और PB दो अभिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर, PA = PB = 9.6 सेमी.



सत्यापनः OA और OB को मिलाओ चूँकि OP एक व्यास है।

$\angle OAP = 90°$; $\angle OBP = 90°$ [अर्धवृत्त में बने कोण]

पुनः OA और OB एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

PA और PB वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ है।

4 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर 6 cm त्रिज्या के एक सकेंद्रीय वृत्त के किसी बिन्दु से एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए और उसकी लंबाई मापिए | परिकलन से इस माप की जाँच भी कीजिए |

हलः

रचना के पद

I. 4 सेमी और 6 सेमी त्रिज्या के दो वृत्त एक ही केन्द्र O से खींचो।

II. बड़े वृत्त पर एक बिन्दु P अंकित करो।

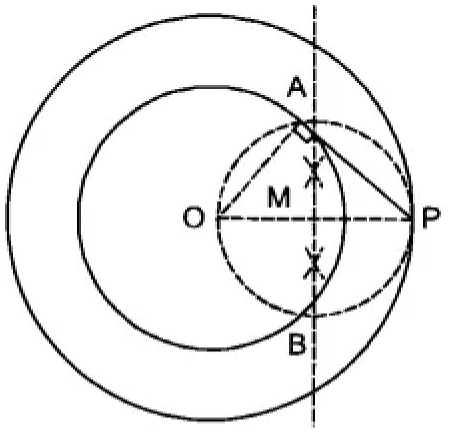
III. O और P को मिलाओ।

IV. OP का लम्ब समद्विभाजक M ज्ञात करो।

V. Mको केन्द्र और OM या PM के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो छोटे वृत्त को A और B पर काटे।

VI. A और P को मिलाइए।

इस प्रकार PA अभीष्ठ स्पर्श रेखा है। मापने पर, PA = 4.5 सेमी



सत्यापनः O और A को मिलाओ।

$\angle PAO = 90°$ [अर्धवृत्त में बना कोण]

$PA \perp OA$

OA, छोटे वृत्त की त्रिज्या है।

छोटे वृत्त पर PA एक स्पर्श रेखा है।

3 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए | इसके किसी भी बढाए गए व्यास पर केंद्र से 7 cm की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए | इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए |

हलः

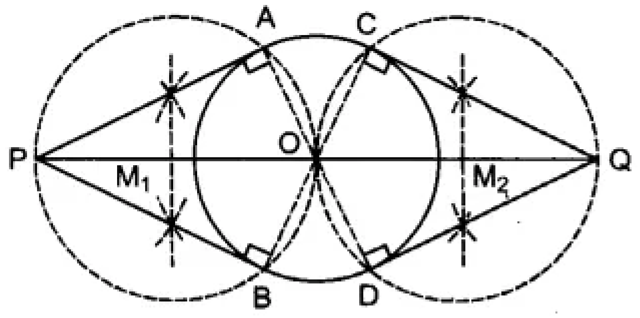
रचना के पद

I. केन्द्र O और त्रिज्या 3 सेमी का एक वृत्त खींचो।

II. उक्त वृत्त के व्यास को बढ़ाकर, इस पर दो बिन्दु P और 9 इस प्रकार अंकित कीजिए किः

OP = OQ = 7 सेमी

III. OP और OQ के मध्य बिन्दु क्रमशः M1 और M2 ज्ञात कीजिए।



IV. M_1 को केन्द्र व M_1P को त्रिज्या मानकर एक वृत्त खींचो जो वृत्त को A और B पर काटे।

V. PA और PB को मिलाओ। PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

VI. अब OQ के मध्य बिन्दु M_2 और M_2O के समान त्रिज्या लेकर वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को C और D पर काटे।

VII. OC और OD को मिलाओ। इस प्रकार OQ और QD अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

सत्यापनः OA को मिलाओ।

$\angle OAP = 90°$

$PA \perp OA$

PA एक स्पर्श रेखा है।

इस प्रकार, $PB \perp OA$

PB एक स्पर्श रेखा है।

अब, OC को मिलाने पर

$\angle OCQ = 90°$

$QC \perp OC$

QC एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, $QD \perp OC$ = QD एक स्पर्श रेखा है।

5 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो पार्ष रेखाएँ खींचिए, जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हों |

हलः

रचना के पद

I. केन्द्र O और त्रिज्या = 5 सेमी से दिये गये वृत्त की रचना करो।

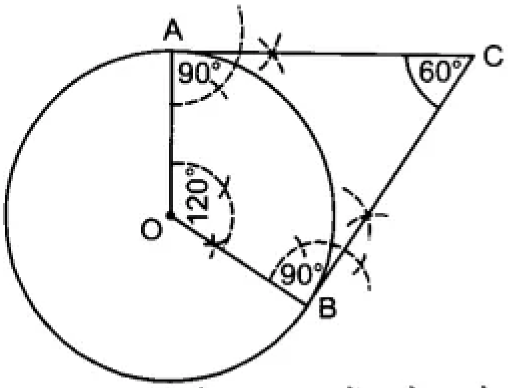
II. $\angle AOB = 120°$ बनाओ।

III. बिन्दु A से OA पर एक लम्ब खींचो।

IV. B से एक लम्ब OB पर खींचो।

V. उक्त लम्बों को C पर मिलने दो।

इस प्रकार CA तथा CB वृत्त की अभीष्ठ स्पर्श रेखाएँ है, जो परस्पर 60° पर झुकी हुई हैं।



सत्यापनः चतुर्भुज OACB में, कोण-योग-गुण से

$120° + 90° + 90° + \angle ACB = 360°$

$\Rightarrow 300° + \angle ACB = 360°$

$\Rightarrow \angle ACB = 360° - 300° = 60°$

8 cm लंबा एक रेखाखंड AB खींचिए | A को केंद्र मान कर 4 cm त्रिज्या का एक वृत्त तथा B को केंद्र लेकर 3 cm त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचिए | प्रत्येक वृत्त पर दूसरे वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए |

हल:

रचना के पद

I. A और B को मिलाओ।

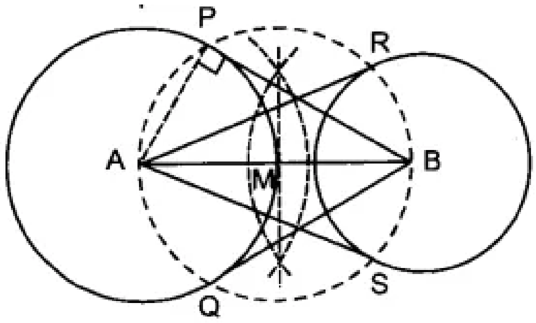
II. AB का लम्बसमद्विभाजक ज्ञात करो। माना AB का मध्य बिन्दु M है।

III. केन्द्र M और त्रिज्या = MA या MB लेकर एक वृत्त खींचो जो केन्द्र A वाले वृत्त को P और Q पर काटे, तथा केन्द्र B वाले वृत्त को R और S पर काटे।

IV. BP और BQ को मिलाओ। इस प्रकार, BP तथा BQ केन्द्र A वाले वृत्त पर B से अभीष्ठ स्पर्श रेखाएँ है।

V. अब, RA और SA को मिलाओ।

इस प्रकार, केन्द्र B वाले वृत्त पर A से स्पर्श रेखाएँ RA तथा SA हैं।



सत्यापनः A और P को मिलाने पर,

$\angle APB = 90°$

$BP \perp AP$

परन्तु AP, केन्द्र A वाले वृत्त की त्रिज्या है।

केन्द्र A वाले वृत्त पर AP एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, BQ भी केन्द्र A वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है। केन्द्र B वाले वृत्त पर भी उक्त प्रकार से AR और AS स्पर्श रेखाएँ हैं।

माना ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = 6 cm, BC cm तथा angle =B = 90° है | B से AC पर BD लंब है | बिन्दुओं B,C,D से होकर जाने वाला एक वृत्त खींचा गया है | A से इस वृत्त प[पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए |

हलः रचना के पद

I. AB = 6 सेमी, BC = 8 सेमी तथा ∠B = 90° मापों से ΔABC की रचना करो।

II. BD ⊥ AC खींचो।

III. B, C और D से होकर एक वृत्त खींचो।

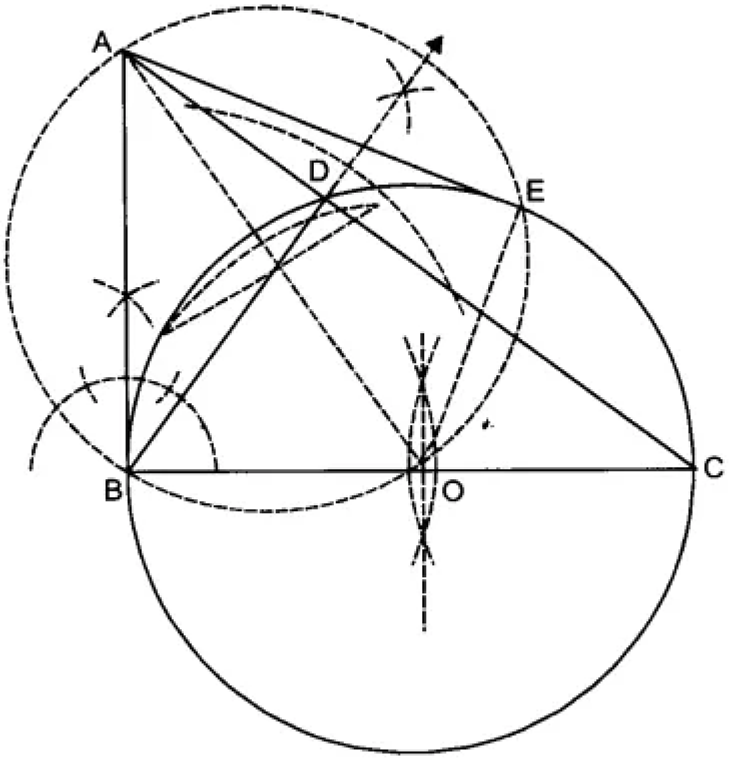
IV. AO को मिलाओ।

V. AO को M पर समद्विभाजित करो।

VI. केन्द्र M और त्रिज्या MA लेकर एक वृत्त खींचो जो दिये गये वृत्त को B और E पर काटता है।

VII. AB और AE को मिलाओ।

इस प्रकार बिन्दु A से दिए गये वृत्त पर AB और AE स्पर्श रेखाएँ हैं।



सत्यापनः OE को मिलाने पर,

∠AEO = 90° [अर्धवृत्त में बनी कोण]

AE ⊥ OE

परन्तु OE, दिए गये वृत्त की एक त्रिज्या है।

AE वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, AB भी दिए गये वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

किसी चूड़ी की सहायता से एक वृत्त खींचिए | वृत्त के बाहर एक बिन्दुओं लीजिए | इस बबिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए |

हलः रचना के पद

I. चूड़ी की सहायता से दिए गये वृत्त की रचना करो।

II. दिए गये वृत्त में दो असमान्तर जीवाएँ PQ और RS खींचो।

III. P और RS के लम्बसमद्विभाजक खींचो जो परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करे। इस प्रकार बिन्दु O दिए गये वृत्त का केन्द्र है।

IV. दिए गये वृत्त के बाहर एक बिन्दु P लो।

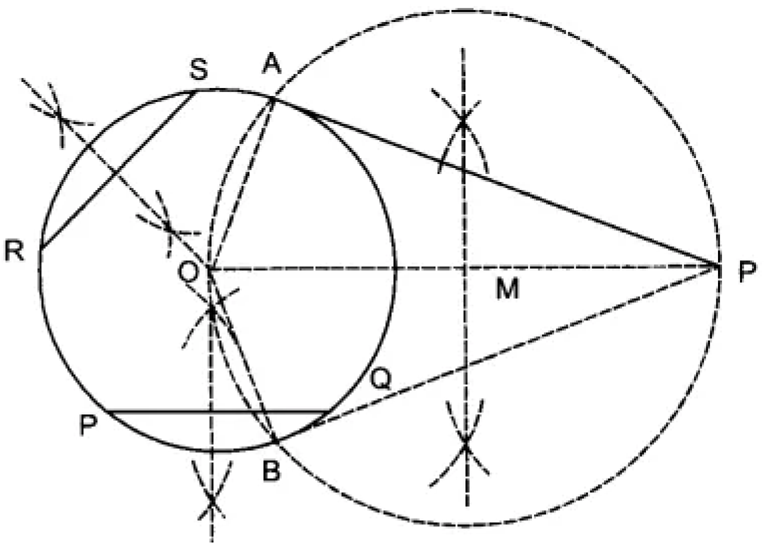
V. OP को मिलाओ।

VI. OP का मध्य बिन्दु M अंकित करो।

VII. केन्द्र M और त्रिज्या-OM से एक वृत्त खींचो, जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।।

VIII. PA और PB को मिलाओ।

इस प्रकार PA और PB स्पर्श रेखाएँ हैं।



सत्यापनः OA और OB को मिलाने पर,

$\angle OAP = 90°$, $\angle OBP = 90°$ [अर्धवृत्त में बने कोण]

$PA \perp OA$ तथा $PB \perp OB$

PA, दिए गये वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है तथा PB, दिए गये वृत्त पर दूसरी स्पर्श रेखा है।

NCERT SOLUTIONS
प्रश्नावली 11.1 (पृष्ठ संख्या 242)

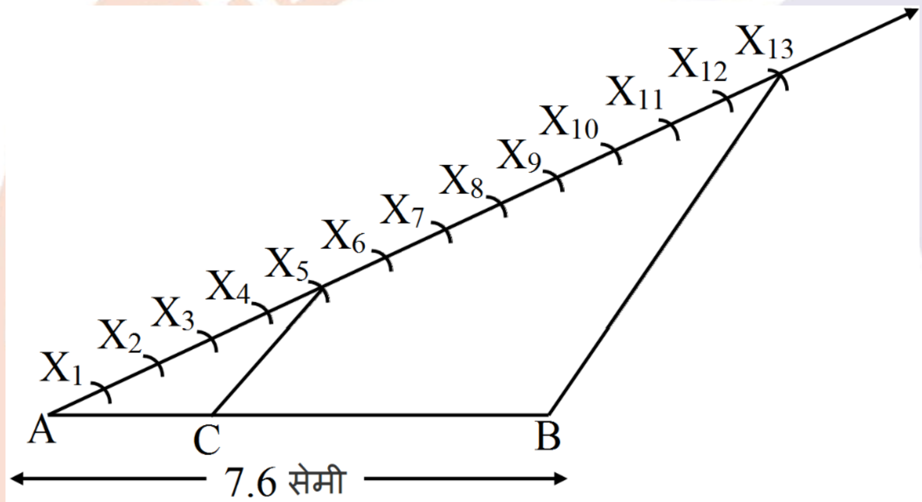
प्रश्न 1 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

7.6 सेमी लंबा एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5 : 8 अनुपात में विभाजित कीजिए। दोनों भागों को मापिए।

उत्तर-

रचना के पद

i. एक रेखाखंड AB = 7.6 सेमी खींचो।
ii. एक किरण AX खींचो जो AB के साथ एक न्यून कोण बनाए।
iii. किरण AX पर (8 + 5) = 13 समान खंड काटो और उन्हें $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_{13}$ से अंकित करो।
iv. X_{13} को B से मिलाओ।
v. X_5 से $X_6C \parallel X_{13}B$ खींचो जो AB को C पर मिले।



इस प्रकार बिन्दु C रेखाखंड AB को 5 : 8 अनुपात में विभाजित करता है।

दोनों रेखाखंडों को मापने पर, हमें प्राप्त होता है AC = 4.7 सेमी., BC = 2.9 सेमी

सत्यापन △ABX13 और △ACX5 में हमें प्राप्त होता है।

$$C_5 || B_{13}$$

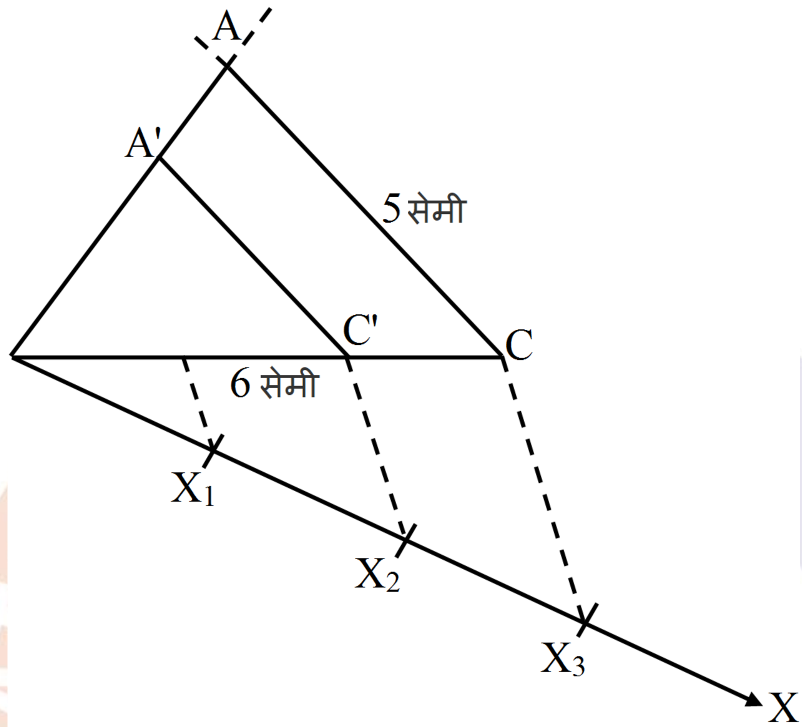
$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{A_5}{X_5X_{13}} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow AC : CB = 5 : 8$$

प्रश्न 2 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

4 सेमी 5 सेमी और 6 सेमी भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हों।

उत्तर-



रचना के पद

i. एक △ABC की रचना इस प्रकार करो कि BC = 6 सेमी, AC = 5 सेमी और AB = 4 सेमी है।
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की ∠CBX एक न्यून कोण हो।
iii. BX पर तीन बिन्दु X_1, X_2, और X_3 इस प्रकार अंकित करो कि $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3$
iv. X_3 और C को मिलाओ।
v. X_2 से एक रेखा X_3C के समान्तर खींचो जो BC को C पर काटे।
vi. C से एक रेखा CA के समान्तर खींचो जो BA को A′ पर मिले।

इस प्रकार अभिष्ठ त्रिभुज ABC′ है।

सत्यापनः रचना से हमें प्राप्त होता है किः

$$X_3C||X_3C$$

$$\Rightarrow \frac{BX_2}{X_2X_3} = \frac{BC'}{C'C}$$

परन्तु $\Rightarrow \frac{BX_2}{X_2X_3} = \frac{2}{1} = \frac{BC'}{C'C} = \frac{2}{1}$

$$\Rightarrow \frac{C'C}{BC'} = \frac{1}{2}$$

दोनों और 1 जोड़ने पर

$$\frac{C'C}{BC} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{C'C+BC'}{BC'} = \frac{1+2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{3}{2}$$

अब $\triangle BC'A'$ और $\triangle BCA$ में

$$CA||C'A'$$

AA समरूपता से हमें प्राप्त हुआ है।

$$\triangle BC'A' \sim \triangle BCA$$

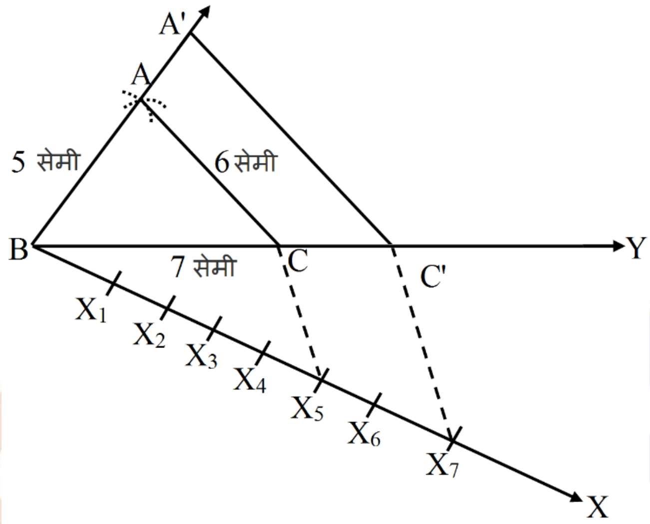
$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC}$$

प्रत्येक $= \frac{2}{3}$

प्रश्न 3 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{7}{5}$ गुनी हो।

उत्तर-



i. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी., BC = 7 सेमी. और AC = 6 सेमी. है।
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की ∠CBX एक न्यून कोण हो।
iii. BX पर 7 बिन्दु X_1, X_2, X_3, X_4, ..., X_7 अंकित करो।
iv. X_5 और C को मिलाओ।
v. बिन्दु X_7 से $X_5C \parallel X_7C'$ खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।
vi. C′ से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A′ पर काटे।

इस प्रकार $\triangle ABC$ अभीष्ठ त्रिभुज है।

सत्यापनः रचना से, हमें प्राप्त होता है कि C′A′ || CA AA′ समरूपता से हमें प्राप्त होता है:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C}{AC} = \frac{BC'}{BC} \text{ तथा } X_7C' || X_5C$$

[रचना द्वारा]

$$\therefore \triangle BX_7C' \sim \triangle BX_5C$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{BX_5}{BX_7}$$

$$\therefore \frac{BX_5}{BX_7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7} = \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

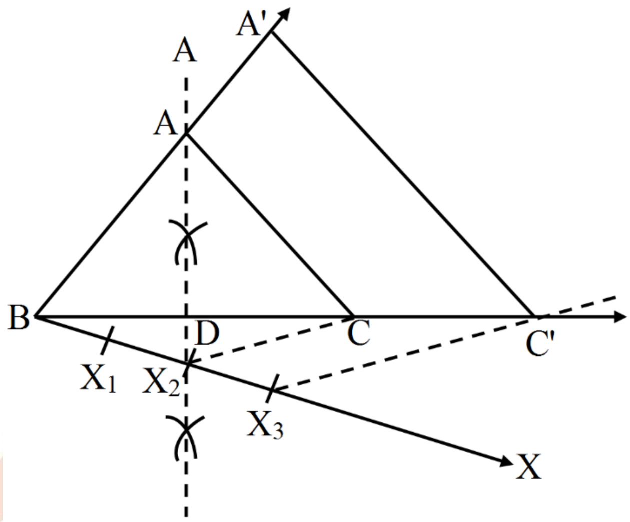
प्रश्न 4 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

आधार 8 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी के एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहु त्रिभुज की संगत भुजाओं की $1\frac{1}{2}$ गुनी हों।

उत्तर-

रचना के पद

i. BC = 8 सेमी खींचो।
ii. BC का लम्ब समद्विभाजक खींचो जो BC को D पर काटे।
iii. उक्त लम्ब पर एक बिन्दु A इस प्रकार अंकित करो कि DA = 4 सेमी.
iv. AB और AC को मिलाओ। इस प्रकार $\triangle ABC$ वांछित समद्विबाहु A है।
v. अब, एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि $\angle X$ एक न्यून कोण हो।
vi. इस प्रकार$_3$, X_2, X_1 पर तीन बिन्दु XBX अंकित करो कि:
$_3X_2 = X_2X_1 = X_1BX$
vii. X_2 और C को मिलाओ।
viii. X_3 से एक रेखा B2C के समान्तर खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।
ix. C′ से एक रेखा CA के समान्तर खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A′ पर काटे।
इस प्रकार $\triangle A'B'C'$ अभीष्ठ त्रिभुज है।



सत्यापन: हमें प्राप्त है की:

$C'A' || CA$ [रचना से]

$\therefore$ AA अमरूपता से $\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$

$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C}{AC} = \frac{BC'}{BC'}$

चूँकि $X_3C' | X_2C$ [रचना से]

$\Rightarrow \triangle BX_3C' \sim \triangle BX_2C$

$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_3}{BX_2}$

परन्तु $= \frac{BX_3}{BX_2} = \frac{3}{2}$

$= \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2}$

इस प्रकार $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{2}$

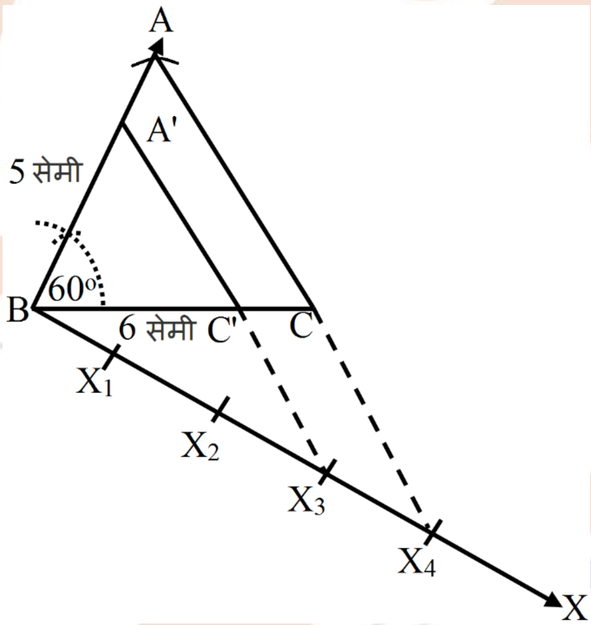
प्रश्न 5 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें BC = 6 सेमी, AB = 5 सेमी और ∠ABC = 60° हो| फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज △ABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों।

उत्तर-

रचना के पद

i. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार करो कि: BC = 6 सेमी, AB = 5 सेमी और ∠ABC = 60°.
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠CBX एक न्यनू कोण हो।
iii. BX पर चार बिन्दु X_1, X_2, X_3 और X_4 इस प्रकार अंकित करो कि $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4$
iv. X_4C को मिलाओ।
v. $X_3C' \parallel X_4C$ खींचो जो कि BC को C′ पर काटे।
vi. एक अन्य रेखा C′ से CA के समान्तर खींचो जो BA को A′ पर काटे।



इस प्रकार $\triangle A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।

सत्यापन: रचना से हमें प्राप्त है की:

$X_4C || X_3C'$ [BPTप्रमेय से]

$\therefore \frac{BX_3}{BX_4} = \frac{BC'}{BC}$ परन्तु $\frac{BX_3}{BX_4} = \frac{3}{4}$ [रचना से]

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4} \ldots . (i)$$

अब हमें प्राप्त है की:

$CA || C'A'$ [रचना से]

$\therefore \triangle BC'A' \sim \triangle BCA$ [AA समरूपता से]

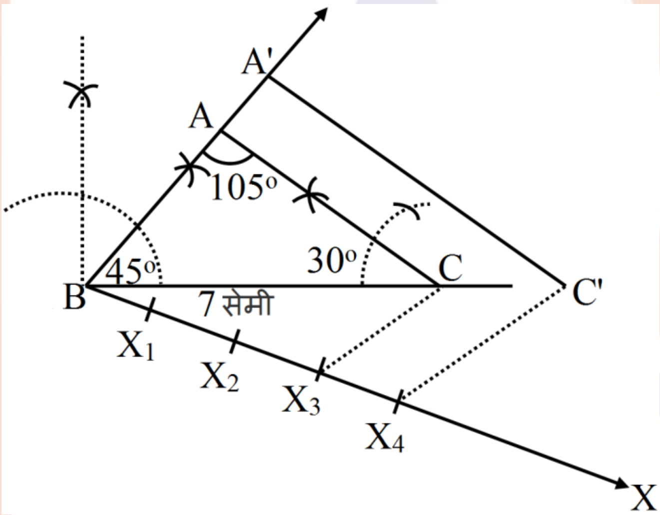
$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$$ [(1)से]

प्रश्न 6 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें BC = 7cm, ∠B = 45°, ∠A = 150° हो| फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $\frac{4}{3}$ गुनी हो।

उत्तर-

रचना के पद



i. एक △ABC की रचना इस प्रकार करो कि BC = 7 सेमी, ∠B = 45° और ∠A = 105° हो।
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠CBX एक न्यून कोण हो।
iii. BX पर चार बिन्दु X_1, X_2, X_3 और X_4 इस प्रकार अंकित करो कि: $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4$ हो।
iv. X_3 और C को मिलाओ।
v. $X_4C' || X_3C$ इस प्रकार खींचो कि C', BC (बढ़ाने पर) को मिले।
vi. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर मिले।

इस प्रकार $\triangle ABC$ अभीष्ट त्रिभुज है।

सत्यापन: रचना से हमें प्राप्त है किः

$$C'A'||CA$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'BC' \text{ [AA समरूपता से]}$$

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \ldots . (i)$$

पुनः रचना से,

$$X_4C'||X_3C$$

$$\therefore \triangle BX_4C' \sim \triangle BX_3C$$

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_4}{BX_3}$$

परन्तु $\frac{BX_4}{BX_3} = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{4}{3} \ldots . (ii)$$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त है की:

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{4}{3}$$

प्रश्न 7 निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

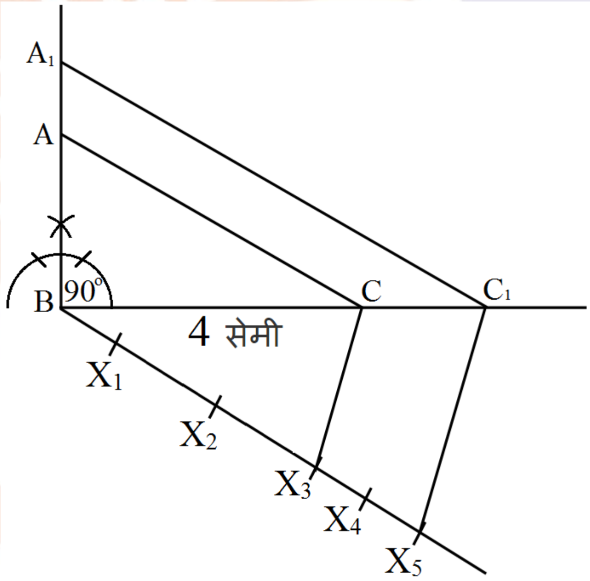
एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ) कर्ण के अतिरिक्त (4 सेमी तथा 3 सेमी लंबाई की हों | फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी हों|

उत्तर-

रचना के पद

i. एक △ABC की रचना इस प्रकार करो कि ∠B = 90°, BC = 4 सेमी और BA = 3 सेमी हो।
ii. एक किरण BX इस प्रकार खींचो कि ∠CBX एक न्यनू कोण हो।
iii. BX पर पाँच बिन्दु X_1, X_2, X_3, X_4 और X_5 इस प्रकार खींचो कि: $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4 = X_4X_5$ हो।
iv. X_3 और C को मिलाओ।
v. X_5 से X_3C के समान्तर एक रेखा खींचो जो BC को बढ़ाने पर C′ पर काटे।
vi. एक अन्य रेखा C′ से CA के समान्तर खींचो जो BA को बढ़ाने पर A′ पर मिले।।

इस प्रकार △A′B′C′ अभीष्ठ त्रिभुज है।



सत्यापन: रचना से हमें प्राप्त है कि:

$$C'A' || CA$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'BC'$ [AA समरूपता से]

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \ldots\ldots (i)$$

पुनः $X_5C' || X_3C$ रचना से,

$$\therefore \triangle BX_5C' \sim \triangle BX_3C$$

$$\Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{BX_5}{BX_3}$$

परन्तु $\frac{BX_5}{BX_3} = \frac{5}{3} \ldots (ii)$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त है की:

$$\Rightarrow \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$$

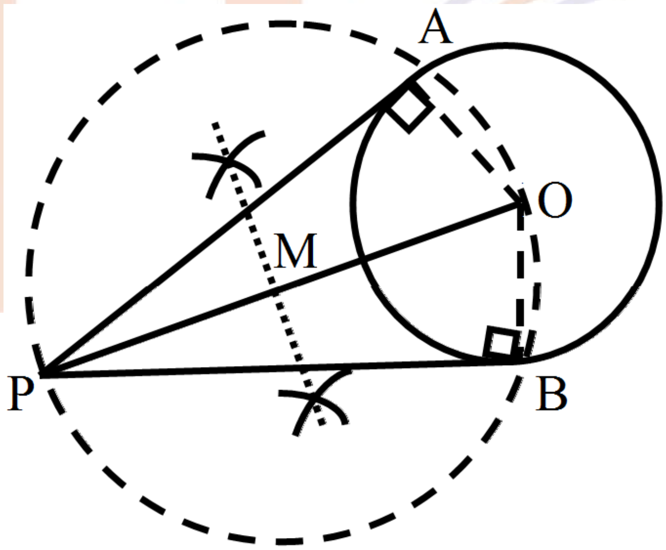
प्रश्नावली 11.2 (पृष्ठ संख्या 244)

प्रश्न 1 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केंद्र से 10 सेमी दूरी स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लंबाइयाँ मापिए।

उत्तर-

रचना के पद:

i. एक बिन्दु O अंकित करो।
ii. केन्द्र O और त्रिज्या 6 सेमी से एक वृत्त खींचो।
iii. केन्द्र से 10 सेमी की दूरी पर एक बिन्दु P अंकित करो।
iv. O और P को मिलाओ।
v. OP को M पर समद्विभाजित करो।
vi. बिन्दु M को केन्द्र लेकर MO या MP के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।
vii. PA और PB को मिलाओ। इस प्रकार, PA और PB दो अभिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर, PA = PB = 9.6 सेमी.



सत्यापनः OA और OB को मिलाओ चूँकि OP एक व्यास है।

∠OAP = 90°; ∠OBP = 90° [अर्धवृत्त में बने कोण[

पुनः OA और OB एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

PA और PB वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ है।

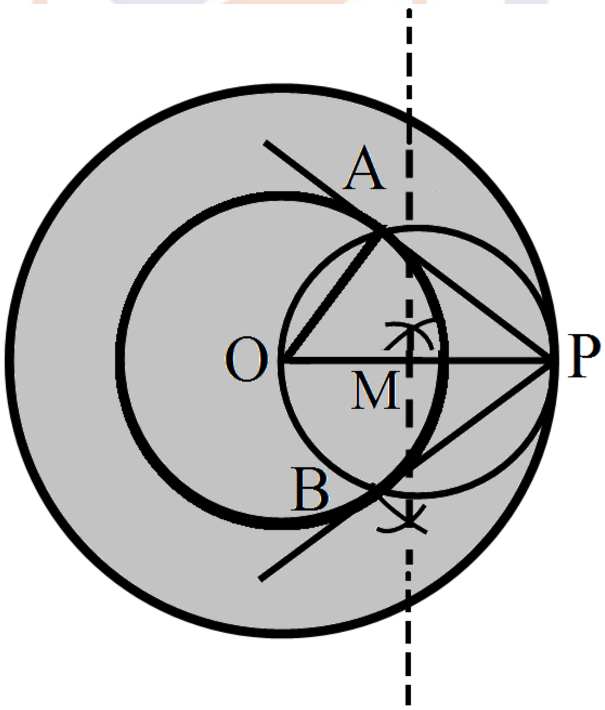
प्रश्न 2 4 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर 6 सेमी त्रिज्या के एक सकेंद्रीय वृत्त के किसी बिन्दु से एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए और उसकी लंबाई मापिए। परिकलन से इस माप की जाँच भी कीजिए।

उत्तर-

रचना के पदः

i. 4 सेमी और 6 सेमी त्रिज्या के दो वृत्त एक ही केन्द्र O से खींचो।
ii. बड़े वृत्त पर एक बिन्दु P अंकित करो।
iii. O और P को मिलाओ।
iv. OP का लम्ब समद्विभाजक M ज्ञात करो।
v. Mको केन्द्र और OM या PM के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो छोटे वृत्त को A और B पर काटे।
vi. A और P को मिलाइए।

इस प्रकार PA अभीष्ट स्पर्श रेखा है। मापने पर, PA = 4.5 सेमी



सत्यापनः O और A को मिलाओ

∠PAO = 90° [अर्धवृत्त में बना कोण[

PA⊥OA

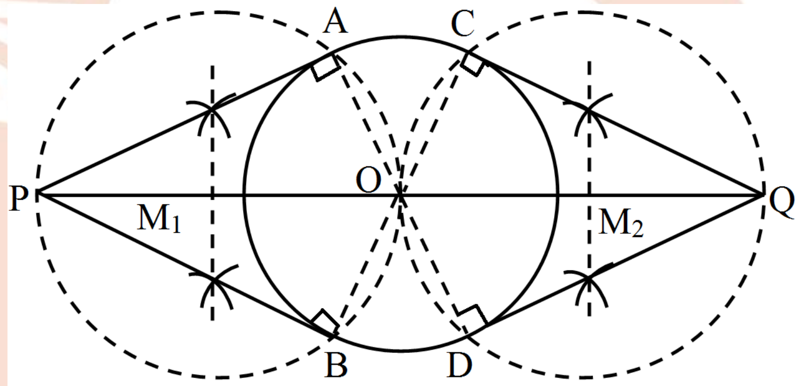
OA, छोटे वृत्त की त्रिज्या है।

छोटे वृत्त पर PA एक स्पर्श रेखा है।

प्रश्न 3 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके किसी भी बढाए गए व्यास पर केंद्र से 7 सेमी की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए। इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

उत्तर-

रचना के पदः



i. केन्द्र O और त्रिज्या 3 सेमी का एक वृत्त खींचो।
ii. उक्त वृत्त के व्यास को बढ़ाकर, इस पर दो बिन्दु P और 9 इस प्रकार अंकित कीजिए किः OP = OQ = 7 सेमी
iii. OP और OQ के मध्य बिन्दु क्रमशः M_1 और M_2 ज्ञात कीजिए।
iv. M_1 को केन्द्र व M_1P को त्रिज्या मानकर एक वृत्त खींचो जो वृत्त को A और B पर काटे।
v. PA और PB को मिलाओ। PA और PB अभीष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं।
vi. अब OQ के मध्य बिन्दु M_2 और M_2O के समान त्रिज्या लेकर वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को C और D पर काटे
vii. OC और OD को मिलाओ। इस प्रकार OQ और QD अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

सत्यापनः OA को मिलाओ

$$\angle OAP = 90^\circ$$

$$PA \perp OA$$

PA एक स्पर्श रेखा है।

इस प्रकार, $PB \perp OA$

PB एक स्पर्श रेखा है।

अब, OC को मिलाने पर

$$\angle OCQ = 90^\circ$$

$$QC \perp OC$$

QC एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, $QD \perp OC = QD$ एक स्पर्श रेखा है।

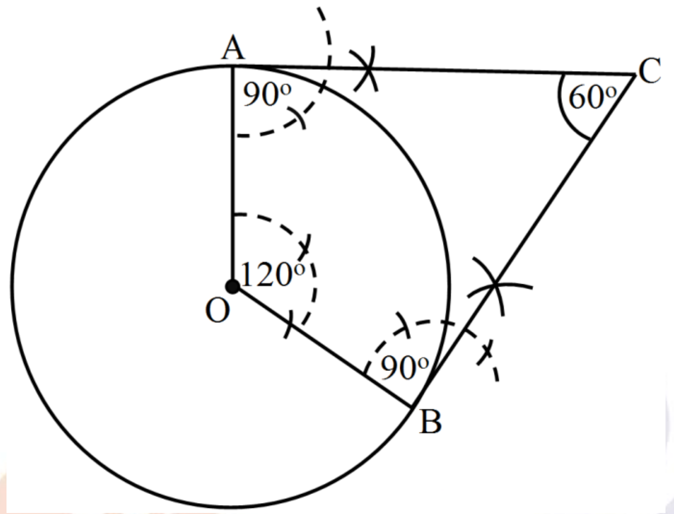
प्रश्न 4 5 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हों।

उत्तर-

रचना के पदः

i. केन्द्र O और त्रिज्या = 5 सेमी से दिये गये वृत्त की रचना करो।
ii. ∠AOB = 120° बनाओ।
iii. बिन्दु A से OA पर एक लम्ब खींचो।
iv. B से एक लम्ब OB पर खींचो।
v. उक्त लम्बों को C पर मिलने दो।

इस प्रकार CA तथा CB वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ है, जो परस्पर 60° पर झुकी हुई हैं।



सत्यापनः चतुर्भुर्ज OACB में, कोण-योग-गुण से

$$120^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ACB = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 300^\circ + \angle ACB = 360^\circ$$

$$\Rightarrow ACB = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

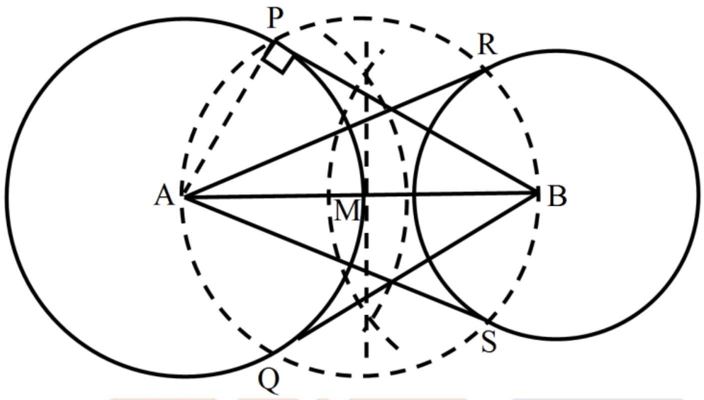
प्रश्न 5 8 सेमी लंबा एक रेखाखंड AB खींचिए। A को केंद्र मान कर 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त तथा B को केंद्र लेकर 3 सेमी त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचिए। प्रत्येक वृत्त पर दूसरे वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

उत्तर-

रचना के पद:

i. A और B को मिलाओ।
ii. AB का लम्बसमद्विभाजक ज्ञात करो। माना AB का मध्य बिन्दु M है।
iii. केन्द्र M और त्रिज्या = MA या MB लेकर एक वृत्त खींचो जो केन्द्र A वाले वृत्त को P और Q पर काटे, तथा केन्द्र B वाले वृत्त को R और S पर काटे।
iv. BP और BQ को मिलाओ। इस प्रकार, BP तथा BQ केन्द्र A वाले वृत्त पर B से अभीष्ठ स्पर्श रेखाएँ है।
v. अब, RA और SA को मिलाओ।

इस प्रकार, केन्द्र B वाले वृत्त पर A से स्पर्श रेखाएँ RA तथा SA हैं।



सत्यापनः A और P को मिलाने पर,

∠APB = 90°

BP⊥AP

परन्तु AP, केन्द्र A वाले वृत्त की त्रिज्या है।

केन्द्र A वाले वृत्त पर AP एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, BQ भी केन्द्र A वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है। केन्द्र B वाले वृत्त पर भी उक्त प्रकार से AR और AS स्पर्श रेखाएँ हैं।

प्रश्न 6 माना ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = 6 सेमी, BC सेमी तथा ∠B = 90° है। B से AC पर BD लंब है। बिन्दुओं B, C, D से होकर जाने वाला एक वृत्त खींचा गया है। A से इस वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

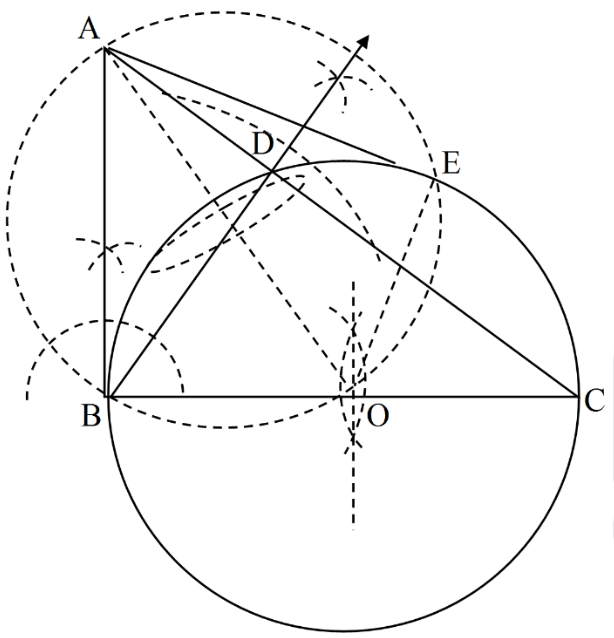
उत्तर-

रचना के पदः

AB = 6 सेमी, BC = 8 सेमी तथा ∠B = 90° मापों से △ABC की रचना करो।

i. BD⊥AC खींचो।
ii. B, C और D से होकर एक वृत्त खींचो।
iii. AO को मिलाओ।
iv. AO को M पर समद्विभाजित करो।
v. केन्द्र M और त्रिज्या MA लेकर एक वृत्त खींचो जो दिये गये वृत्त को B और E पर काटता है।
vi. AB और AE को मिलाओ।

इस प्रकार बिन्दु A से दिए गये वृत्त पर AB और AE स्पर्श रेखाएँ हैं।



सत्यापनः OE को मिलाने पर,

∠AEO = 90° [अर्धवृत्त में बनी कोण[

AE⊥OE

परन्तु OE, दिए गये वृत्त की एक त्रिज्या है।

AE वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, AB भी दिए गये वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

प्रश्न 7 किसी चूड़ी की सहायता से एक वृत्त खींचिए। वृत्त के बाहर एक बिन्दु लीजिए। इस बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

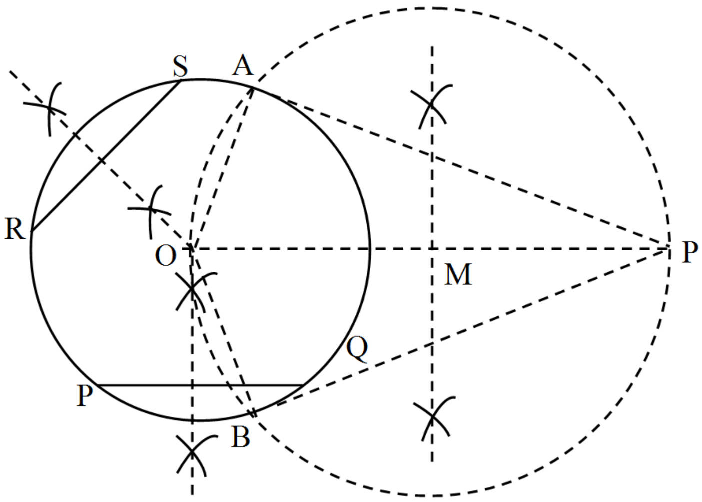
उत्तर-

रचना के पदः

i. चूड़ी की सहायता से दिए गये वृत्त की रचना करो।
ii. दिए गये वृत्त में दो असमान्तर जीवाएँ PQ और RS खींचो।
iii. P और RS के लम्बसमद्विभाजक खींचो जो परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करे। इस प्रकार बिन्दु O दिए गये वृत्त का केन्द्र है।
iv. दिए गये वृत्त के बाहर एक बिन्दु P लो।
v. OP को मिलाओ।
vi. OP का मध्य बिन्दु M अंकित करो।
vii. केन्द्र M और त्रिज्या-OM से एक वृत्त खींचो, जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।।

viii. PA और PB को मिलाओ।

इस प्रकार PA और PB स्पर्श रेखाएँ हैं।



सत्यापनः OA और OB को मिलाने पर,

$\angle OAP = 90°$, $\angle OBP = 90°$ [अर्धवृत्त में बने कोण[

$PA \perp OA$ तथा $PB \perp OB$

PA, दिए गये वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है तथा PB, दिए गये वृत्त पर दूसरी स्पर्श रेखा है।

वृत्त का परिमाप

एक वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाप होता है, जिसे प्रायः परिधि कहा जाता है। वृत्त की परिधि का उसके व्यास के साथ एक अचर अनुपात होता है। इस अचर अनुपात को एक यूनानी अक्षर π (जिसे 'पाई' पढ़ा जाता है) से व्यक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में,

परिधि/व्यास = π

या परिधि = व्यास × π

= π × 2r (जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है)

= 2πr

नोट:

π का संख्यात्मक मान 22/7 या 3.1416 प्रयोग किया जाता है।

वृत्त का क्षेत्रफल

वृत्त का क्षेत्रफल त्रिज्या के वर्ग का पाई गुना होता है ($A = \pi r^2$)। इस सूत्र का प्रयोग करते हुए उस वृत्त का क्षेत्रफल आसानी से ज्ञात कर सकते हैं जिसके व्यास या त्रिज्या दी गई हो।

उदाहरण

एक वृत्ताकार खेत पर रु 24 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय रु 5280 है। इस खेत की रु 0-50 प्रति वर्ग मीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। (π = 22/7 लीजिए)

हल:

बाड़ की लंबाई (मीटर में) = पूरा व्यवय/दर = 5280/24 = 220

अतः खेत की परिधि = 220 मीटर

इसलिए यदि खेत की त्रिज्या r मीटर है, तो

$2\pi r = 220$

या $2 \times 22/7 \times r = 220$

इसलिए, $r = (220 \times 7)/(2 \times 22) = 35$

अर्थात् खेत की त्रिज्या 35 मीटर है।

अतः खेत का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = 22/7 \times 35 \times 35 \text{ m}^2$

अब 1 m^2 खेत की जुताई का व्यय = रु 0.50

अतः खेत की जुताई कराने का कुल व्यय = 22 × 5 × 35 × 0.50 = रु 1925

दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 19 cm और 9 cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

प्रथम वृत्त का परिमाप = $2\pi r = 2 \times 22/7 \times 19$

दूसरे वृत्त का परिमाप = $2 \times 22/7 \times 9$

तीसरे वृत्त की परिधि = $2\pi r = 2 \times 22/7 \times 19 + 2 \times 22/7 \times 9 = 2 \times 22/7 \times (19 + 9)$

$= 2 \times 22/7 \times 28$

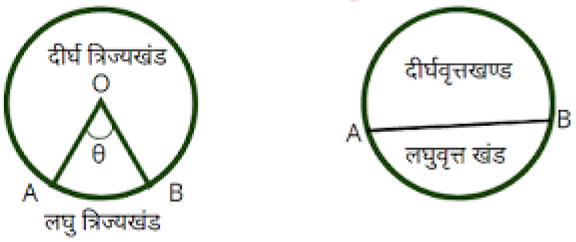
$2\pi r = 2 \times 22/7 \times 28$

इसलिए, $r = 28$ cm

त्रिज्यखंड और वृत्तखंड

त्रिज्यखंड: एक वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरा (परिबद्ध) हो, उस वृत्त का एक त्रिज्यखंड कहलाता है।

त्रिज्यखण्ड और वृत्तखण्ड



वृत्तखंड: वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो एक जीवा और संगत चाप के बीच में परिबद्ध हो एक वृत्तखंड कहलाता है।

टिप्पणी

जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'वृत्तखंड' और 'त्रिज्यखंड' लिखने से हमारा तात्पर्य क्रमशः लघु वृत्तखंड और लघु त्रिज्यखंड से होगा।

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

- त्रिज्यखंड की चाप की लम्बाई = θ / 360 × 2πr
- लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = θ / 360 × πr^2

वृत्त का वह भाग है जो दो त्रिज्याओं एवं एक चाप से घिरा हो, वह त्रिज्यखंड कहलाता है

- वृतखंड की चाप की लम्बाई = θ / 360 × 2πr

मान लीजिए OAPB केंद्र O और त्रिज्या R वाले वृत्त का एक त्रिज्यखंड है। मान लीजिए ∠AOB का अंशीय माप θ है।

आप जानते हैं कि एक वृत्त [वस्तुतः एक वृत्तीय क्षेत्र या चकती] का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

एक तरीके से, हम इस वृत्तीय क्षेत्र को केंद्र व् पर 360° का कोण बनाने वाला (अंशीय माप 360) एक त्रिज्यखंड मान सकते हैं। फिर ऐकिक विधि का प्रयोग करके, हम त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल नीचे दर्शाए अनुसार ज्ञात कर सकते हैंः

जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप 360 है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = πr^2

अतः, जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप 1 है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = πr^2/360

इसलिए जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप θ है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = πr^2/360 × θ

इस प्रकार, हम वृत्त के एक त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल के लिए, निम्नलिखित संबंध (या सूत्र) प्राप्त करते हैंः

कोण θ वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = θ/360 × πr^2

जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है और θ त्रिज्यखंड का अंशों में कोण है।

त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई

अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता हैः क्या हम इस त्रिज्यखंड की संगत चाप APB की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं। हाँ, हम ऐसा कर सकते हैं। पुनः, ऐकिक विधि का प्रयोग करने तथा संपूर्ण वृत्त (360° कोण वाले) की लंबाई 2πr लेने पर,

हम चाप APB की वांछित लंबाई θ/360 × 2πr प्राप्त करते हैं।

अतः कोण θ वाले त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई = θ/360 × 2πr

त्रिज्या 4 cm वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 30° है। साथ ही,

संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

दिया हुआ त्रिज्यखंड OAPB है।

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\theta/360 \times \pi r^2$

$= 30/360 \times 3.14 \times 4 \times 4\ cm^2$

$= 12.56/3\ cm^2 = 4.19\ cm^2$

संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = πr^2 – त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल

$= (3.14 \times 16 - 4.19)\ cm^2$

$= 46.05\ cm^2 = 46.1\ cm^2$

वृत्तखंड का क्षेत्रफल

आइए अब केंद्र और त्रिज्या वाले वृत्तखंड के क्षेत्रफल पर विचार करें। आप देख सकते हैं कि

वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल का क्षेत्रफल

$= \theta/360 \times 2\pi r^2 - \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

दिए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त की त्रिज्या 21 Cm है और $\angle AOB = 120^o$ है। ($\Pi = 22/7$ लीजिए)

वृत्तखंड AYB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAYB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल (1)

अब, त्रिज्यखंड व्।ल्ठ का क्षेत्रफल = $120/360 \times 22/7 \times 21 \times 21\ cm^2 = 462\ cm^2$ (2)

ΔOAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए $OM \perp AB$ खींचिए।

ध्यान दीजिए कि OA = OB है। अतः, RHS सर्वांगसमता से, $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ है।

इसलिए M जीवा AB का मध्य-बिदु है तथा $\angle AOM = \angle BOM = ½ \times 120^o = 60^o$ है।

मान लीजिए, OM = x cm है।

इसलिए, ΔOMA से $OM/OA = \cos 60^o = ½$

या $x/21 = ½$

$x = 21/2$ cm

अतः OM = ½

साथ ही $AM/OA = \sin 60^o = \sqrt{3}/2$

अतः $AM = 21\sqrt{3}/2$ cm

इसलिए $AB = 2\ AM = 21\sqrt{3}$ cm

अतः ΔOAB का क्षेत्रफल $= ½ \times AB \times OM = ½ \times 21\sqrt{3} \times 21/2\ cm^2$

$= (441\sqrt{3})/4\ cm^2$ (3)

इसलिए वृत्तखंड का क्षेत्रफल $= \{462 – (441\sqrt{3})/4\}\ cm^2$ (समीकरण 1, 2 और 3 से)

$= 21/4(88 – 21\sqrt{3})\ cm^2$

समतल आकृतियों के संयोजनों के क्षेत्रफल

अभी तक हमने विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रफल पृथक-पृथक रूप से ज्ञात किए हैं। अब समतल आकृतियों के कुछ संयोजनों के क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयत्न करें। हमें इस प्रकार की आकृतियाँ दैनिक जीवन में तथा विभिन्न रोचक डिज़ाइनों के रूप में देखने को मिलती हैं। फूलों की क्यारियाँ, नालियों के ढक्कन, खिड़कियों के डिज़ाइन, मेज़ पोशों पर बने डिज़ाइन आदि ऐसी आकृतियों के कुछ उदाहरण हैं। इन आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया को हम कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

एक वर्ग ABCD जिसकी एक भुजा का माप 14 Cm है। वर्ग के अन्दर भुजाओं को स्पर्श करते हुए चार वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हुए बनाए गए हैं वृतों को छोड़कर बचे हुए वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= 14 \times 14\ cm^2 = 196\ cm^2$

प्रत्येक वृत्त का व्यास $= 14/2 = 7$ cm

इसलिए त्रिज्या $= 7/2$ cm

अतः एक वृत्त का क्षेत्रफल $= 22/7 \times 7/2 \times 7/2\ cm^2$

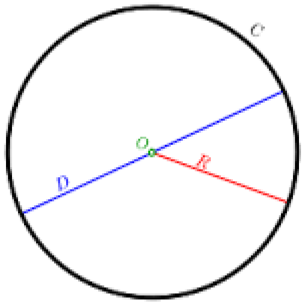
$= 154/4\ cm^2$

इस प्रकार 4 वृतों का क्षेत्रफल $= 4 \times 154/4\ cm^2 = 154\ cm^2$

अतः वृतों को छोड़कर बचे हुए वर्ग का क्षेत्रफल $= (196 – 154)\ cm^2$

$= 42\ cm^2$

वृत्त की परिधि (circumference) - वृत्त की वक्रीय (curve) सीमा की लंबाई उसका परिमाप



● वृत्त की परिधि का उसके व्यास (diameter) के साथ एक अचर अनुपात (constant ratio) होता है, जिसे हम एक यूनानी अक्षर π (पाई) से दर्शाते हैं।

* परिधि/व्यास = π

* परिधि = व्यास x π

या

* परिधि = 2r x π (r वृत्त की त्रिज्या है)

या

* परिधि = 2πr

● π एक अपरिमेय संख्या (irrational number) है, जिसका दशमलव प्रसार (decimal expansion) अनवसानी अनावृत्ति (non-terminating non recurring) है। फिर भी हम प्रश्नों को हल करने के लिए π का मान 22/7 या 3.14 रखते हैं।

जब दो संयोजित आकृतियों (joint shapes) में से किसी एक या दोनों का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो, तो -

- किसी आकृति के अभ्यंतर (interior) में अन्य आकृतियाँ संयोजित हैं, तो पहले बड़ी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करके अभ्यंतर वाली आकृतियों का क्षेत्रफल घटाओ या अन्य संक्रिया (operation) करो जो कहा गया हो।
- आकृति को ध्यानपूर्वक देखो कि यह किस आकृति का भाग है।
- संयोजित आकृतियों में सम्बन्ध स्थापित करने का प्रयास करें, तभी कोई हल सम्भव है।

Example:

दो वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 19 cm और 9 cm हैं | उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है |

हल : पहले वृत्त की त्रिज्या R = 19 cm

दुसरे वृत्त की त्रिज्या r = 9 cm

नए वृत्त का परिमाप = पहले वृत्त का परिमाप + दुसरे वृत्त का परिमाप

नए वृत्त का परिमाप = 2πR1 + 2πr2

= 2π(R + r)

= 2π(19 + 9)

= 2 x 22/7 x 28

= 2 x 22 x 4

= 176 cm

दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं | उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है |

हल : पहले वृत्त की त्रिज्या R = 8 cm

दुसरे वृत्त की त्रिज्या r = 6 cm

नए वृत्त का परिमाप = पहले वृत्त का परिमाप + दुसरे वृत्त का परिमाप

नए वृत्त का परिमाप = πR2 + πr2

= π(R2 + r2)

= 2π(19 + 9)

= 2 x 22/7 x 28

= 2 x 22 x 4

= 176 cm

आकृति एक तीरंदाजी लक्ष्य को दर्शाती है, जिसमें केंद्र से बाहर की ओर पाँच क्षेत्र GOLD, RED, BLUE, BLACK और WHITE चिन्हित हैं, जिनसे अंक अर्जित किए जा सकते हैं | GOLD अंक वाले क्षेत्र का व्यास 21 cm है तथा प्रत्येक अन्य पट्टी 10.5 cm चौड़ी है | अंक प्राप्त कराने वाले इन पाँचों क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :

(i) गोल्ड की त्रिज्या r = $\frac{21}{2}$ = 10.5 cm

GOLD का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$

$= \frac{11 \times 3 \times 21}{2}$

$= \frac{693}{2} = 346.5 \text{ cm}^2$

(ii) RED के लिए R = 21 cm और r = $\frac{21}{2}$ cm

RED का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$= \frac{22}{7}\left[21^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2\right]$

$= \frac{22}{7}[21^2 - 10.5^2]$

$= \frac{22}{7}(21 + 10.5)(21 - 10.5)$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$= \frac{22}{7}(31.5)(10.5)$

$= 22 \times 31.5 \times 1.5$

RED $= 1039.5 \text{ cm}^2$

(iii) BLUE के लिए R = 31.5 cm और r = 21 cm

BLUE का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$$= \frac{22}{7}\left[(31.5)^2 - (21)^2\right]$$

$$= \frac{22}{7}(31.5 + 21)\ (31.5 - 21)$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$= \frac{22}{7}(52.5)\ (10.5)$$

$$= 22 \times 52.5 \times 1.5$$

BLUE $= 1732.5\ cm^2$

(iv) BLACK के लिए R = 42 cm और r = 31.5 cm

BLACK का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$$= \frac{22}{7}\left[(42)^2 - (31.5)^2\right]$$

$$= \frac{22}{7}(42 + 31.5)\ (42 - 31.5)$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$= \frac{22}{7}(73.5)\ (10.5)$$

$$= 22 \times 73.5 \times 1.5$$

BLACK $= 2425.5\ cm^2$

(iv) WHITE के लिए R = 52.5 cm और r = 42 cm

BLACK का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

$$= \frac{22}{7}\left[(52.5)^2 - (42)^2\right]$$

$$= \frac{22}{7}(52.5 + 42)(52.5 - 42)$$

[चूँकि $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$= \frac{22}{7}(94.5)(10.5)$$

$$= 22 \times 94.5 \times 1.5$$

WHITE $= 3118.5 \text{ cm}^2$

किसी कार के प्रत्येक पहिये का व्यास 80 cm है | यदि यह कार 66 km प्रति घंटे की चाल से चाल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है ?

हल :

पहिये का व्यास = 80 cm

पहिये की त्रिज्या (r) = 40 cm

कार की चाल = 66 km प्रति घंटा

$= \frac{66 \times 1000}{60}$ m प्रति मिनट

$= 1100$ m प्रति मिनट

10 मिनट में तय दुरी $= 1100 \text{ m} \times 10$

$= 11000$ m

अब, एक चक्कर में तय दुरी $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 40$

$= \frac{1760}{7}$ cm

या $= \frac{1760}{700}$ m

अत: 10 मिनट में चक्करों कि संख्या $= \frac{\text{10 मिनट में तय दुरी}}{\text{1 चक्कर में तय दुरी}}$

$= \frac{11000}{\frac{1760}{700}}$

या $= \frac{11000}{1} \times \frac{700}{1760}$ चक्कर

या $= \frac{1000}{1} \times \frac{700}{160}$

या $= \frac{100}{1} \times \frac{700}{16}$

या $= \frac{100}{1} \times \frac{700}{4 \times 4}$

या $= 25 \times 25 \times 7$

या $= 625 \times 7$

या $= 4375$ चक्कर

निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

यदि एक वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या है :

(A) 2 मात्रक

(B) π मात्रक

(C) 4 मात्रक

(D) 7 मात्रक

हल : वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर हैं –

इसलिए 2 π r = π r2

या 2 = r [दोनों पक्षों का सरलीकरण करने पर]

अत: वृत्त की त्रिज्या 2 मात्रक है |

उत्तर : (A) 2 मात्रक

6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60o है |

हल :

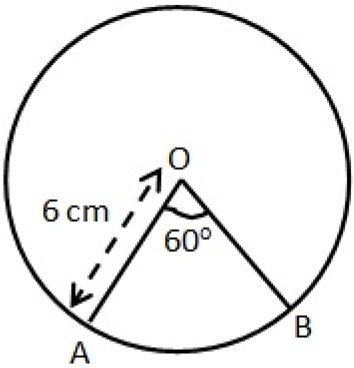
त्रिज्या (r) = 6 cm और कोण θ = 60°

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360°}$

या $= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 60°}{360°}$

या $= \frac{22}{7} \times \frac{6}{1}$

या $= \frac{132}{7}$ cm²



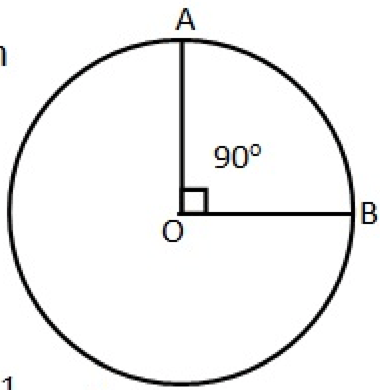
एक वृत्त, के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है |

हल :

परिधि = 22 cm

या 2 π r = 22 cm

या $2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$ cm



या $r = 22 \times \frac{7}{2 \times 22}$

या $r = \frac{7}{2}$ cm

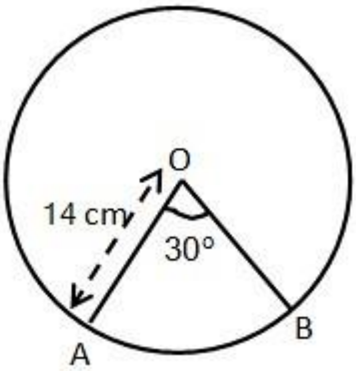
अब, चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} \pi r^2$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= \frac{77}{8} \text{ cm}^2$$

एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है | इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



त्रिज्या (r) = मिनट की सुई जिसकी लंबाई = 14 cm

घड़ी के सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण = $\frac{360^\circ}{60}$ = 6°

इसलिए 5 मिनट में बना केन्द्रीय कोण θ = $6^\circ \times 5 = 30^\circ$

5 मिनट में रचित क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

या $= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 30^\circ}{360^\circ}$

या $= \frac{22}{1} \times \frac{2 \times 14}{12}$

या $= \frac{11}{1} \times \frac{14}{3}\ cm^2$

या $= \frac{154}{3}\ cm^2$

10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर समकोण अंतरित करती है | निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

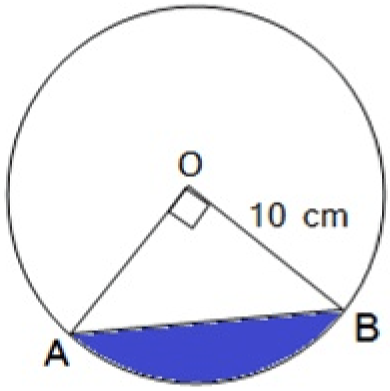
(i) संगत लघु वृत्तखंड (ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड

हल :

(i) संगत लघु वृतखंड का क्षेत्रफल

त्रिज्या (r) = 10 cm

θ = 90°

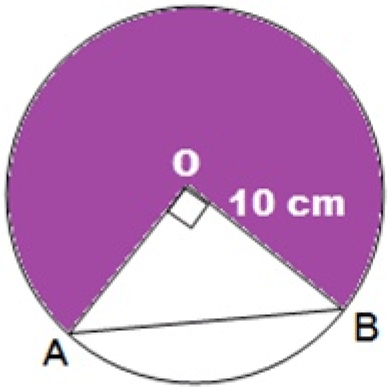


संगत लघु वृतखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90}{360} - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 90^0$

$= \frac{314}{4} - 50$

$= 78.5 - 50 = 28.5 \text{ cm}^2$



(ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 (360-\theta)}{360}$

$= \frac{3.14 \times 10 \times 10\,(360-90)}{360}$

$= \frac{314 \times (270)}{360}$

$= \frac{314 \times 3}{4}$

$= 78.5 \times 3 = 235.5\ cm^2$

त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर 60o का कोण अंतरित करता है | ज्ञात कीजिए :

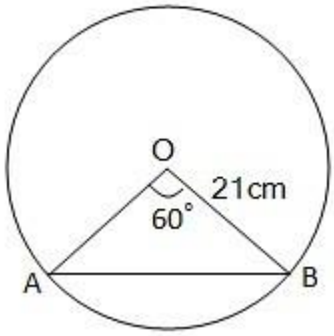
(i) चाप की लंबाई

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

हल : त्रिज्या (r) = 21 cm

$\theta = 60^\circ$



(i) चाप की लंबाई = $\frac{\pi r \theta}{180}$ = $\frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 60}{180}$

= $\frac{22 \times 3}{3}$ = 22 cm

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

= $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$

= $\frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 60}{360}$

= $\frac{22 \times 3 \times 21}{6}$

= 11 × 21

= 231 cm^2

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

= $\frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

= $\frac{\frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 60}{360} - \frac{1}{2}\ 21 \times 21 \times \sin 60^\circ$

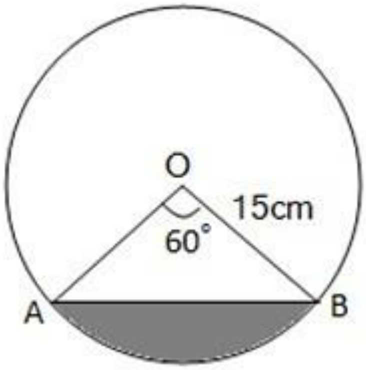
= $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ cm^2 [sin 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$]

15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60o का कोण अंतरित करती है | और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(π = 3.14 का प्रयोग कीजिए और $\sqrt{3} = 1.73$)

हल : त्रिज्या (r) = 15cm

$\theta = 60^\circ$



(i) संगत लघु वृतखंड का क्षेत्रफल

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$= \frac{3.14 \times 15 \times 15 \times 60}{360} - \frac{1}{2} 15 \times 15 \times \sin 60^\circ$

$= \frac{3.14 \times 15 \times 15}{6} - \frac{225\sqrt{3}}{4}$

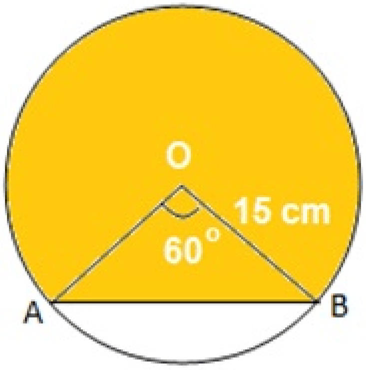
$= \frac{3.14 \times 5 \times 15}{2} - \frac{225 \times 1.73}{4}$

$= 1.57 \times 75 - \frac{389.25}{4}$

$= 117.75 - 97.3125$

$= 20.4375 \text{ cm}^2$

(ii) संगत दीर्घ वृतखंड का क्षेत्रफल



संगत दीर्घ वृतखंड का क्षेत्रफल

= वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृतखंड का क्षेत्रफल

= πr^2 – लघु वृतखंड का क्षेत्रफल

= $3.14 \times 15 \times 15$ cm^2 – 20.4375 cm^2

= 706.5 cm^2 – 20.4375 cm^2

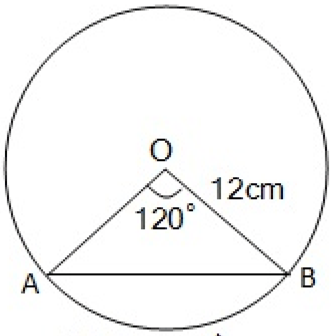
= 686.0625 cm^2

त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120o का कोण अंतरित करती है | संगत वृत्तखंड़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए और $\sqrt{3} = 1.73$)

हल : त्रिज्या (r) = 12 cm

$\theta = 120°$



संगत वृत्तखंड़ का क्षेत्रफल

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$= \dfrac{\pi r^2 \theta}{360} - \dfrac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$= \dfrac{3.14 \times 12 \times 12 \times 120^\circ}{360^\circ} - \dfrac{1}{2} \; 12 \times 12 \times \sin 120^\circ$

$= \dfrac{3.14 \times 12 \times 12}{3} - \dfrac{72\sqrt{3}}{2}$

$= 3.14 \times 4 \times 12 - 36\sqrt{3}$

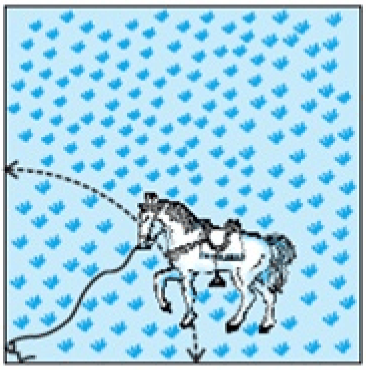
$= 150.72 - 62.28$

$= 88.44 \text{ cm}^2$

15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति 12.11) | ज्ञात कीजिए :

(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोडा चार सकता है |

(ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए | (π = 3.14 का प्रयोग कीजिए)



हल : बाँधी गई रस्सी की लम्बाई (r) = 5 m

$\theta = 90^\circ$ [वर्ग का प्रत्येक कोण]

(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोडा चार सकता है

बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2 \theta}{360}$

$= \dfrac{3.14 \times 5 \times 5 \times 90^\circ}{360^\circ}$

$= \dfrac{3.14 \times 25}{4}$

$= \dfrac{78.5}{4}$

$= 19.625 \ m^2$

(ii) घोड़े द्वारा चरे जा सकने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल जब रस्सी की लंबाई 10 m हो –

त्रिज्या (r) = 10 m, $\theta = 90^\circ$

बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2 \theta}{360}$

$= \dfrac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90^\circ}{360^\circ}$

$= \dfrac{314}{4}$

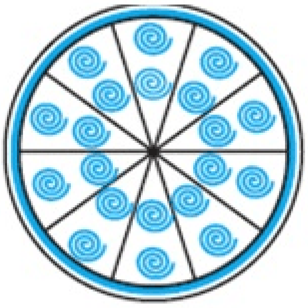
$= 78.5 \ m^2$

चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि

$= 78.5 - 19.625$

$= 58.875 \ m^2$

एक वृताकार ब्रुच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है | तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसाकि आकृति 12.12 में दर्शाया गया है | तो ज्ञात कीजिए :



(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई

(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

हल : वृताकार ब्रुच का व्यास = 35 mm और त्रिज्या (r) = $\frac{35}{2}$ mm

व्यासों की संख्या = 5 और $\theta = \frac{360}{10} = 36°$

(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई

= 5 × व्यास की लंबाई + वृत्त की परिधि

$= 5 \times 35 + 2\pi r$

$= 175 + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2}$

$= 175 + 22 \times 5$

$= 175 + 110$

= 285 mm

(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\dfrac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times 36^\circ}{360^\circ}$$

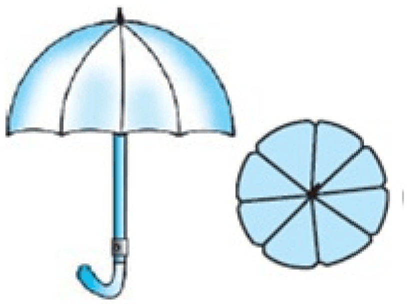
$$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}}{10}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{11 \times 5 \times 35}{20}$$

$$= \frac{385}{4}\ mm^2$$

एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति 12.13)| छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल : त्रिज्या (r) = 45 cm और $\theta = \dfrac{360}{8} = 45^\circ$

दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल = $\dfrac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{22 \times 45 \times 45 \times 45^\circ}{7 \times 360^\circ}$$

$$= \frac{22 \times 45 \times 45}{7 \times 8} = \frac{22275}{28}\ cm^2$$

किसी कार के दो वाइपर (wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं | प्रत्येक वाइपर की पट्टी

की लंबाई 25 cm है और 115o के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है | पट्टियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ़ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए ।

हल : वाईपर की लम्बाई = त्रिज्या (r) = 25 cm और θ = 115°

दोनों वाईपर द्वारा साफ किए गए क्षेत्र का क्षेत्रफल = $2\left(\frac{\pi r^2 \theta}{360}\right)$

$$= 2\left(\frac{22 \times 25 \times 25 \times 115^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$= 2\left(\frac{158125}{252}\right)$$

$$= \frac{158125}{126} \text{ cm}^2$$

जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house) 80o कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है | समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके ।

हल : त्रिज्यखंड की त्रिज्या = 16.5 km और θ = 80°

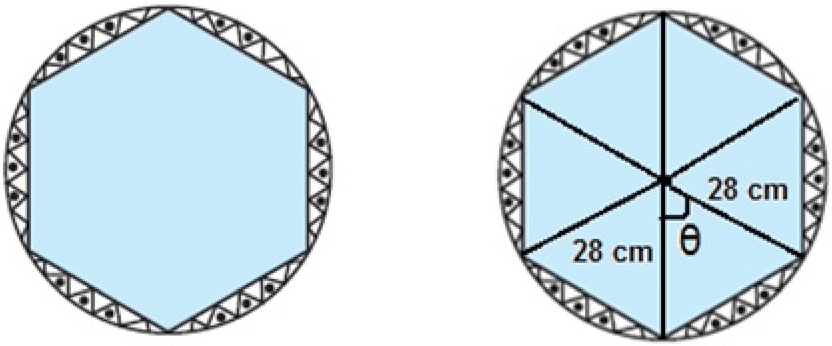
इस प्रकार बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 80^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 2}{9}$$

$$= 189.97 \text{ km}^2$$

एक गोल मेज़पोश पर छः समान डिज़ाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति 12.14 में दर्शाया गया है । यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28 cm है, तो 0.35 रू. प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए ।



हल : मेज़पोश की त्रिज्या = 28 cm

एक त्रिज्यखंड में अंतरित कोण θ = $\frac{360°}{6}$ = 60°

इस प्रकार बने छः डिजाइनों का क्षेत्रफल = $6\left(\frac{\pi r^2 \theta}{360°} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta\right)$

$$= 6\left(\frac{22 \times 28 \times 28 \times 60°}{7 \times 360°} - \frac{1}{2}\ 28 \times 28 \times \sin 60°\right)$$

$$= 6\left(\frac{22 \times 4 \times 28}{6} - 14 \times 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{2464}{6} - \frac{392\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{2464}{6} - \frac{1176\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= 6\left(\frac{2464 - 1176\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= 2464 - 1176 \times 1.7$$

$$= 2464 - 1999.2$$

$$= 464.8\ \text{cm}^2$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 12.1 (पृष्ठ संख्या 247-248)

प्रश्न 1 दो वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 19cm और 9cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि

इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

उत्तर-

पहले वृत्त की त्रिज्या R = 19cm

दुसरे वृत्त की त्रिज्या r = 9cm

नए वृत्त का परिमाप = पहले वृत्त का परिमाप + दुसरे वृत्त का परिमाप,

नए वृत्त का परिमाप $= 2\pi\mathrm{R} + 2\pi\mathrm{r}$

$$= 2\pi(\mathrm{R} + \mathrm{r})$$

$$= 2\pi(19 + 9)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 28$$

$$= 2 \times 22 \times 4$$

$$= 176\mathrm{cm}$$

प्रश्न 2 दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8cm और 6cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

उत्तर-

पहले वृत्त की त्रिज्या R = 8cm

दुसरे वृत्त की त्रिज्या r = 6cm

नए वृत्त का परिमाप = पहले वृत्त का परिमाप + दुसरे वृत्त का परिमाप

नए वृत्त का परिमाप $= \pi\mathrm{R}^2 + \pi\mathrm{r}^2$

$= 2\pi\left(R^2 + r^2\right)$

$= 2\pi(64 + 36)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 100$

$= 628.5\text{cm}$

प्रश्न 3 आकृति 12.3 एक तीरंदाजी लक्ष्य को दर्शाती है, जिसमें केंद्र से बाहर की ओर पाँच क्षेत्र GOLD, RED, BLUE, BLACK और WHITE चिन्हित हैं, जिनसे अंक अर्जित किए जा सकते हैं। GOLD अंक वाले क्षेत्र का व्यास 21cm है। तथा प्रत्येक अन्य पट्टी 10.5cm चौड़ी है। अंक प्राप्त कराने वाले इन पाँचों क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

i. गोल्ड की त्रिज्या $r = \frac{21}{2} = 10.5\text{cm}$

GOLD का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$

$= \frac{11 \times 3 \times 21}{2}$

$= \frac{693}{2} = 346.5\text{cm}^2$

ii. RED के लिए R = 21 और $r = \frac{21}{2}\text{cm}$

RED का क्षेत्रफल $= \pi\left(R^2 - r^2\right)$

$$= \frac{22}{7}\left[21^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{22}{7}\left[21^2 - 10.5^5\right]$$

$$= \frac{22}{7}(21 + 10.5)(21 - 10.5)$$

$\left[\text{चूँकि } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\right]$

$$= \frac{22}{7}(31.5)(10.5)$$

RED $= 1039.5\text{cm}^2$

iii. BLUE के लिए R = 31.5cm और r = 21cm

BLUE का क्षेत्रफल $= \pi\left(R^2 - r^2\right)$

$$= \frac{22}{7}\left[(31.5)^2 - (21)^2\right]$$

$$= \frac{22}{7}(31.5 + 21)(31.5 - 21)$$

$\left[\text{चूँकि } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\right]$

$$= \frac{22}{7}(52.5)(10.5)$$

$$= 22 \times 52.5 \times 1.5$$

BLUE $= 1732.5\text{cm}^2$

iv. BLACK के लिए R = 42 और r = 31.5cm

BLACK का क्षेत्रफल $= \pi\left(R^2 - r^2\right)$

$= \frac{22}{7}\left[(42)^2 - (31.5)^2\right]$

$= \frac{22}{7}(42 + 31.5)(42 - 31.5)$

$\left[\text{चूँकि } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\right]$

$= \frac{22}{7}(73.5)(10.5)$

$= 22 \times 73.5 \times 1.5$

BLACK $= 2425.5\text{cm}^2$

v. WHITE के लिए R = 52.5cm और r = 42cm

WHITE का क्षेत्रफल $= \pi\left(R^2 - r^2\right)$

$= \frac{22}{7}\left[(52.5)^2 - (42)^2\right]$

$= \frac{22}{7}(52.5 + 42)(52.5 - 42)$

$\left[\text{चूँकि } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\right]$

$= \frac{22}{7}(94.5)(10.5)$

$= 22 \times 94.5 \times 1.5$

WHITE $= 3118.5\text{cm}^2$

प्रश्न 4 किसी कार के प्रत्येक पहिये का व्यास 80cm है। यदि यह कार 66km प्रति घंटे की चाल से चाल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है?

उत्तर-

पहिये का व्यास = 80cm

पहिये की त्रिज्या (r) = 40cm

कार की चाल = 66km प्रति घंटा

$= \frac{66 \times 1000}{60}$ m प्रति मिनट

$= 1100$m प्रति मिनट

10 मिनट में तय दुरी = 1100m × 10

= 11000m

अब, एक चक्कर में तय दुरी $= 2\pi r$

$= 2\frac{22}{7} \times 40$

$= \frac{1760}{7}$ cm

या $= \frac{1760}{700}$ m

अत: 10 मिनट में चक्करों की संख्या = $\frac{\text{10 मिनट में तय दुरी}}{\text{1 चक्कर में तय दुरी}}$

$= \frac{11000}{\frac{1760}{700}}$

$= \frac{11000}{1} \times \frac{700}{1760}$ चक्कर

$= \frac{1000}{1} \times \frac{700}{1760}$

$= \frac{100}{1} \times \frac{700}{160}$

$$= \frac{100}{1} \times \frac{700}{4 \times 4}$$

$$= 25 \times 25 \times 7$$

$$= 625 \times 7$$

$$= 4375 \text{ चक्कर}$$

प्रश्न 5 निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए-

यदि एक वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या है।

1. 2 मात्रक
2. π मात्रक
3. 4 मात्रक
4. 7 मात्रक

उत्तर-

a. 2 मात्रक

हल-

वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर हैं-

इसलिए $2\pi r = \pi r^2$

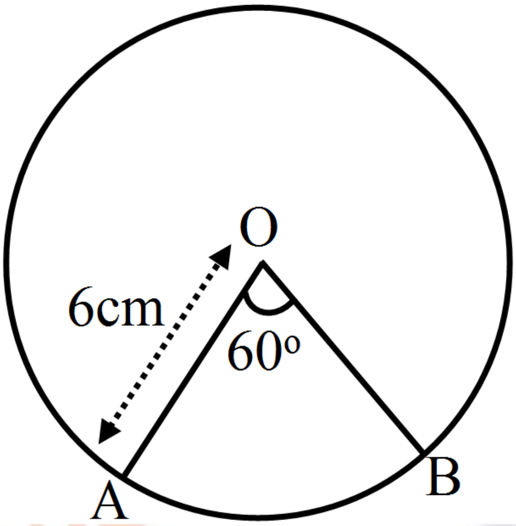
या $2 = r$ [दोनों पक्षों का सरलीकरण करने पर]

अत: वृत्त की त्रिज्या 2 मात्रक है।

प्रश्नावली 12.2 (पृष्ठ संख्या 252-253)

प्रश्न 1 6cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

उत्तर-



त्रिज्या (r) = 6cm और कोण $\theta = 60^\circ$

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

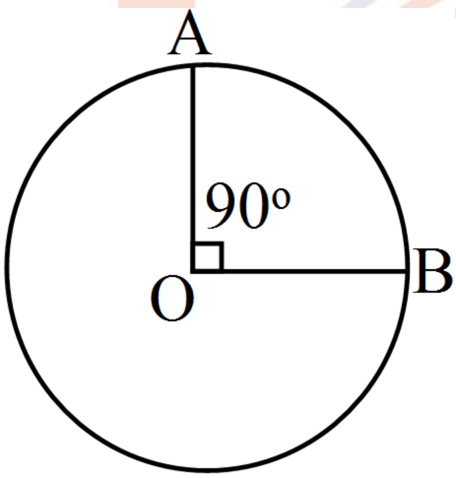
$= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 660^\circ}{360^\circ}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{6}{1}$

$= \frac{132}{7} \text{cm}^2$

प्रश्न 2 एक वृत्त, के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22cm है।

उत्तर-



परिधि = 22cm

या $2\pi r = 22\text{cm}$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22\text{cm}$

$r = 22 \times \frac{7}{2 \times 22}$

$r = \frac{7}{2}\text{cm}$

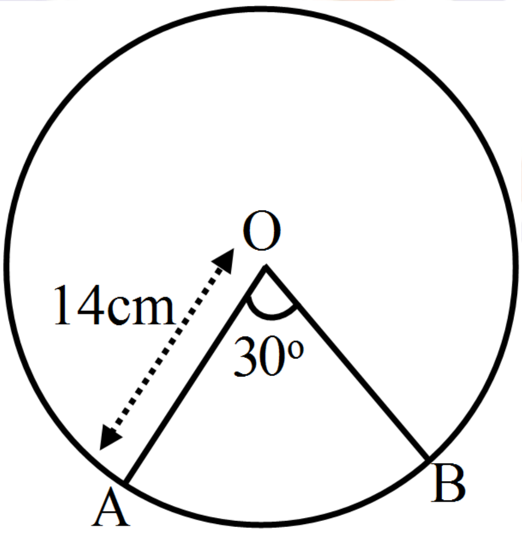
अब, चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= \frac{77}{8}\text{cm}^2$

प्रश्न 3 एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



त्रिज्या (r) = मिनट की सुई जिसकी लंबाई = 14cm

घड़ी की सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण $= \frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

इसलिए 5 मिनट में बना केन्द्रीय कोण $\theta = 6^\circ \times 5 = 30^\circ$

5 मिनट में रचित क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 30^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{22}{1} \times \frac{2 \times 14}{12}$$

$$= \frac{11}{1} \times \frac{14}{3} \mathrm{cm}^2$$

$$= \frac{154}{3} \mathrm{cm}^2$$

प्रश्न 4 10cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर समकोण अंतरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-

i. संगत लघु वृत्तखंड,
ii. संगत दीर्घ त्रिज्यखंड

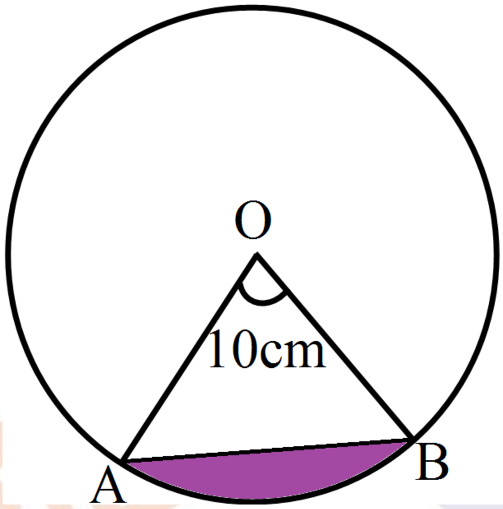
(π = 3.14 का प्रयोग कीजिए)

उत्तर-

i. संगत लघु वृतखंड का क्षेत्रफल-

त्रिज्या (r) = 10cm

$\theta = 90^\circ$

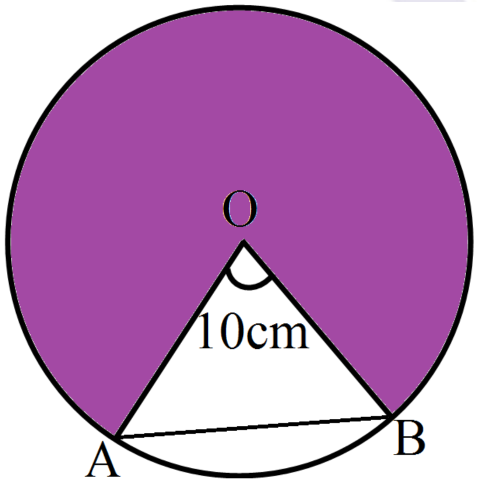


संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90}{360} - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 90^\circ$

$= \frac{314}{4} - 50$

$= 78.5 - 50 = 28.5 \text{cm}^2$



ii. संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2(360-\theta)}{360}$

$$= \frac{3.14\times10\times10(360-90)}{360}$$

$$= \frac{314\times(270)}{360}$$

$$= \frac{314\times3}{4}$$

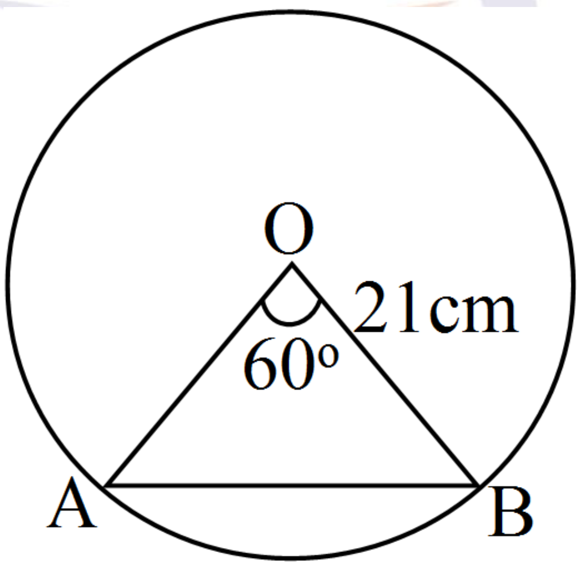
$$= 78.5 \times 3 = 235.5\text{cm}^2$$

प्रश्न 5 त्रिज्या 21cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:

i. चाप की लंबाई।
ii. चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल।
iii. संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल।

उत्तर- त्रिज्या) r) = 21cm

θ = 60°



i. चाप की लंबाई $= \frac{\pi r\theta}{180} = \frac{\frac{22}{7}\times21\times60}{180}$

$= \frac{22\times3}{3} = 22\text{cm}$

ii. चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल-

$= \frac{\pi r^2\theta}{360}$

$= \frac{\frac{22}{7}\times21\times21\times60}{360}$

$= \frac{22\times3\times21}{6}$

$= 11\times21$

$= 231\text{cm}^2$

iii. संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल-

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi r^2\theta}{360} - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

$= \frac{\frac{22}{7}\times21\times21\times60}{360} - \frac{1}{2}21\times21\times\sin60^\circ$

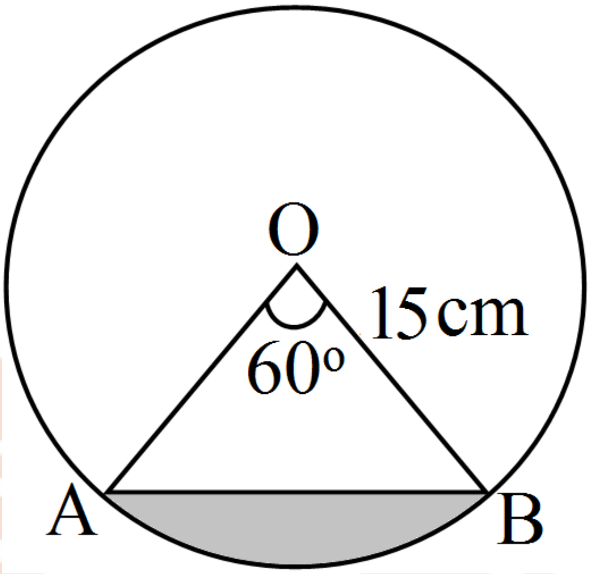
$= \left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)\text{cm}^2 \left[\sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

प्रश्न 6 15cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। और दीर्घ वृत्तखंड़ों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(π = 3.14 का प्रयोग कीजिए और $\sqrt{3}$ = 1.73)

उत्तर- त्रिज्या) r) = 15cm

$\theta = 60°$



i. संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल-

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$$

$$= \frac{3.14 \times 15 \times 15 \times 60}{360} - \frac{1}{2} 15 \times 15 \times \sin 60°$$

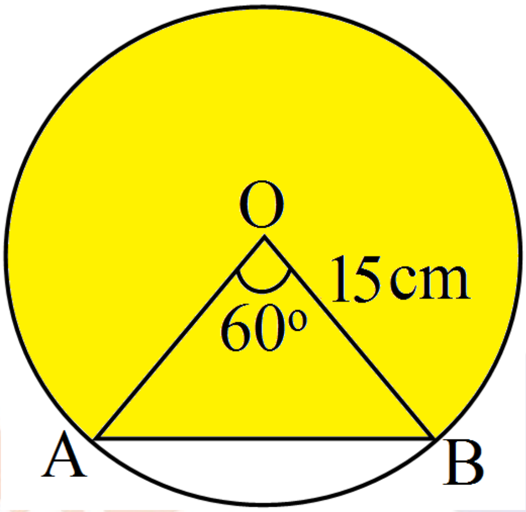
$$= \frac{3.14 \times 5 \times 15}{2} - \frac{225 \times 1.73}{4}$$

$$= 1.57 \times 75 - \frac{389.25}{4}$$

$$= 117.75 - 97.3125$$

$$= 20.4375 cm^2$$

ii. संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल-



संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल,

= वृत्त का क्षेत्रफल - लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$= \pi r^2$ - लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$= 3.14 \times 15 \times 15cm^2 - 20.4375cm^2$

$= 706.5cm^2 - 20.4375cm^2$

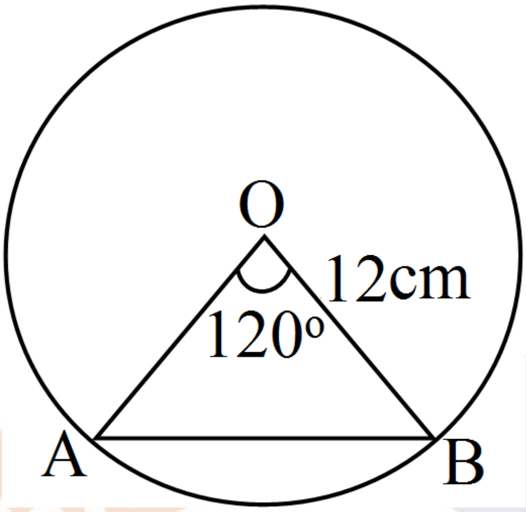
$= 686.0625cm^2$

प्रश्न 7 त्रिज्या 12cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)

उत्तर- त्रिज्या) r) = 12cm

$\theta = 120°$



संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल-

= संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल,

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$$

$$= \frac{3.14 \times 12 \times 12 \times 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} 12 \times 12 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{3.14 \times 12 \times 12}{3} - \frac{72\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3.14 \times 4 \times 12 - 36\sqrt{3}$$

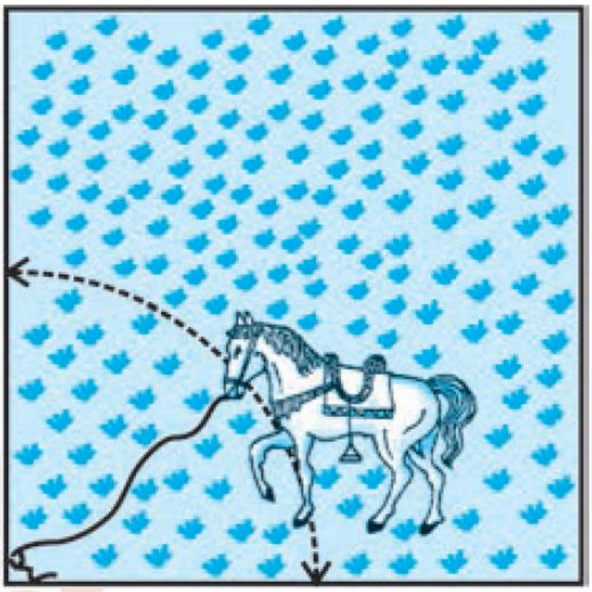
$$= 150.72 - 62.28$$

$$= 88.44 \text{cm}^2$$

प्रश्न 8 15m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति)। ज्ञात कीजिए।

i. मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोडा चार सकता है।
ii. चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5m लंबी रस्सी के स्थान पर 10m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए।

($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)



उत्तर-

बाँधी गई रस्सी की लम्बाई (r) = 5m

$\theta = 90^\circ$ [वर्ग का प्रत्येक कोण]

i. मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा चर सकता है।

बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$= \frac{3.14 \times 5 \times 5 \times 90^\circ}{360^\circ}$

$= \frac{3.174 \times 25}{4}$

$= \frac{78.5}{4}$

$= 19.625 m^2$

ii. घोड़े द्वारा चरे जा सकने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल जब रस्सी की लंबाई 10m हो-

त्रिज्या (r) $= 10\text{m}, \theta = 90^\circ$

बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2 \theta}{360}$

$= \dfrac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90^\circ}{360^\circ}$

$= \dfrac{314}{4}$

$= 78.5\text{m}^2$

चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि-

$= 78.5 - 19.625$

$= 58.875\text{m}^2$

प्रश्न 9 एक वृताकार ब्रुच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए।

i. कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई।

ii. ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल।

उत्तर-

वृत्ताकार ब्रूच का व्यास = 35mm और त्रिज्या (r) $= \frac{35}{2}\mathrm{mm}$

व्यासों की संख्या = 5 और $\theta = \frac{360}{10} = 36^\circ$

i. कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई-

= 5 × व्यास की लंबाई + वृत्त की परिधि

$$= 5 \times 35\pi r$$

$$= 175 + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2}$$

$$= 175 + 22 \times 5$$

$$= 175 + 110$$

$$= 285\mathrm{mm}$$

ii. ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times 36^\circ}{360^\circ}$$

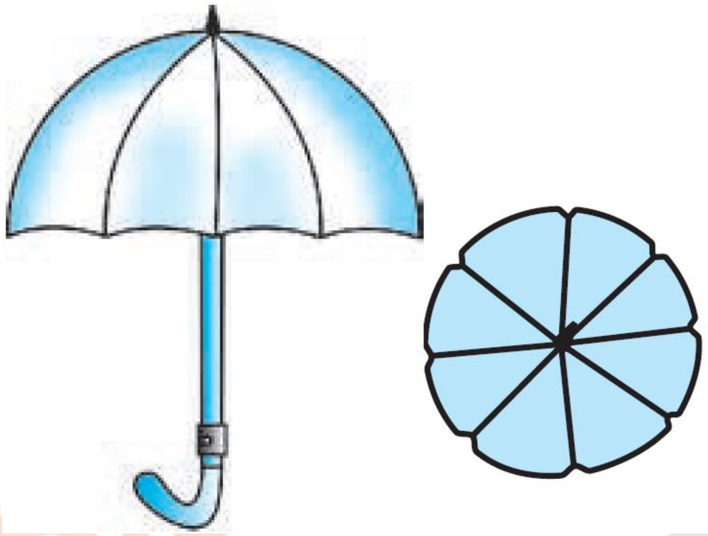
$$= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}}{10}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{11 \times 5 \times 35}{20}$$

$$= \frac{385}{4}\mathrm{mm}^2$$

प्रश्न 10 एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति)। छतरी को 45cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

त्रिज्या (r) = 45cm और $\theta = \frac{360}{8} = 45^{\circ}$

दो क्रमागत तानों के बिच का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{22 \times 45 \times \times 45 \times 45^{\circ}}{7 \times 360^{\circ}}$$

$$= \frac{22 \times 45 \times 45}{7 \times 8} = \frac{22275}{28} \mathrm{cm}^2$$

प्रश्न 11 किसी कार के दो वाइपर (wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पट्टी की लंबाई 25cm है और 115° के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पट्टियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ़ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

वाईपर की लम्बाई = त्रिज्या (r) = 25cm और $\theta = 115^{\circ}$

दोनों वाईपर द्वारा साफ़ किए गए क्षेत्र का क्षेत्रफल $= 2\left(\frac{\pi r^2 \theta}{360}\right)$

$$= 2\left(\frac{22 \times 25 \times 25 \times 115^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$= 2\left(\frac{158125}{252}\right)$$

$$= \frac{158125}{126}\,\mathrm{cm}^2$$

प्रश्न 12 जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस) light house) 80° कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके।

(π = 3.14 का प्रयोग कीजिए।)

उत्तर-

त्रिज्यखंड की त्रिज्या = 16.5km और $\theta = 80^\circ$

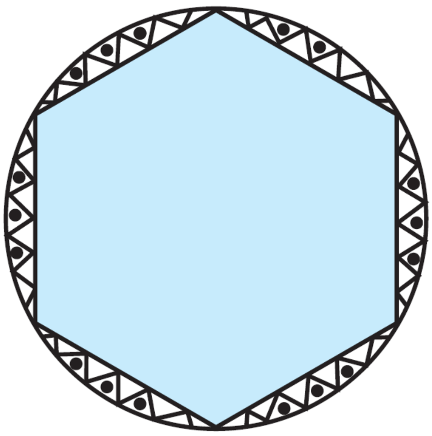
इस प्रकार बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 80^\circ}{360^\circ}$$

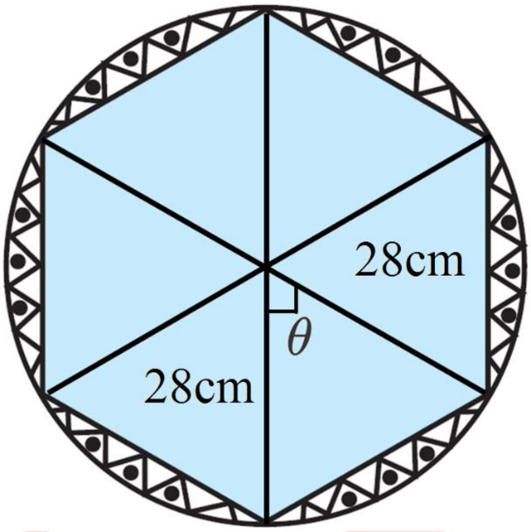
$$= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 2}{9}$$

$$= 189.97\,\mathrm{km}^2$$

प्रश्न 13 एक गोल मेज़पोश पर छः समान डिज़ाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28cm है, तो 0.35 रू. प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए।



उत्तर-



मेंजपोश की त्रिज्या = 28cm,

एक त्रिज्यखंड में अंतरित कोण $\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

इस प्रकार बने छः डिजाइनों क्षेत्रफल $= 6\left(\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta\right)$

$$= 6\left(\frac{22\times28\times28\times60^\circ}{7\times360^\circ} - \frac{1}{2}28 \times 28 \times \sin 60^\circ\right)$$

$$= 6\left(\frac{22\times4\times28}{6} - 14 \times 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{2464}{6} - \frac{392\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{2464}{6} - \frac{1176\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= 6\left(\frac{2464-1176\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= 62464 - 1175 \times 1.7$$

$$= 2464 - 1999.2$$

$$= 464.8\mathrm{cm}^2$$

प्रश्न 14 निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:

त्रिज्या R वाले के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण p° है, निम्नलिखित है-

a. $\frac{P}{180} \times 2\pi r$

b. $\frac{P}{180} \times \pi r^2$

c. $\frac{P}{360} \times 2\pi r$

d. $\frac{P}{720} \times 2\pi r^2$

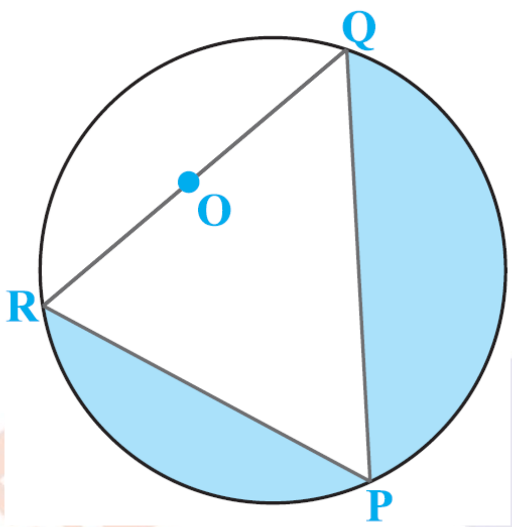
उत्तर-

d. $\frac{P}{720} \times 2\pi r^2$

प्रश्नावली 12.3 (पृष्ठ संख्या 257-261)

प्रश्न 1 (जब तक अन्यथा न कहा जाए, π = $\frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए।(

आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि PQ = 24cm., PR = 7cm. तथा O वृत्त का केंद्र है।



उत्तर-

चूँकि O, वृत्त का केंद्र है।

$\therefore$ QOR एक व्यास है।

$\Rightarrow \angle RPQ = 90^\circ$ [अर्धवृत्त में बना कोण]

समकोण $\triangle RPQ$, हमें प्राप्त होता है-

$$RQ^2 = PQ^2 + PR^2$$

$$\Rightarrow RQ^2 = 24^2 + 7^2$$

$$= 576 + 49 = 625$$

$$\Rightarrow RQ = \sqrt{625} = 25$$

$\therefore$ क्षेत्रफल, $(\triangle RPQ) = \frac{1}{2} PQ \times RP$

$$= \frac{1}{2} \times 24 \times 7 cm^2$$

$$= 12 \times 7 cm^2 = 84 cm^2$$

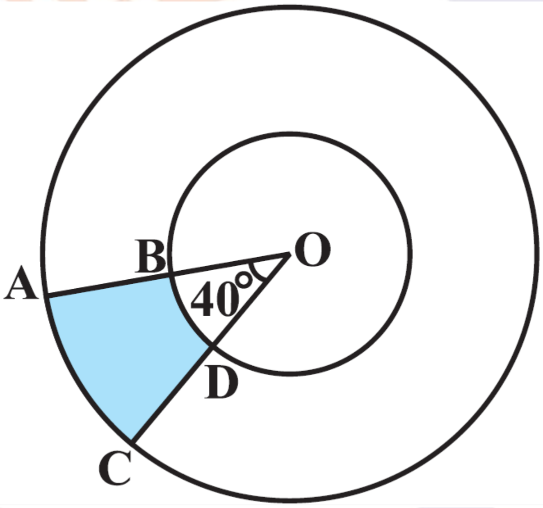
अब, अर्धवृत्त का क्षेत्रफल,

$$=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{25}{2}\times\frac{25}{2}$$

$$=\frac{11\times625}{7\times4}\text{cm}^2$$

$$=\frac{6875}{28}\text{cm}^2=245.54\text{cm}^2$$

प्रश्न 2 आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केंद्र O वाले दोनों सकेंद्रीय वृत्तों की त्रिन्याएँ क्रमशः 7cm और 14cm हैं। तथा ∠AOC = 40° है।



उत्तर-

बाह्यवृत्त की त्रिज्या = 14cm,

यहाँ $\theta = 406^\circ$

$\therefore 40^\circ$ कोण वाले त्रिज्यखंड AOC का क्षेत्रफल,

$$=\frac{40}{360}\times\frac{22}{7}\times14\times14\text{cm}^2$$

$$=\frac{1}{9}\times22\times2\times14\text{cm}^2=\frac{616}{9}\text{cm}^2$$

भीतर वृत्त की त्रिज्या = 7cm,

यहाँ भी $\theta = 40^\circ$

$\therefore$ BOD त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल,

$$\frac{40}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\text{cm}^2$$

अब छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

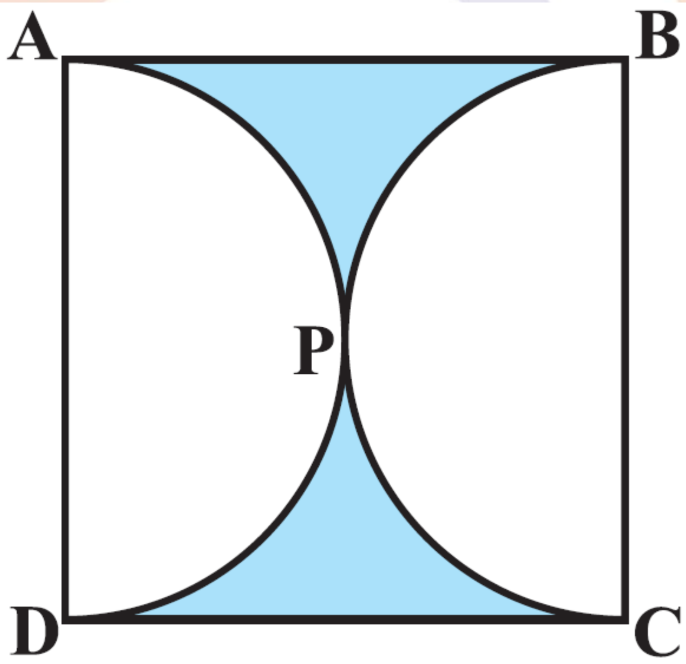
= (त्रिज्यखंड AOC का क्षेत्रफल) - (त्रिज्यखंड BOD का क्षेत्रफल)

$$= \frac{616}{9} - \frac{154}{9}\text{cm}^2$$

$$= \frac{1}{9}[616 - 154]\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \times 462\text{cm}^2$$

$$= \frac{1}{3} \times 154\text{cm}^2$$

प्रश्न 3 आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14cm का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं।



उत्तर-

वर्ग की भुजा = 14cm,

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= $14 \times 14 cm^2$

= $196 cm^2$

अब, वृत्त का व्यास = वर्ग की भुजा = 14cm.

⇒ वृत्त की भुजा $= \frac{14}{7} = 7 \mathrm{cm}$

∴ अर्धवृत APD का क्षेत्रफल-

$$= \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \mathrm{cm}^2$$

$$= 77 \mathrm{cm}^2$$

इसीअर्धवृत BPC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \mathrm{cm}$

$$= 77 \mathrm{cm}^2$$

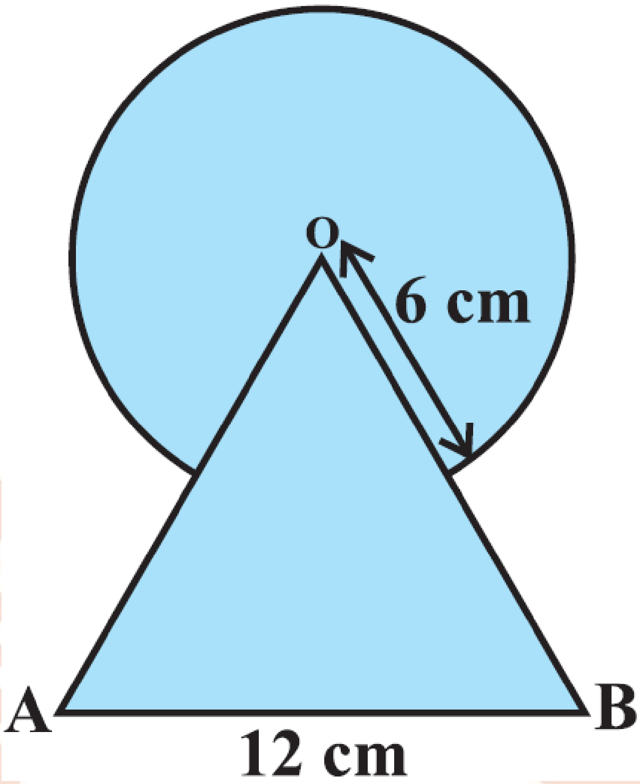
अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

= [वर्ग का क्षेत्रफल] - [(अर्धवृत APD का क्षेत्रफल) + (अर्धवृत BPC का क्षेत्रफल)]

= $196 cm^2$ - $[77 + 77] cm^2$

= $196 cm^2$ - $154 cm^2$ = $42 cm^2$

प्रश्न 4 आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ भुजा 12cm. वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केंद्र मान कर 6cm. त्रिज्या वाला एक वृत्तीय चाप खींचा गया है।



उत्तर-

वृत्त की त्रिज्या (r) = 6cm

$\therefore$ 6cm त्रिज्या के वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi^2$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6\text{cm}^2$$

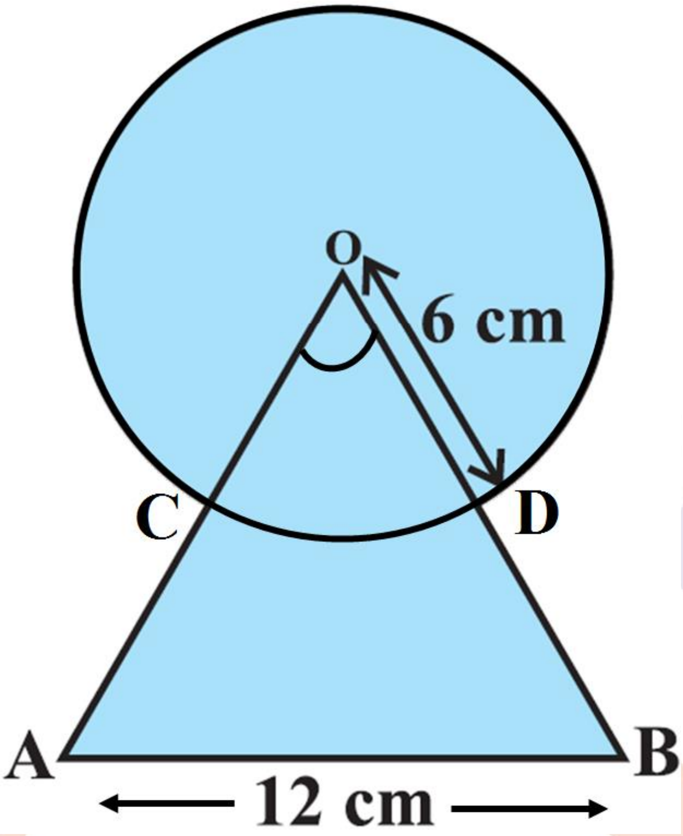
$$= \frac{792}{7}\text{cm}^2$$

12cm भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल-

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 \times 12\text{cm}^2$$

$$= 36\sqrt{3}\text{cm}^2$$

[$\because$ समबाहु $\triangle$ का प्रत्येक कोण $= 60^\circ$]



$\therefore \angle AOB = 60^\circ$

$\therefore$ त्रिज्यखंड COD का क्षेत्रफल-

$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 cm^2$

$= \frac{22 \times 6}{7} cm = \frac{132}{7} cm^2$

अब, छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल-

= [वृत्त का क्षेत्रफल] + [समबाहु $\triangle$ का क्षेत्रफल]

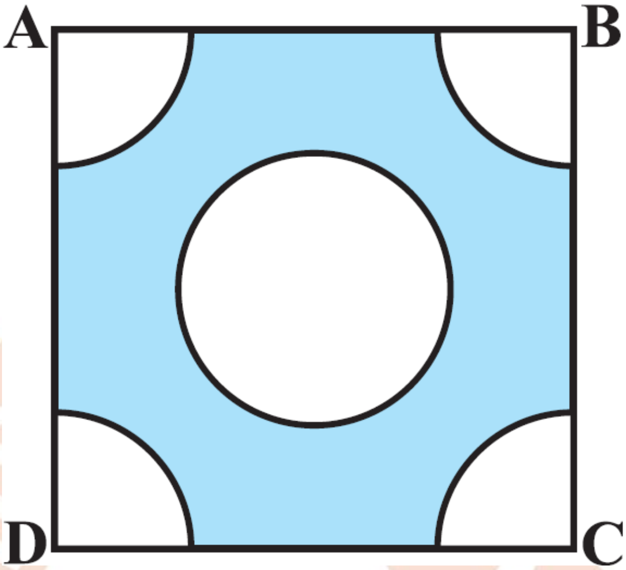
- [त्रिज्यखंड COD का क्षेत्रफल]

$= \frac{792}{7} cm^2 + 36\sqrt{3} cm^2 - \frac{132}{7} cm^2$

$= \left[\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right] cm^2$

प्रश्न 5 भुजा 4cm वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है

तथा बीच में 2cm व्यास का एक वृत्त भी काटा गया है, जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

वर्ग की भुजा = 4cm

$\therefore$ वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = $4 \times 4 cm^2$

$= 16 cm^2$

चूँकि वर्ग के प्रत्येक कोने पर एक वृत्त का चतुर्थांश काटा गया है।

$\because$ त्रिज्या (एक चतुर्थांश वृत्त की) = 1cm

$\therefore$ 1 चतुर्थांश वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 1 \times 1 cm^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} cm^2$$

$\therefore$ 4 चतुर्थांश वृत्त का क्षेत्रफल $4 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{4} cm^2$

$$= \frac{22}{7} cm^2$$

बीच के वृत्त का व्यास = 2cm

बीच के वृत्त का त्रिज्या = 1cm

छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

= [वर्ग ABCD का क्षेत्रफल]

- [(वृत्त 4 चतुर्थांशों का क्षेत्रफल) + (बीच के वृत्त का क्षेत्रफल)]

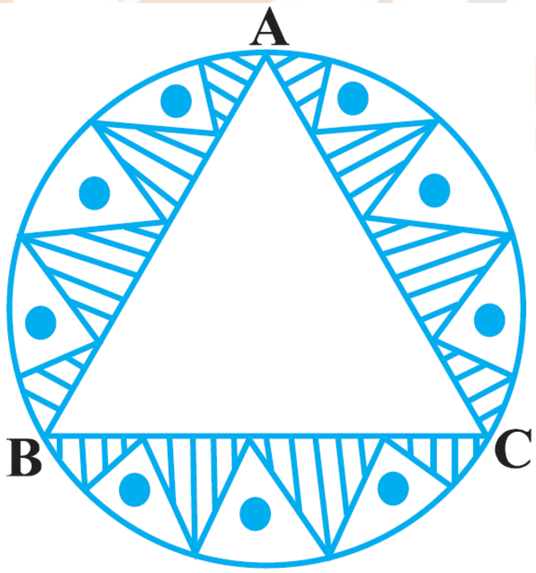
$$= [16\text{cm}^2] - \left[\left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7}\right)\right]\text{cm}^2$$

$$= 16\text{cm}^2 - 2 \times \frac{22}{7}\text{cm}^2$$

$$= 16\text{cm}^2 - \frac{44}{7}\text{cm}^2$$

$$= \frac{112-44}{7}\text{cm}^2 = \frac{68}{7}\text{cm}^2$$

प्रश्न 6 एक वृत्ताकार मेज़पोश, जिसकी त्रिज्या 32cm है, में बीच में एक समबाहु त्रिभुज ABC छोड़ते हुए एक डिज़ाइन बना हुआ है, जैसाकि आकृति में दिखाया गया है। इस डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

त्रिज्या r = 32cm वाले वृत्त का क्षेत्रफल πr^2

$= \frac{22}{7} \times 32 \times 32 cm^2$

$= \frac{22528}{7} cm^2$

चूँकि O वृत्त का केंद्र है,

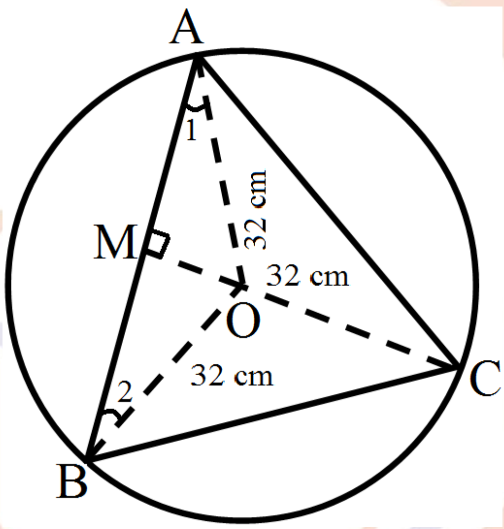
$AO = OB = OC = 32cm$

$\Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 120^\circ$

अब, $\triangle AOB$ में,

$\angle 1 = 30^\circ \because \angle 1 + \angle 2 = 60^\circ$

तथा $OA = OB \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$



यदि $OM \perp AB$ हो, तो

$\frac{OM}{OA} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow OM = OA \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow OM = 32 \times \frac{1}{2} = 16cm \ldots (1)$

तथा $\frac{AM}{AO} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AO = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 32$$

$$\Rightarrow 2AM = AB$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 32\right) = 32\sqrt{3}\text{cm} \ldots (2)$$

अब, (1) और (2) से,

$$\triangle AOB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times OM \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 1632\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$= 256\sqrt{3}\text{cm}^2$$

चूँकि $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल = 3 × $[\triangle AOB$ का क्षेत्रफल$]$

$$= 3 \times 256 \times \sqrt{3}\text{cm}^2$$

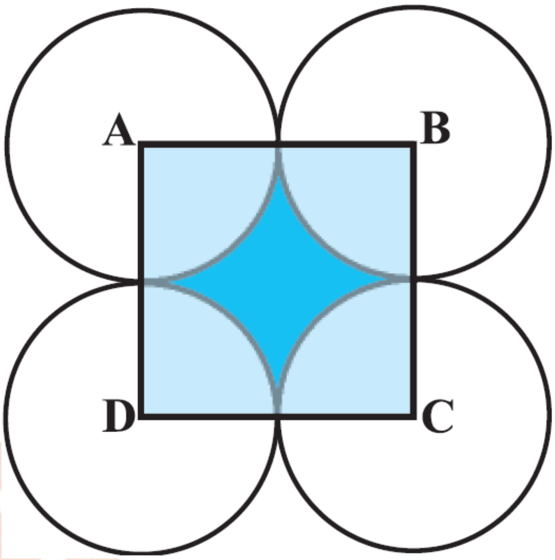
$$= 768\sqrt{3}\text{cm}^2$$

अब, डिजाइन का क्षेत्रफल-

= [वृत्त का क्षेत्रफल] - [समबाहु $\triangle$ का क्षेत्रफल]

$$= \left[\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right]\text{cm}^2$$

प्रश्न 7 आकृति में, ABCD भुजा 14cm वाला एक वर्ग है। A, B, C और D को केंद्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

चूँकि वर्ग ABCD की भुजा = 14cm

$\therefore$ वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = 14 × 14cm^2 = 196cm^2

चूँकि एक वृत्त की त्रिज्या $= \frac{14}{2} = 7\text{cm}$

अब, एक ऐसे त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसकी त्रिज्या 7cm और कोण $\theta = 90^\circ$

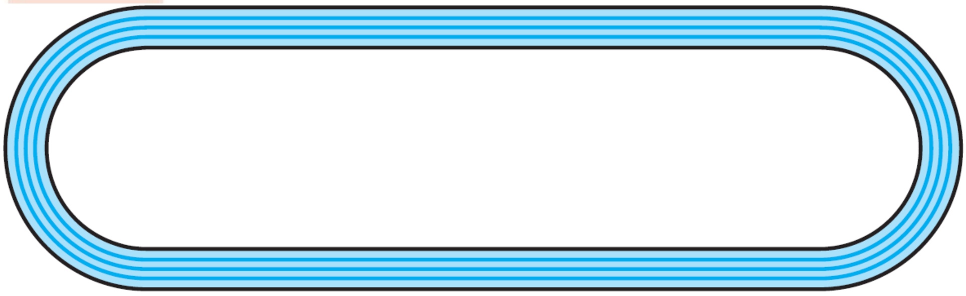
$$= \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\text{cm}^2 = \frac{11 \times 2}{2}\text{cm}^2$$

$\therefore$ ऐसे 4 त्रिज्यखंडो का क्षेत्रफल $= 4 \times \left[\frac{11 \times 7}{2}\right]\text{cm}^2 = 2 \times 11 \times 7\text{cm}^2 = 154\text{cm}^2$

$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = [वर्ग ABCD का क्षेत्रफल] - [4 त्रिज्यखंडो का क्षेत्रफल]

= 196cm^2 - 154cm^2 = 45cm^2

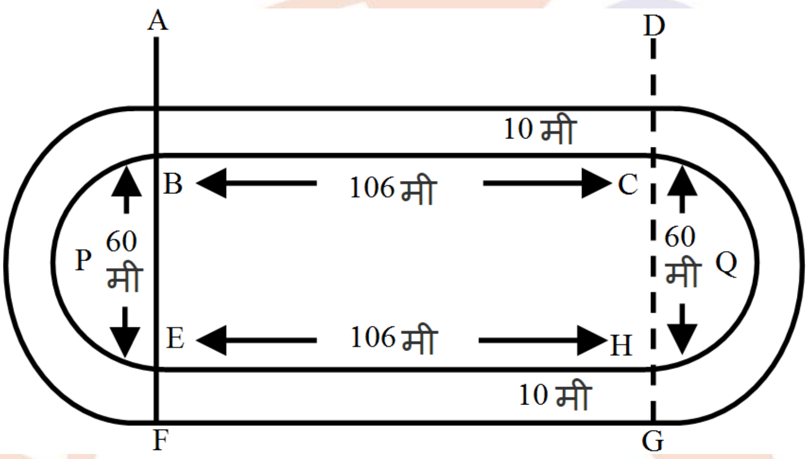
प्रश्न 8 आकृति एक दौड़ने का पथ (racing track) दर्शाती है, जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्धवृत्ताकार हैं।



दोनों आंतरिक समांतर रेखाखंडों के बीच की दूरी 60m है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखंड 106m लंबा है। यदि यह पथ 10m चौड़ा है, तो ज्ञात कीजिए।

i. पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी।
ii. पथ का क्षेत्रफल।

उत्तर-



i. पथ के आंतरिक किनारो के अनुदिश एक पूरा चक्कर की दुरी-

$$= BC + EH + \widehat{BPE} + \widehat{CQH}$$

$$= 106m + 106m + \frac{1}{6}(2\pi r) + \frac{1}{2}(2\pi r)$$

$$= 212m + \frac{1}{2}\left(2\gamma\frac{22}{7} \times 30\right) + \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{22}{7} \times 30\right) \left[\therefore r = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2} \times 60 = 30m\right]$$

$$= 212m + \frac{1320}{7}m = \frac{2804}{7}m$$

ii. अब, पथ का क्षेत्रफल = छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

= [आयत ABCD का क्षेत्रफल] + [आयत EFGH का क्षेत्रफल] + 2[(प्रत्येक 40cm त्रिज्या वाले दो अर्धवृतों का क्षेत्रफल) - (प्रत्येक 30cm त्रिज्या वाले दो अर्धवृतों का क्षेत्रफल)]

∴ पथ का क्षेत्रफल-

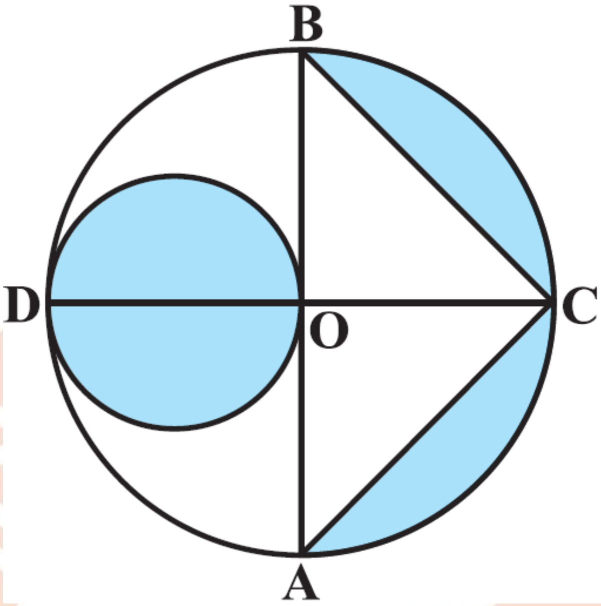
$$= (106 \times 10m^2) + (106 \times 10m^2) + 2\left[\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (40)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \right]m^2$$

$$= 1060m^2 + 1060m^2 - 2\left[\frac{1}{2} \times \frac{22}{7}(40^2 - 30^2)\right]m^2$$

$$= 2120m^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{22}{7}\left[(40+30) \times (40-30)\right]m^2$$

$$= 2120m^2 + \frac{22}{7} \times 70 \times 10m^2 = 2120m^2 + 2200m^2 = 4320m^2$$

प्रश्न 9 आकृति में, AB और CD केंद्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं। तथा OD छोटे वृत्त को व्यास है। यदि OA = 7cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

चूँकि O, वृत्त का केन्द्र है-

OA = 7cm

$\Rightarrow$ AB = 2 OA = 2 × 7 = 14cm

OC = OA = 7cm

चूँकि AB और CD परस्पर लम्ब है $\Rightarrow \mathrm{OC} \perp \mathrm{AB}$

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\triangle \mathrm{ABC}) = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{OC} = \frac{1}{2} \times 14\mathrm{cm} \times 7\mathrm{cm} = 49\mathrm{cm}^2$

पुनः $\mathrm{OD} = \mathrm{OA} = 7\mathrm{cm}$

$\therefore$ छोटे वृत्त की त्रिज्या $= \frac{1}{2}(\mathrm{OD}) = \frac{1}{2} \times 7 = \frac{7}{2}\mathrm{cm}$

$\Rightarrow$ छोटे वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\mathrm{cm}^2 = \frac{11 \times 7}{2} = \frac{77}{2}\mathrm{cm}^2$

अब, बड़े वृत्त की त्रिज्या $= \frac{14}{2}\text{cm} = 7\text{cm}$

$\therefore$ बड़े अर्धवृत OABC क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7} \times 7 \times 7\right)\text{cm}^2 = \frac{11\times7\times7}{7}\text{cm}^2$

$= 11 \times 7\text{cm}^2 = 77\text{cm}^2$

$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल-

= [छोटे वृत्त का क्षेत्रफल] + [बड़े अर्धवृत्त OABC का क्षेत्रफल] - [$\triangle ABC$ का क्षेत्रफल]

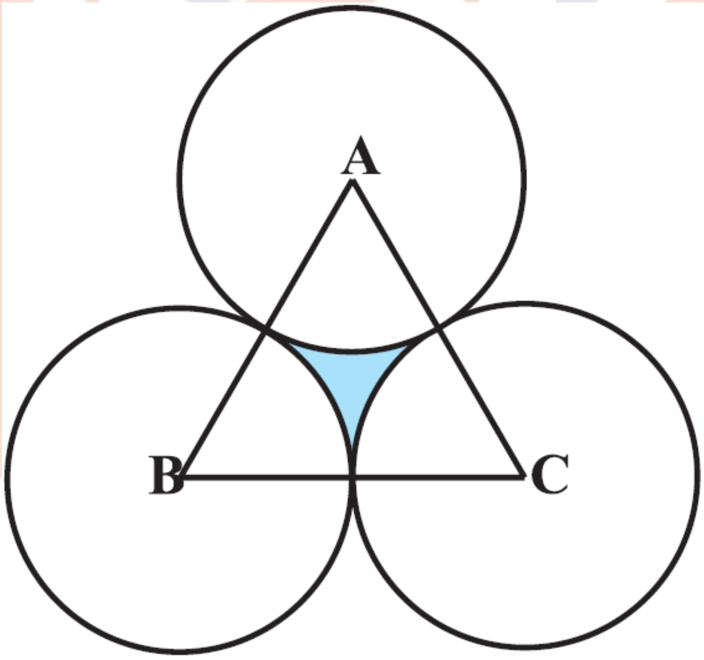
$= \left[\frac{77}{2}\text{cm}^2\right] + [77\text{cm}^2] - [49\text{cm}^2]$

$= \frac{77+154-98}{2}\text{cm}^2 = \frac{231-98}{2}\text{cm}^2$

$= \frac{133}{2}\text{cm}^2 = 66.5\text{cm}^2$

प्रश्न 10 एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 17320.5cm^2 है। इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केंद्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जाता है) देखिए आकृति(। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(π = 3.14 और $\sqrt{3}$ = 1.73205 लीजिए।)



उत्तर-

चूँकि समबाहु $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल = $17320.5 cm^2$ [ज्ञात है]

और एक समबाहु $\triangle$ का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ का (भुजा)^2

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 = 17320.5 [$\because \sqrt{3} = 73205$ (दिया है)]

$\Rightarrow \frac{1.73205}{4}$ (भुजा)^2 = 17320.5 $\Rightarrow \frac{173205}{400000}$ (भुजा)$^2 = \frac{173205}{10}$

$\Rightarrow$ (भुजा)$^2 = \frac{173205}{10} \times \frac{400000}{173205} = 40000$

$\Rightarrow$ (भुजा)^2 = $(200)^2$ $\Rightarrow$ भुजा = 200cm

$\Rightarrow$ प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या $= \frac{200}{2} = 100 cm$

चूँकि एक समबाहु $\triangle$ का प्रत्येक कोण 60^o होती है।

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

$\therefore$ [उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसमे कोण 60^o और त्रिज्या 100cm]

$= \frac{60}{360} \times \frac{314}{100} \times 100 \times 100 cm^2$

$= \frac{1}{3} \times \frac{314}{100} \times 100 \times 100 cm^2 = \frac{15700}{3} cm^2$

चूँकि तीनों त्रिज्यखंड समान है-

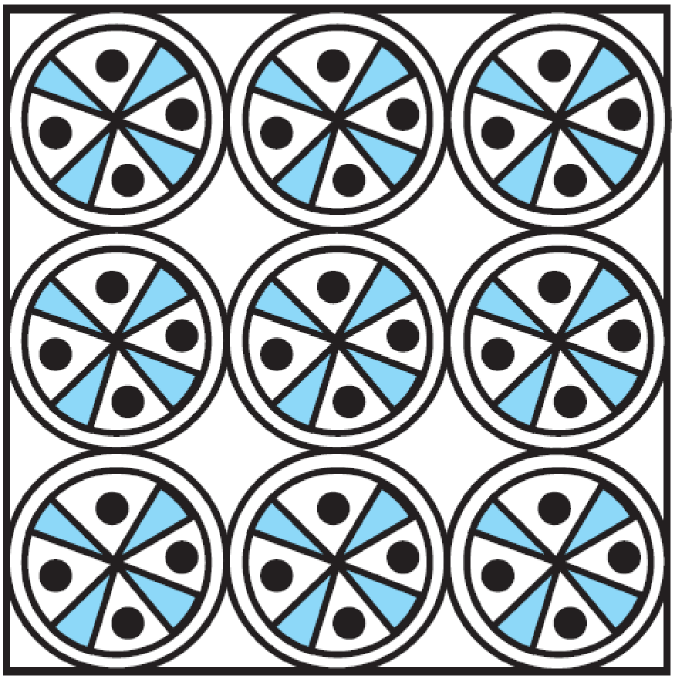
$\therefore$ 3 समान त्रिज्यखंडो का क्षेत्रफल $= 3 \times \frac{15700}{3} cm^2 = 15700 cm^2$

अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल = [समबाहु $\triangle$ का क्षेत्रफल] - [3 समान त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल]

= [$17320.5 cm^2$] - [$15700 cm^2$] = $1620.5 cm^2$

प्रश्न 11 एक वर्गाकार रूमाल पर, नौ वृत्ताकार डिजाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7cm है (देखिए आकृति)। रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

A B



D C

उत्तर-

चूँकि वृत्त परस्पर बाह्मय रूप से स्पर्श करते है-

∴ वर्ग की भुजा = 3 × (वृत्त का व्यास)

= 3 × (7 × 2)cm

$[\because$ व्यास $= 2 \times 7\text{cm}]$

$= 3 \times 14 = 42\text{cm}$

चूँकि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

∴ वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = $(42 \times 42)\text{cm}^2 = 1764\text{cm}^2$

अब, एक वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7cm^2 = 154cm^2$

चूँकि डिजाइन में 9 एक समान वृत्त है-

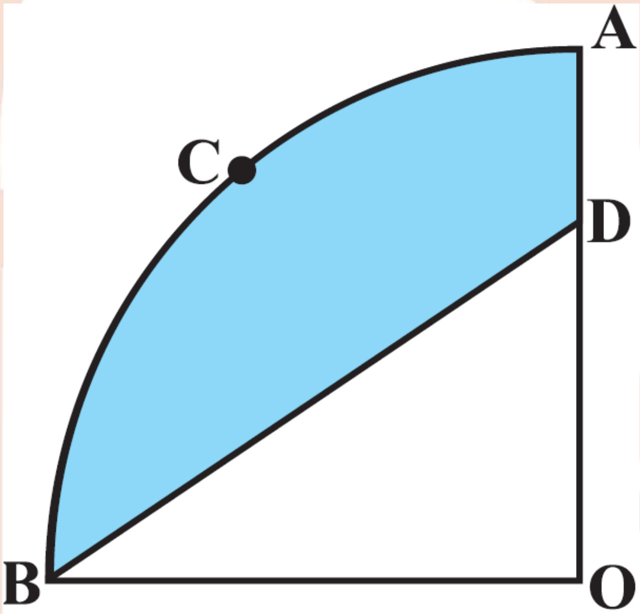
$\therefore$ 9 वृत्तों का क्षेत्रफल = 9 × $154cm^2$ = $1386cm^2$

अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल = [वर्ग का क्षेत्रफल] - [9 समान वृत्तों का क्षेत्रफल]

= $1764cm^2$ - $1386cm^2$ = $378cm^2$

प्रश्न 12 आकृति में, OACB केंद्र O और त्रिज्या 3.5cm वाले एक वृत्त को चतुर्थांश है। यदि OD = 2cm है, तो । निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए-

i. चतुर्थांश OACB
ii. छायांकित भाग।



उत्तर-

यहाँ, वृत्त का केन्द्र O और त्रिज्या 3.5cm है-

$\therefore$ वृत्त के चतुर्थांश OACB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \text{cm}^2$

$= \frac{11}{2} \times \frac{35}{20}\text{cm}^2 = \frac{11\times7}{8}\text{cm}^2 = \frac{77}{8}\text{cm}^2$

अब, क्षेत्रफल $(\triangle BOD) = \frac{1}{2} \times OB \times OD = \frac{1}{2} \times 3.5 \times 2\text{cm}^2$

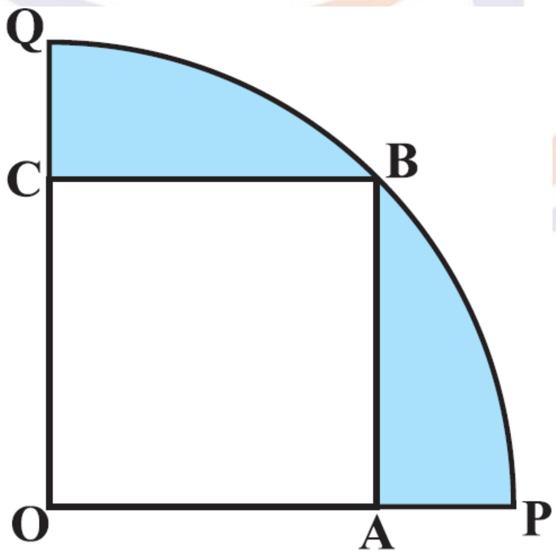
$= \frac{1}{2} \times \frac{35}{10} \times 2\text{cm}^2 = \frac{7}{2}\text{cm}^2$

अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल = [वृत्त के चतुर्थांश OACB का क्षेत्रफल] - $[\triangle BOD$ का क्षेत्रफल$]$

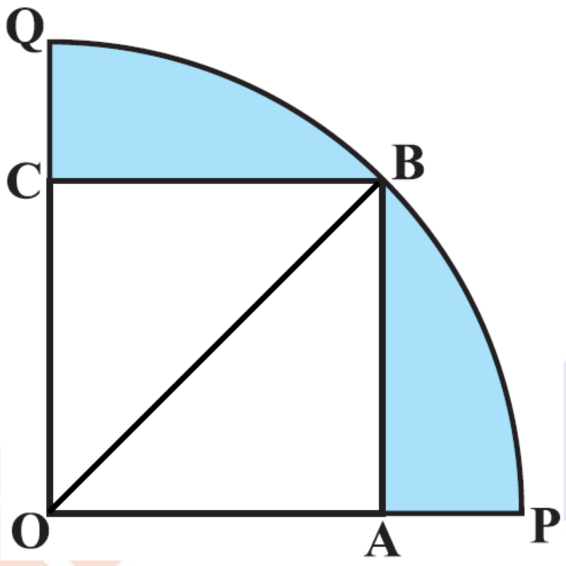
$= \left(\frac{77}{8} - \frac{7}{2}\right)\text{cm}^2 = \frac{77-28}{8}\text{cm}^2 = \frac{49}{8}\text{cm}^2$

प्रश्न 13 आकृति में, एक चतुर्थांश OPBQ के अंतर्गत एक वर्ग OABC बना हुआ है। यदि OA = 20cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(π = 3.14 लीजिए।)



उत्तर-



OABC एक वर्ग है और भुजा OA = 20cm

$$\therefore OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$= \left[20^2 + 20^2\right] = [400 + 400] = [800]$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{800} = 2\sqrt{2}cm$$

इस प्रकार, वृत्त की त्रिज्या $= 20\sqrt{2}cm$

अब, वृत्त के चतुर्थांश OPBQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2$

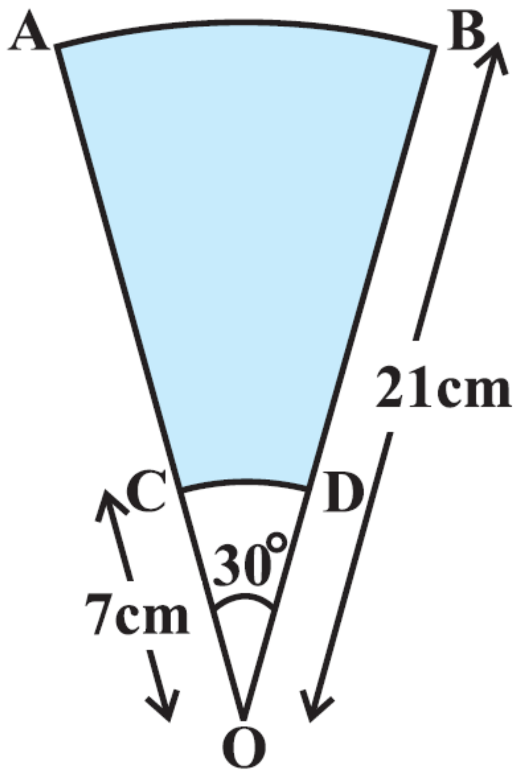
$$= \frac{1}{4} \times \frac{314}{100} \times 800cm^2$$

$$= 314 \times 2 = 628cm^2$$

वर्ग OABC का क्षेत्रफल = 20 × 20cm^2 = 400cm^2

$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 628cm^2 - 400cm^2 = 228cm^2

प्रश्न 14 AB और CD केंद्र O तथा त्रिज्याओं 21cm और 7cm वाले दो संकेंद्रीय वृत्तों के क्रमशः दो चाप हैं) देखिए आकृति(। यदि ∠AOB = 30° है, तो छायांकित भाग को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

बड़े वृत्त की त्रिज्या (R) = 21cm

त्रिज्यखंड का कोण $\theta = 320^{\circ}$

$\therefore$ त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल $= \frac{30}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \mathrm{cm}^2$

$= \frac{11 \times 21}{2} \mathrm{cm}^2 = \frac{231}{2} \mathrm{cm}^2$

छोटे वृत्त की त्रिज्या (r) = 7cm

चूँकि त्रिज्यखंड का कोण = 30^0

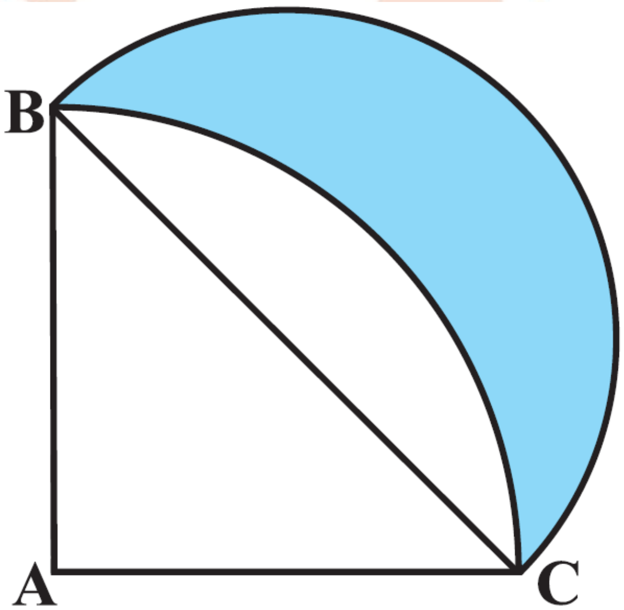
$\therefore$ त्रिज्यखंड COD का क्षेत्रफल $= \frac{30}{360} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7\text{cm}^2 = \frac{77}{6}\text{cm}^2$

$\therefore$ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = [त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल] - [त्रिज्यखंड COD का क्षेत्रफल]

$= \left[\frac{231}{2}\text{cm}^2\right] - \left[\frac{77}{6}\text{cm}^2\right]$

$= \frac{693-77}{6}\text{cm}^2 = \frac{616}{6}\text{cm}^2 = \frac{308}{3}\text{cm}^2$

प्रश्न 15 आकृति में, ABC त्रिज्या 14cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मान कर एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

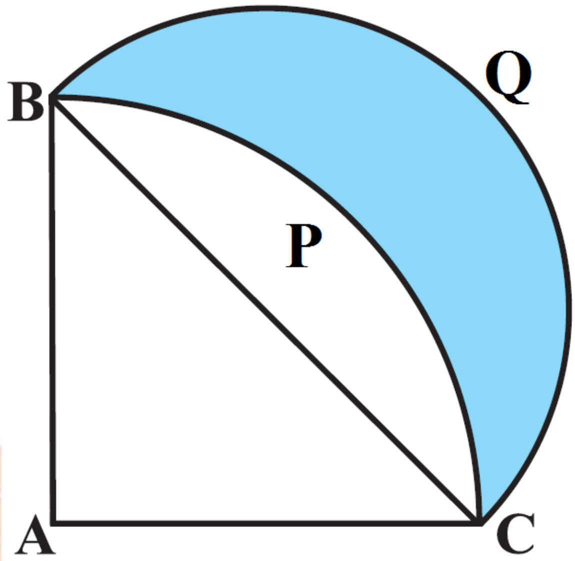
वृत्त के चतुर्थांश की त्रिज्या = 14cm

$\therefore$ चतुर्थांश ABPC का क्षेत्रफल $= \left[\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 4\right]\text{cm}^2$ $\left[\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \text{ का प्रयोग कने पर}\right]$

$= 22 \times 7\text{cm}^2 = 154\text{cm}^2$

चूँकि समकोण $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल-

$\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{लम्ब}$



$= \frac{1}{2} \times 14 \times 14cm^2 = 98cm^2$

$\therefore$ अर्धवृत BPC = $154cm^2 - 98cm^2 = 56cm^2$

समकोण $\triangle ABC$ में, $AC^2 + AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow 14^2 + 14^2 = BC^2 \Rightarrow 196 + 196 = BC^2$

$\Rightarrow BC^2 = 392 \Rightarrow BC = 14\sqrt{2}cm$

$\therefore$ अर्धवृत BQC की त्रिज्या $= \frac{14\sqrt{2}}{2}cm = 7\sqrt{2}cm$

$\therefore$ अर्धवृत BQC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (7\sqrt{2})^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} = 11 \times \sqrt{2} \times 7 \times \sqrt{2}cm^2$

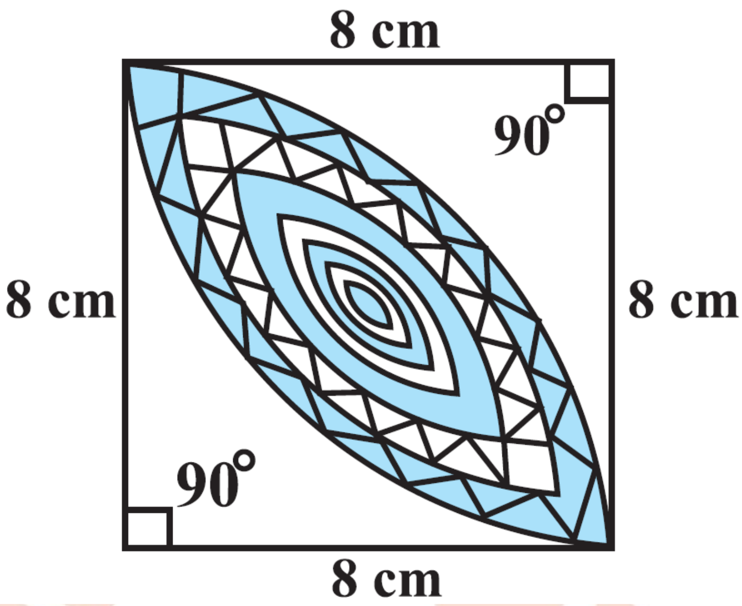
$= 11 \times 7 \times 2cm^2 = 154cm^2$

अब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल = [अर्धवृत BQC का क्षेत्रफल] - [अर्धवृत BPC का क्षेत्रफल]

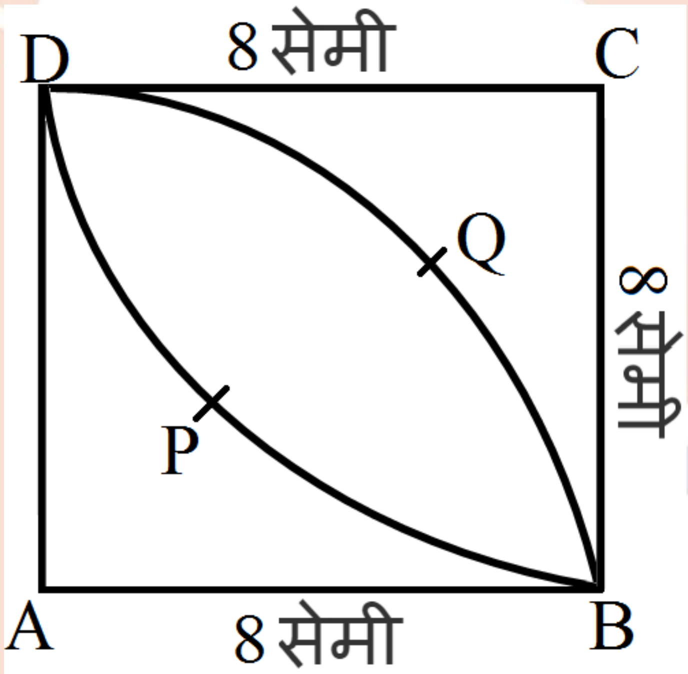
$154cm^2 - 56cm^2 = 98cm^2$

प्रश्न 16 आकृति में, छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो 8cm त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के

चतुर्थांशों के बीच उभयनिष्ठ है।



उत्तर-



भुजा = 8cm,

∴ वर्ग (ABCD) का क्षेत्रफल = 8 × 8cm^2 = 64cm^2

अब, चतुर्थांश ADQB की त्रिज्या = 8cm

∴ चतुर्थांश ADQB क्षेत्रफल $= \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 8^2 \text{cm}^2$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 64\text{cm}^2 = \frac{22 \times 16}{7}\text{cm}^2$$

इसी प्रकार,

चतुर्थांश BPDC का क्षेत्रफल $= \frac{22 \times 16}{7}\text{cm}^2$

दोनों चतुर्थांशों के क्षेत्रफल ला योग $= 2\left[\frac{22 \times 16}{7}\right]\text{cm}^2 = \frac{704}{7}\text{cm}^2$

अब, डिजाइन का क्षेत्रफल = [दोनों चतुर्थांशों के शेतरफालो का योग]

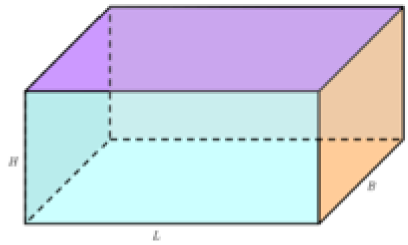
-[वर्ग ABCD का क्षेत्रफल]

$$= \frac{704}{7}\text{cm}^2 - 64\text{cm}^2$$

$$= \frac{704 - 448}{7}\text{cm}^2 = \frac{256}{7}\text{cm}^2$$

घनाभ

घनाभ (क्यूब्वायड) या आयतफलकी वह समान्तरषटफलक है जिसका प्रत्येक फलक आयताकार हो। जब तीनों बीमा (लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई) समान हों तो वह आकार घन (क्यूब) कहलाता है। ईंट, आयतफलकी का सबसे अच्छा उदाहरण है।



घनाभ के सूत्र

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$.

घनाभ का परिमाप = $2(l + b) \times h$.

घनाभ के समस्त पृष्ठों का क्षेत्रफल = 2(लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई)

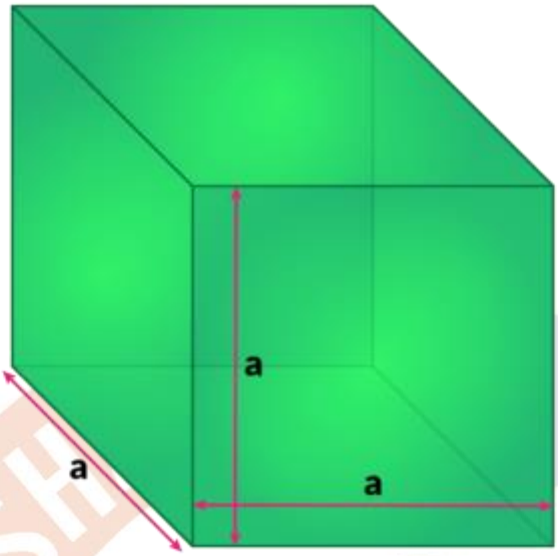
घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$

घनाभ के विकर्ण = √(लम्बाई)^2 + (चौड़ाई)^2 + (ऊँचाई)^2

घन

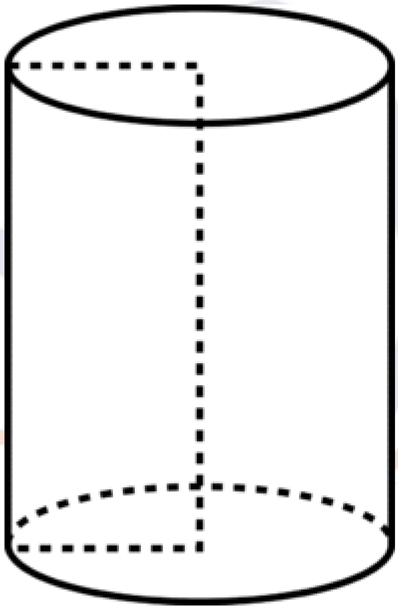
घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा = भुजा^{3} (भुजा पर घतांक 3) घन इकाई / घन यूनिट होता है । जो कि घनाभ के आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊंचाई घन इकाई /घन यूनिट का ही एक रूप होता है । घन एक ऐसी त्रिआयामी आकृति को कहा जाता है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई सामान होती हैं।

घन का आयतन = भुजा × भुजा x भुजा या भुजा^{3}



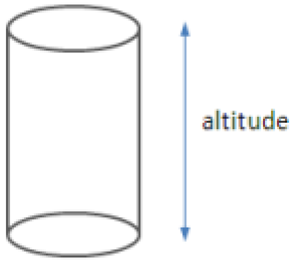
बेलन

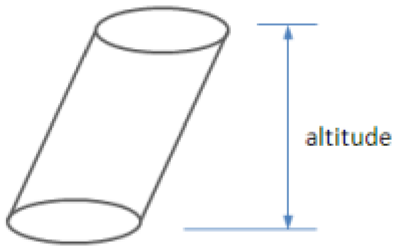
बेलन एक ऐसी त्रिआयामी(3d) ठोस आकृति होती है जोकि दो वृत्त एवं एक वक्र आयत से मिलकर बना होता है। इसके दो सिरे सामान त्रिज्या वाले वृत्त होते हैं एवं पार्श्व प्रष्ठ वक्र(curved) होता है।



समकोणीय एवं परोक्ष बेलन

समकोणीय बेलन एक ऐसा बेलन होता है जिसका अक्ष आधार को समकोण पर काटता है। लेकिन अगर कोई अक्ष आधार को समकोण पर नहीं काट रहा है तो फिर वह बेलन एक परोक्ष बेलन होगा।





बेलन का आयतन एवं क्षेत्रफल

अगर हमें एक बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना है तो हमें इसे सबसे पहले तीन टुकड़ों में बांटना पडेगा। ये तीन टुकड़े होंगे दो सर्वांगसम एवं समान्तर वृत्त एवं वक्र पृष्ठ जो कि एक आयत है।

जैसा कि हम जानते हैं कि एक वृत्त का क्षेत्रफल πr2 होता है। अगर हमारे पास दो वृत्त हैं तो फिर इनका कुल क्षेत्रफल होगा।

= 2 πr2

अब हमें बचे हुए आयत का क्षेत्रफल निकालना है जोकि होता है लम्बाई * चौड़ाई । यहाँ हमारे पास आयत की लम्बाई तो बेलन की ऊंचाई मानी जायेगी। अब जो आयत की चौड़ाई है वह वृत्त के परिमाप के सामान होगी जोकि 2πr होगा। अतः इस आयत का क्षेत्रफल होगा।

= 2πr × h

जब हम इन दोनों टुकड़ों को जोड़ देंगे तो इस बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा।

= 2 πr2 + 2πr × h

अतः बेलन का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2πr(r + h)

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

जैसा कि हम जानते हैं की बेलन का वक्र पृष्ठ सिर्फ एक आयत होता है अतः हमें सिर्फ उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा। यही क्षेत्रफल इस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा।

जैसा की हम जानते हैं एक आयत का क्षेत्रफल होता है :

लम्बाई × चौड़ाई

यहाँ आयत की लम्बाई तो बेलन की ऊंचाई हो जायेगी लेकिन आयत की चौड़ाई वृत्त का परिमाप होगा। अतः हमें वह ज्ञात करना होगा। जैसा कि हम जानते हैं की एक वृत्त का परिमाप होगा :

$= 2\pi r$

अब हम वृत्त के परिमाप को एवं बेलन की ऊँचाई को गुना कर देंगे जिससे हमारे पास बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल या आयत का क्षेत्रफल आया जाएगा।

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r \times h$

बेलन का आयतन

आयतन(volume) का मतलब होता है की कोई त्रिआयामी आकृति अपने अन्दर कितना द्रव्य रख सकती है। इसे हम अक्सर m^3 या cm^3 से व्यक्त करते हैं।

एक बेलन का आयतन (volume of cylinder) निकालना बहुत सरल होता है। इसके लिए हमें बस वृत्त के क्षेत्रफल को बेलन की ऊंचाई से गुना करना पड़ता है।

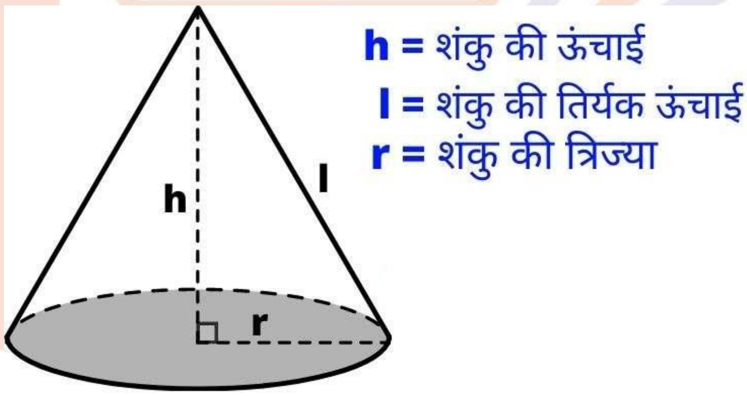
वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

इसे ऊंचाई (h) से गुना करने पर :

बेलन का आयतन $= \pi r^{2h}$

शंकु

शंकु (Cone) एक ऐसी त्रिआयामी (3d) आकृति है जिसका जिसका आधार गोलाकार होता है तथा जिसका शीर्ष एक बिंदु होता है। यदि किसी Shanku का आधार एक वृत्त हो तो उसे हम लम्ब वृत्तीय शंकु कहते है। यह शंकु समान आधार और ऊंचाई वाले बेलन के $\frac{1}{3}$ भाग के बराबर होता है।



एक शंकु में केवल एक आधार होता है एवं गोलाकार होता है। यह Cone का नीचे का हिस्सा होता है। इसे शंकु का फलक भी कहा जाता है।

एक शंकु में एक शीर्ष होता है। शंकु का शीर्ष एक बिंदु होता है।

एक शंकु की चौड़ाई उसके गोलाकार फलक का व्यास होता है अर्थात शंकु के गोलाकार भाग का व्यास ही शंकु की चौड़ाई होती है।

शंकु का क्षेत्रफल

शंकु का क्षेत्रफल दो प्रकार का होता है एक पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा दूसरा वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल। आइये अब Shanku के क्षेत्रफल को निकालने के लिए महत्वपूर्ण सूत्रों को जाने।

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल –

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए हमें शंकु की त्रिज्या तथा शंकु की तिर्यक (तिरछी) ऊंचाई का पता होना चाहिए। तभी हम शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल निकाल सकते हैं।

शंकु का वक्र पृष्ठिय क्षेत्रफल = πRL

अगर हमें शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा त्रिज्या दी गयी हो तो हम शंकु की तिर्यक ऊंचाई निकाल सकते हैं। इसके लिए हम शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को इसके सूत्र के बराबर लिख कर और थोड़ी सी कैल्कुलेशन करके मान ज्ञात कर सकते हैं। ऐसा ही हम अन्य सूत्रों के साथ भी कर सकते हैं।

शंकु के पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने का मतलब होता है शंकु के चारों तरफ का क्षेत्रफल। इसमे शंकु के तल में मौजूद वृत का क्षेत्रफल भी शामिल होता है। शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए हम सूत्र का उपयोग करते हैं। Cone के पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल में हम शंकु तथा वृत के क्षेत्रफल को जोड़ देते हैं। क्योंकि Shanku के तल में वृत भी होता है।

जब हम शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृत्त का क्षेत्रफल भी जोड़ देते हैं तो हमें शंकु का पूर्ण पृष्ठीय या सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + वृत्त का क्षेत्रफल = शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\pi rl + \pi rl = \pi r(l + r)$$

अन्तः शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r (l + r)$

यहाँ R या r का मतलब शंकु के आधार की त्रिज्या होता है तथा L या l का मतलब शंकु की तिर्यक अर्थात तिरछी ऊंचाई होता है। पाई का मान हम $\frac{22}{7}$

या 3.14 लेते हैं।

अगर किसी सवाल या प्रश्न में हमें शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए कहा जाए तो हम शंकु का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालेंगे ना कि वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

शंकु का आयतन

शंकु की बनावट के आधार पर हम Shanku का आयतन शंकु के समान आधार वाले एक बेलन के आयतन का तीसरा हिस्सा मानते हैं। जितना समान आधार वाले बेलन का आयतन होगा उसका तीसरा हिस्सा उसी आधार वाले शंकु का आयतन होगा।

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \times$ बेलन का आयतन

इस प्रकार से Shanku का आयतन बेलन के आयतन का तीसरा हिस्सा होगा। इसलिए हम बेलन के आयतन को 3 से भाग कर देते हैं और हमें शंकु के आयतन का सूत्र मिल जाएगा।

शंकु का आयतन $\frac{1}{3}\ \pi r^2 h$

गोला

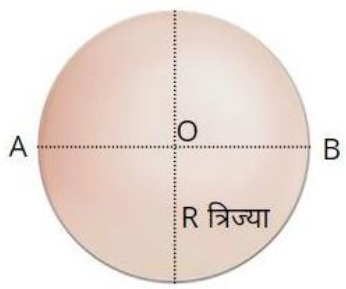
गोले के सभी सूत्रों को याद करने से पहले जरुरी है कि गोले से सम्बंधित सभी प्रकार के मूल बातों को जान ले. जैसे कि गोला किसे कहते हैं अथवा गोले की परिभाषा क्या है, गोले की त्रिज्या, गोले का व्यास तथा गोले कितने प्रकार के होते हैं।

गोले का केंद्र व त्रिज्या

केंद्र (Center):- जिस निश्चित बिंदु या नियत बिंदु से एक त्रि-आयामी गोले का निर्माण होता है, वह नियत बिंदु गोले का केंद्र कहलाता है। जैसा की ऊपर दिए गए चित्र नियत बिंदु O गोले का केंद्र (Center) है।

त्रिज्या की माप :- किसी भी गोले की केंद्र से उसकी सतह के बीच के रेखाखंड की लम्बाई को गोले की त्रिज्या कहते हैं। जैसा की ऊपर दिए गए गोले की चित्र से स्पष्ट हो रहा है केंद्र बिंदु (O) तथा सतह बिंदु (A) के बीच की रेखाखंड की लम्बाई ही गोले की त्रिज्या की माप है। गोले के त्रिज्या की माप से गोले का आयतन तथा सम्पूर्ण वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल (Gole ka Formula) आसानी से निकाल सकते हैं।

गोले का आयतन तथा क्षेत्रफल



गोले का व्यास (Diameter of Sphere):- किसी भी गोले के सतह पर स्थित एक बिंदु से दुसरे बिंदु पर जाने वाली रेखाखंड की लम्बाई जो की केंद्र बिंदु से होकर गुजरती है, गोले का व्यास (Diameter of Gola) कहलाता है। ऊपर दिए चित्र में देख सकते हैं की रेखाखंड AB गोले का व्यास है जो की गोले के केंद्र बिंदु से होकर गुजर रही है।

गोले की व्यास की लम्बाई या सूत्र = 2 x गोले की त्रिज्या

गोले का व्यास (Diameter of Sphere):- किसी भी गोले के सतह पर स्थित एक बिंदु से दुसरे बिंदु पर जाने वाली रेखाखंड की लम्बाई जो की केंद्र बिंदु से होकर गुजरती है, गोले का व्यास (Diameter of Gola) कहलाता है। ऊपर दिए चित्र में देख सकते हैं की रेखाखंड AB गोले का व्यास है जो की गोले के केंद्र बिंदु से होकर गुजर रही है।

गोले की व्यास की लम्बाई या सूत्र = 2 x गोले की त्रिज्या

एक गोले के बाहरी सतह द्वारा घिरा हुआ भाग, गोले का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल होता है. चूँकि एक गोले में में कोई किनारा या कोना नहीं होता है, इसीलिए एक गोले का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल ही गोले के सम्पूर्ण क्षेत्रफल होता है. अतः निम्नलिखित संबंधो द्वारा एक गोले का सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल का फार्मूला या सूत्र को परिभाषित करते हैं।

माना कि एक गोला है जिसका केंद्र बिंदु O है, त्रिज्या R है तथा व्यास की लम्बाई D है, अतः

गोले का सम्पूर्ण वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = 4 πR2

जहाँ π = 3.14

किसी भी गोले (Sphere) का क्षेत्रफल का फार्मूला (Formula) जब गोले का व्यास (Diameter) दिया हुआ हो.

Sphere ka Kshetrafal Formula = π D2

गोला का आयतन का सूत्र

किसी भी एक गोले के आयतन निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है. चूँकि गोला दो प्रकार का होता है, ठोस गोला तथा खोखला गोला. अतः दोनों ही गोले का आयतन का फार्मूला निकालने के लिए गोले के त्रिज्या (खोखले गोले के लिए बाह्य तथा अन्तः त्रिज्या) का माप तथा व्यास की लम्बाई पता होना चाहिए.

ठोस गोला वह गोला होता है जो कि अंदर से भरा हुआ होता है, अर्थात गोले के आंतरिक भाग खोखला नहीं होता है। गोले का उदाहरण – पृथ्वी, उपग्रह, बॉल बेअरिंग.

माना कि ठोस गोले का त्रिज्या R तथा व्यास D है, तब

गोले का आयतन का फार्मूला $= \frac{4}{3}\pi R^3$

यदि गोले का व्यास का माप दिया हो उस स्थिति में गोले का आयतन का सूत्र

गोले का आयतन का सूत्र $= \left(\frac{1}{6}\right)\pi D^3$

.खोखले गोला का आयतन का सूत्र

ऐसा गोला जो की अंदर से खाली या खोखला होता है वह खोखला गोला या गोलीय कोश कहलाता है. गोलीय कोश का उदाहरण- बॉल, बलून आदि.

किसी भी खोखले गोला या गोलीय कोश के आयतन का सूत्र (Formula) निकालने के लिए गोले का आतंरिक त्रिज्या तथा बाह्य त्रिज्या का माप पता होना चाहिए.

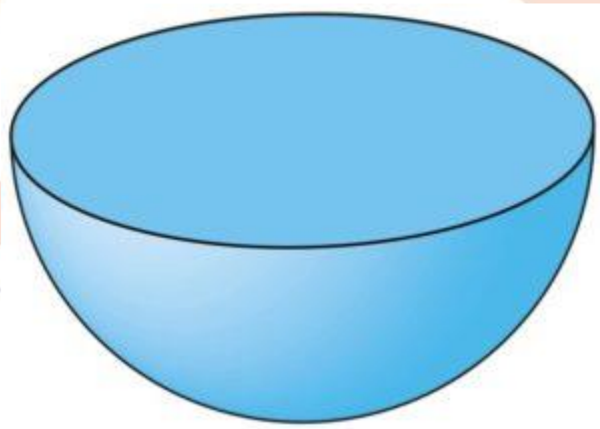
माना कि खोखले गोले का आंतरिक त्रिज्या (r) तथा बाह्य त्रिज्या R है, तब

खोखले गोले का आयतन का सूत्र $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - R^3)$

यदि खोखले गोले का आतंरिक तथा बाह्य व्यास का माप क्रमशः d तथा D है तब,

खोखले गोले का आयतन का सूत्र = $\left(\frac{1}{6}\right)\pi(D^3 - d^3)$

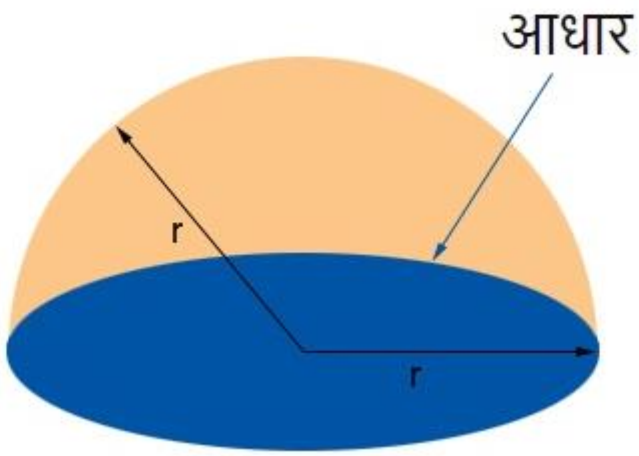
अर्द्ध गोला (Hemisphere)



जैसा की इसके नाम से ही प्रतीत हो रहा है, एक अर्ध गोला पूरे गोले का आधा भाग होता है। जब एक गोले को दो भागों में बांटा जाता है उससे हमें जो आकृति मिलती है वह अर्धगोला कहलाती है। इसकी एक सतह चपटी(flat) होती है एवं दूसरी सतह वक्र(curved) होती है।

ऊपर दी गयी आकृति में जैसा कि आप देख सकते हैं यहाँ इस त्रिआयामी आकृति की ऊपर वाली सतह चपटी(flat) है एवं जो दूसरी सतह है वह वक्र(curved) है। अतः यह एक अर्धगोला कहलायेगा।

अर्ध गोले की दो ही सतह होती हैं। पहली सतह चपटी होती है एवं दूसरी सतह वक्र अर्थात curved होती है। चपटी सतह उस अर्ध गोले का आधार कहलाती है।



एक अर्धगोले की जो वृत्त के आकार सतह होती है उसके हर बिंदु की केंद्र से दूरी समान होती है।

अर्ध गोला एक पूरे गोले को दो भागों में विभाजित किये जाने से बना होता है।

एक पूरे गोले को जब हम दो भागों में विभाजित करते हैं तो हमारे पास दो अर्धगोले हो जाते हैं।

अर्धगोले का आयतन

जैसा कि हम जानते हैं एवं पहले भी देख चुके हैं एक अर्ध गोला पूरे गोले का आधा भाग होता है अतः इसका आयतन भी पूरे गोले का आयतन का आधा होगा।

अतः

अर्ध गोले का आयतन $= \frac{1}{2} \times$ गोले का आयतन

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\ \pi r^3$$

अतः अर्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^2$

अर्धगोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक अर्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एक पूर्ण गोले के क्षेत्रफल को आधा करने पर निकल गया। अब हमें इसका पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना है तो बस इसके आधार का क्षेत्रफल जोड़ना होगा।

अर्ध गोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

अतः अर्ध गोले का पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$ वर्ग unit

ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

पृष्ठीय क्षेत्रफल किसी 3D आकृति पर मौजूद सभी फलकों (या सतहों) के क्षेत्रफल का योग होता है। कुछ ठोस एक से अधिक आकृतियों के संयोजन से बनी होती हैं। इस प्रकार की आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सभी संयोजित आकृतियों का क्षेत्रफल अलग-अलग ज्ञात करके सभी क्षेत्रफल का योग करें।

उदाहरण के लिए पानी या केरोसिन के टैंकर को लेते हैं जो बीच में बेलनाकार तथा दोनों तरफ अर्द्धगोलाकार होता है। इसलिए इस ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तीनों भागों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा। इससे हमें प्राप्त होता है:

ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = एक अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + दूसरे अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

उदाहरण

रशीद को जन्मदिन के उपहार के रूप में एक लट्टू मिला, जिस पर रंग नहीं किया गया था। वह इस पर अपने मोमिया रंगों से रंग करना चाहता है। यह लट्टू एक शंकु के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोला अध्यारोपित है। लट्टू की पूरी ऊँचाई 5 cm है और इसका व्यास 3.5 cm है। उसके द्वारा रंग किया जाने वाला क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ लीजिए।

हल:

यह लट्टू दो आकृतियों के संयोजन से बना है। एक अर्द्धगोला तथा उसके ऊपर शंकु है। अतः, हम वहाँ पर प्राप्त परिणाम को सुविधाजनक रूप से यहाँ प्रयोग कर सकते हैं। अर्थात्

लट्टू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2} \text{cm}^2$$

साथ ही, शंकु की ऊँचाई = लट्टू की ऊँचाई – अर्धगोलीय भाग की ऊँचाई (त्रिज्या)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}$$

अतः शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} = 3.7$ cm

इसलिए शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi rl = \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\ cm^2$

लट्टू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times 22/7 \times 3.5/2 \times 3.5/2\ cm^2 + 22/7 \times 3.5/2 \times 3.7\ cm^2$

$= 39.6\ cm^2$

उदाहरण

एक आकृति सजावट के लिए प्रयोग होने वाला ब्लॉक दो ठोसों से मिलकर बना है। इनमें से एक घन है और दूसरा अर्धगोला है। इस ब्लॉक का आधार 5 cm कोर या किनारे वाला एक घन है और उसके ऊपर लगे हुए अर्धगोले का व्यास 4.2 cm है। इस ब्लॉक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 22/7 लीजिए।)

हल:

घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6 \times$ (कोर)^2 = $6 \times 5 \times 5\ cm^2 = 150\ cm^2$

अब, घन का वह भाग जिस पर अर्धगोला लगा हुआ है पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्मिलित नहीं होगा।

अतः ब्लॉक का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल – अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल + अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = (150 + \pi r^2)\ cm^2$

$= 150\ cm^2 + 22/7 \times 4.2 \times 4.2\ cm^2$

$= 150\ cm^2 + 13.86\ cm^2 = 163.86\ cm^2$

ठोसों के संयोजन का आयतन

इस अनुच्छेद में यह ज्ञात करने की कोशिश करेंगे कि इस प्रकार के ठोसों के आयतन किस प्रकार परिकलित किए जाते हैं। ध्यान दीजिए कि पृष्ठीय क्षेत्रफल परिकलित करने में हमने दोनों घटकों (ठोसों) के पृष्ठीय क्षेत्रफलों को जोड़ा नहीं था क्योंकि इनको मिलाने की प्रक्रिया में पृष्ठीय क्षेत्रफल का कुछ भाग लुप्त हो गया था। परंतु आयतन परिकलित करने की स्थिति में ऐसा नहीं होगा। दो आधारभूत ठोसों के संयोजन से बने ठोस का आयतन वास्तव में दोनों घटकों के आयतनों के योग के बराबर होता है, जैसाकि हम नीचे दिए उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण

शांता किसी शेड में एक उद्योग चलाती है। यह शेड एक घनाभ के आकार का है जिस पर एक अर्धबेलन आरोपित है। यदि इस शेड के आधार की विमाएँ 7 m × 15 m हैं तथा घनाभाकार भाग की ऊँचाई 8 m है तो शेड में समावेशित हो सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। पुनः यदि यह मान लें कि शेड में रखी मशीनरी 300 m^3 स्थान घेरती है तथा शेड के अंदर 20 श्रमिक हैं जिनमें से प्रत्येक 0.08 m^3 के औसत से स्थान घेरता है तब शेड में कितनी हवा होगी? (π = 22/7 लीजिए।)

हल

शेड के अंदर हवा का आयतन (जब इसमें कोई व्यक्ति या मशीनरी नहीं है) घनाभ के अंदर की हवा और अर्धबेलन के अंदर की हवा के आयतनों को मिला कर प्राप्त होगा। अब, घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15 m, 7 m और 8 m हैं। साथ ही, अर्धबेलन का व्यास 7 m और ऊँचाई 15 m है।

इसलिए वांछित आयतन = घनाभ का आयतन + ½ बेलन का आयतन

आगे, मशीनरी द्वारा घेरा गया स्थान = 300 m^3

तथा 20 श्रमिकों द्वारा घेरा गया स्थान = $20 \times 0.08\ m^3 = 1.6\ m^3$

अतः, शेड में उस समय हवा का आयतन, जब उसमें मशीनरी और श्रमिक हैं

$= 1128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15\ m^3$

उदाहरण

एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को जिन गिलासों से जूस देता था। उस बेलनाकार गिलास का आंतरिक व्यास 5 cm था, परंतु गिलास के निचले आधार (तली) में एक उभरा हुआ अर्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 cm थी, तो गिलास की आभासी धारिता तथा उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

हल

चूँकि गिलास का आंतरिक व्यास = 5 cm है और ऊँचाई = 10 cm है, इसलिए गिलास की आभासी धारिता = $\pi r^2 h$

$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10\ cm^3 = 196.25\ cm^3$

परंतु इसकी वास्तविक धारिता उपरोक्त धारिता से आधार में बने अर्धगोले के आयतन के बराबर कम है।

अर्थात् कमी बराबर है $2/3\ \pi r^3 = 2/3 \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5\ cm^3$

$= 32.71\ cm^3$

अतः गिलास की वास्तविक धारिता = आभासी धारिता – अर्धगोले का आयतन

$= 196.25\ cm^3 - 32.71\ cm^3$

$= 163.54\ cm^3$

उदाहरण

एक ठोस खिलौना एक अर्धगोले के आकार का है जिस पर एक लंब वृत्तीय शंकु आरोपित है। इस शंकु की ऊँचाई 2 cm है और आधार का व्यास 4 cm है। इस खिलौने का आयतन निर्धारित कीजिए।

यदि एक लंब वृत्तीय बेलन इस खिलौने के परिगत हो तो बेलन और खिलौने के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

हल

मान लीजिए BPC अर्धगोला है तथा ABC अर्धगोले के आधार पर खड़ा एक शंकु है। अर्धगोले (और शंकु की भी) की त्रिज्या = ½ × 4 cm = 2 cm इसलिए खिलौने का आयतन = $2/3\ \pi r^3 + 1/3\ \pi r^2 h$

$= [2/3 \times 3.14 \times (2)^3 + 1/3 \times 3.14 \times (2)^2 \times 2]\ cm^3$

$= 25.12\ cm^3$

अब, मान लीजिए कि दिए गए ठोस के परिगत लंब वृत्तीय बेलन है। इस लंब वृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या = HP = BO = 2 cm है तथा इसकी ऊँचाई

EH = AO + OP = (2 + 2) cm = 4 cm है।

अतः, वांछित आयतन = लंब वृत्तीय बेलन का आयतन – खिलौने का आयतन

$= (3.14 \times 22 \times 4 - 25.12)\ cm^3$

$= 25.12\ cm^3$

इस प्रकार, दोनों आयतनों का अंतर = $25.12\ cm^3$ है।

एक ठोस का एक आकार से दूसरे आकार में रूपांतरण

एक ठोस आकृति को अन्य आकार के दूसरे ठोस आकृति में परिवर्तित करने पर आकर में रूपांतरण हो जाता हैं जबकि आयतन में किसी प्रकार का कोई परिवर्तन नहीं होता है। उदाहरण के लिए पांच लीटर की बाल्टी से पानी एक गोलाकार घड़े में डाला जाता है तब आकृति में रूपांतरण होता है जबकि आयतन एक समान रहता है। एक उदाहरण केमाध्यम से इसे समझने का प्रयास करते हैं।

उदाहरण

मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 cm और आधार त्रिज्या 6 cm वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल:

शंकु का आयतन = $1/3 \times \pi \times 6 \times 6 \times 24\ cm^3$

यदि गोले की त्रिज्या r है तो उसका आयतन $4/3\ \pi r^3$ है।

चूँकि शंकु के रूप में और गोले के रूप में मिट्टी के आयतन बराबर हैं, इसलिए

$= 4/3\ \pi r^3 = 1/3 \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$

अर्थात् $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

अतः $r = 3 \times 2 = 6$

इसलिए, गोले की त्रिज्या 6 cm है।

उदाहरण

सेल्वी के घर की छत पर बेलन के आकार की एक टंकी है। इस टंकी में एक भूमिगत टंकी में भरे पानी को पंप द्वारा पहुँचा कर टंकी को भरा जाता है। यह भूमिगत टंकी एक घनाभ के आकार की है, जिसकी विमाएँ 1.57 m × 1.44 m × 95 cm हैं। छत की टंकी की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 95 cm है। यदि भूमिगत टंकी पानी से पूरी भरी हुई थी, तो उससे छत की टंकी को पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में पानी कितनी ऊँचाई तक रह जाएगा? छत की टंकी की धारिता की भूमिगत टंकी की धारिता से तुलना कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

हल:

छत की टंकी का आयतन = भूमिगत टंकी से निकाले गए पानी का आयतन

अब, छत की टंकी (बेलन) का आयतन = $\pi r^2 h$

$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \text{ m}^3$

भूमिगत टंकी के पानी से पूरी भरी होने पर पानी का आयतन

$= l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95 \text{ m}^3$

छत की टंकी को पानी से पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में शेष बचे पानी का आयतन

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)] \text{ m}^3 = (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2) \text{ m}^3$

इसलिए, भूमिगत टंकी में शेष बचे पानी की ऊँचाई = (उसमें बचे पानी का आयतन)/($l \times b$)

$= (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)/(1.57 \times 1.44) \text{ m}$

$= 0.475 \text{ m} = 47.5 \text{ cm}$

साथ ही, (छत की टंकी की धारिता)/ (भूमिगत की टंकी की धारिता)

$= (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)/ (1.57 \times 1.44 \times 0.95) = 1/2$

अतः, छत की टंकी की धारिता भूमिगत टंकी की धारिता की आधी है।

शंकु का छिन्नक

एक दिए हुए शंकु को उसके आधार के समांतर किसी तल द्वारा काटते हैं और इस तल के एक ओर बने शंकु को हटा देते हैं, तो तल के दूसरी ओर बचे शंकु के भाग को शंकु का छिन्नक कहते हैं। हम शंकु के छिन्नक के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? इसे एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण

हनुमप्पा और उसकी पत्नी गंगाम्मा गन्ने के रस से गुड़ बना रहे हैं। उन्होंने गन्ने के रस को गर्म करके राब (शीरा) बना ली है, जिसे शंकु के छिन्नक के आकार के साँचों में डाला जाता है, जिनमें से प्रत्येक के दोनों वृत्तीय फलकों के व्यास क्रमशः 30 cm और 35 cm हैं तथा साँचे की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 14 cm है। यदि 1 cm^3 राब का द्रव्यमान लगभग 1.2 g है तो प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का द्रव्यमान ज्ञात करें। (π = 22/7 लीजिए)

हल

चूँकि साँचा एक शंकु के छिन्नक के आकार का है, इसलिए इसमें भरी जा सकने वाली राब का आयतन $= \pi/3\ h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

जहाँ r_1 बड़े आधार की त्रिज्या है और r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

$= 1/3 \times 22/7 \times 14[(35/2)^2 + (30/2)^2 + (35/2 \times 30/2)]\ cm^3 = 11641.7\ cm^3$

यह दिया है कि 1 cm^3 राब का द्रव्यमान 1.2 g है। अतः प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का भार द्रव्यमान = (11641.7 × 1.2) g

= 13970.04g = 13.97 kg = 14 kg (लगभग)

उदाहरण

धातु से बनी एक खुली बाल्टी शंकु के एक छिन्नक के आकार की है, जो उसी धातु के बने एक खोखले बेलनाकार आधार पर आरोपित है (देखिए आकृति 13-23)। इस बाल्टी के दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 45 cm और 25 cm हैं तथा बाल्टी की कुल ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 40 cm और बेलनाकार आधार की ऊँचाई 6 cm है। इस बाल्टी को बनाने में प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि हम बाल्टी की मुठिया (या हत्थे) को इसमें सम्मिलित नहीं कर रहे हैं। साथ ही, उस पानी का आयतन ज्ञात कीजिए जो इस बाल्टी में धारण कर सकता है। (π = 22/7 लीजिए)

हल

बाल्टी की कुल ऊँचाई = 40 cm है, जिसमें आधार की ऊँचाई भी सम्मिलित है। इसलिए शंकु के छिन्नक की ऊँचाई (40 – 6) cm = 34 cm है।

अतः, शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

जहाँ r_1 = 22.5 cm, r_2 = 12.5 cm और h = 34 cm

अतः $l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2}$

$= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44$ cm

इसमें प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल = शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + वृत्तीय आधार का क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= [\pi \times 35.44\ (22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\ \pi \times 12.5 \times 6]\ cm^2$

$= 22/7 \times [1240.4 + 156.25 + 150]\ cm^2$

$= 4860.9\ cm^2$

अब, बाल्टी में आ सकने वाले पानी का आयतन, जिसे बाल्टी की धारिता भी कहते हैं

$= (\pi \times h)/3\ (r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

$= 22/7 \times 34/3 \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5]$

$= 22/7 \times 34/3 \times 943.75\ cm^3 = 33615.48\ cm^3$

= 33.62 लीटर (लगभग)

शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

किसी शंकु के छिन्नक के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल निम्न सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है:

छिन्नक का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi l(r_1 + r_2)$, जहाँ l तिर्यक ऊँचाई है. जहाँ l छिन्नक की तिर्यक लम्बाई है r_1 बड़े आधार वाले भाग की त्रिज्या है जबकि r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

शंकु के छिन्नक का आयतन

शंकु के छिन्नक का आयतन निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं:

$= \pi/3\ h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$

जहाँ h छिन्नक की ऊंचाई है r_1 बड़े आधार की त्रिज्या है तथा r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

उदाहरण

एक शंकु के छिन्नक, जो 45 cm ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएँ 28 cm और 7 cm हैं। इसका आयतन, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

हल:

इस छिन्नक को दो लंब वृत्तीय शंकुओं OAB और OCD के अंतर के रूप में देखा जा सकता है।

मान लीजिए सेंटीमीटर में शंकु OAB की ऊँचाई h_1 है और तिर्यक ऊँचाई l_1 है, अर्थात् $OP = h_1$ और $OA = OB = l_1$ है।

मान लीजिए शंकु OCD की सेंटीमीटर में ऊँचाई h_2 और तिर्यक ऊंचाई l_2 है।

हमें $r_1 = 28$ cm, $r_2 = 7$ cm और छिन्नक की ऊँचाई h = 45 cm है।

साथ ही $h_1 = 45 + h_2$ (1)

सबसे पहले हमें क्रमशः शंकुओं OAB और OCD की ऊँचाइयों h_1 और h_2 को निर्धारित करना आवश्यक है।

चूँकि त्रिभुज OPB और OQD समरूप हैं (क्यों?), इसलिए हमें प्राप्त है:

$h_1/ h_2 = 28/7 = 4/1$ (2)

(1) और (2) से हमें $h_2 = 15$ और $h_1 = 60$ प्राप्त होता है

अब, छिन्नक का आयतन = शंकु OAB का आयतन – शंकु OCD का आयतन

$= [1/3 \times 22/7 \times (28)^2 \times 60 - 1/3 \times 22/7 \times (7)^2 \times 15]\ cm^3 = 48510\ cm^3$

शंकु OAB तथा शंकु OCD की तिर्यक ऊँचाइयाँ क्रमशः l_1 और l_2 नीचे दर्शाए अनुसार प्राप्त होती हैं:

$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55$ cm

$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 66.20$ cm

इस प्रकार छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$= 22/7 \times 28 \times 66.20 - 22/7 \times 7 \times 16.55 = 54.61\ cm^2$

अब, छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $+ \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 5461.5\ cm^2 + 22/7\ (28)^2\ cm^2 + 22/7\ (7)^2\ cm^2$

$= = 5461.5\ cm^2 + 2464\ cm^2 + 154\ cm^2 = 8079.5\ cm^2$

स्मरणीय तथ्य

- आधारभूत ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु और गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन (को मिलाने से) से बने ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल निर्धारित करना।
- ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बने ठोसों के आयतन ज्ञात करना।
- जब किसी शंकु को उसके आधार के समांतर किसी तल द्वारा काटकर एक छोटा शंकु हटा देते हैं, तो जो ठोस बचता है, वह शंकु का एक छिन्नक कहलाता है।

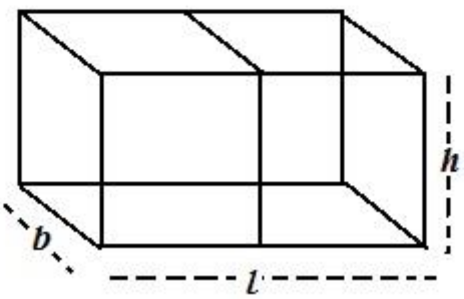
❖ दो घनों, जिनमे से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, के सलंग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है | इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल:

एक घन का आयतन = 64 cm3

एक किनारा = (64)1/3

= 4 cm



दो घनों के फलकों को मिलाने पर

l = 4 + 4 = 8 cm

b = 4 cm

h = 4 cm

इसप्रकार इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(lb + bh + lh)

= 2(8×4 + 4×4 + 8×4)

= 2(32 + 16 + 32)

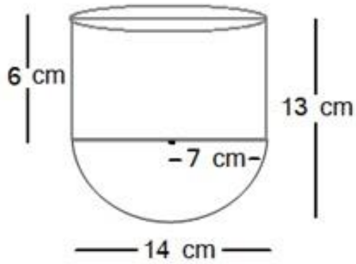
= 2×80

= 160 cm2

अत: इस घनाभ का प्राप्त पृष्ठीय क्षेत्रफल 160 cm2 है |

कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है | अर्धगोले का व्यास 14 cm है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13 cm है | इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



अर्धगोले का व्यास = 14 cm

अर्धगोले की त्रिज्या $r = \frac{14}{2}$ cm = 7 cm

बर्तन की कुल ऊँचाई H = 13 cm

बेलना भाग की ऊँचाई h = 13 cm - 7 cm = 6 cm

बेलनाकार भाग की त्रिज्या r = 7 cm

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

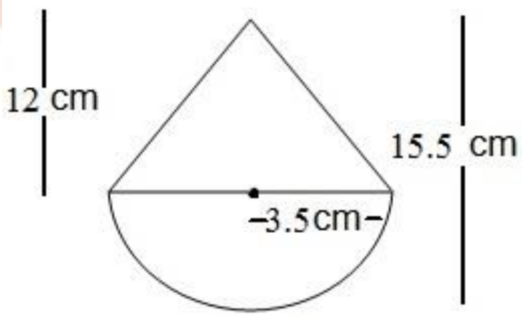
$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(6 + 7)$

$= 44 \times 13$

$= 572\ cm^2$

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल 572 cm^2 है |

❖ एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्ध गोले पर अध्यारोपित है | इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है | इस खिलोने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल:

अर्धगोलाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5 cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5 cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 15.5 – 3.5 = 12 cm

शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$l = \sqrt{12^2 + 3.5^2}$

$l = \sqrt{144 + 12.25}$

$l = \sqrt{156.25}$

$l = 12.5$ cm

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi rl + 2\pi r^2$

$= \pi r(l + 2r)$ [दोनों त्रिज्या बराबर रहने पर]

$= \frac{22}{7} \times 3.5(12.5 + 2 \times 3.5)$

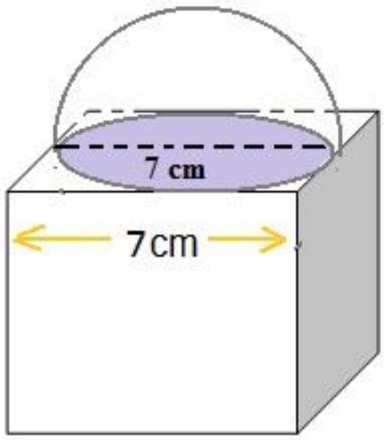
$= 22 \times 0.5(12.5 + 7)$

$= 11(19.5)$

$= 214.5 \text{ cm}^2$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 214.5 cm^2 है |

❖ भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लाक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है | अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है ? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल :

घनाकार ब्लॉक का एक किनारा = 7 cm

अर्धगोले का अधिकतम व्यास d = 7 cm

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ cm

ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल – अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

⇒ ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6a2 + 2πr2 – πr2

= 6a2 + πr2   [a = घन का एक किनारा]

$= 6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

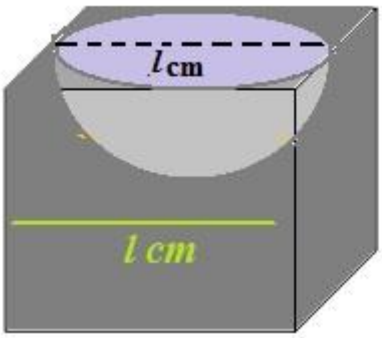
$= 6 \times 49 + \frac{77}{2}$

$= 294 + 38.5 = 332.5 \text{ cm}^2$

अत: ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 332.5 cm^2

❖ घनाकार ब्लाक के एक फलक को अन्दर की ओर से काट कर एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है की अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है | शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



माना अर्धगोले का ब्यास d = l इकाई

अत: त्रिज्या r = $\frac{l}{2}$ इकाई

और घन का एक किनारा a = l इकाई

(चूँकि घन का किनारा अर्धगोले के ब्यास के बराबर है)

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल – अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

= 6a2 + 2πr2 – πr2 [a = घन का एक किनारा]

= 6a2 + πr2

$= 6l^2 + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2$

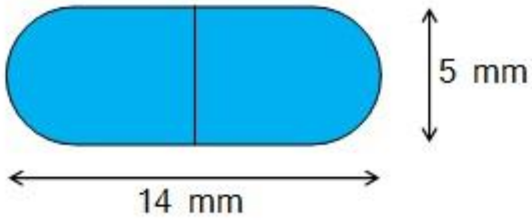
$= 6l^2 + \pi\frac{l^2}{4}$

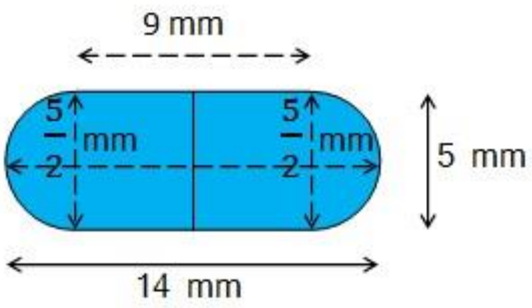
$= \frac{24\,l^2 + \pi\,l^2}{4}$

$= \frac{1}{4}(24 + \pi)\,l^2$ वर्ग इकाई

❖ दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक – एक अर्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति 13.10) | पुरे कैप्सूल की लंबाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल





यहाँ बेलन का ब्यास, अर्धगोले के ब्यास के बराबर है |

अत: अर्धगोले का ब्यास D = 5 mm

इसलिए, त्रिज्या $r = \frac{5}{2}$ mm

और बेलन का ब्यास $d = 5$ mm

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{5}{2}$ mm

बेलन की ऊँचाई h = कैप्सूल की लंबाई - $2r$

$h = 14$ mm - 5 [चूँकि $2r = D$]

$= 9$ mm

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 (अर्धगोलों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2 \times 2\pi r2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r(2r + h)$

$= 2\times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} (5 + 9)$

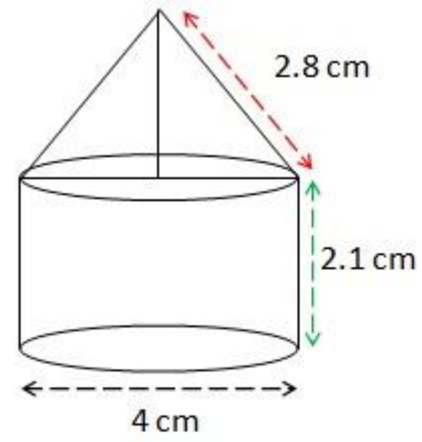
$= 2\times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \times 14$

$= 2 \times 22 \times 5$

$= 220 \text{ mm}^2$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 220 \text{ mm}^2$

❖ कोई तंबू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु आध्यारोपित है | यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और क्रमशः 2.1 m और 4 m है तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8 m है तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए | साथ ही, 500 रू प्रति m2 की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए | (ध्यान दीजिए कि तंबू के आधार को कैनवस से नहीं ढका जाता है |)



हल :

तम्बू के बेलनाकार भाग का ब्यास = 4 cm

अत: त्रिज्या r = 2 cm

बेलनाकार भाग की ऊँचाई h = 2.1 cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई l = 2.8 cm

ब्यास = 4 cm

और त्रिज्या r = 2 cm

इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल

= बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi rl$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2.1 + \frac{22}{7} \times 2 \times 2.8$

$= \frac{22}{7} \times 2\ (2 \times 2.1 + 2.8)$

$= \frac{44}{7} (4.2 + 2.8)$

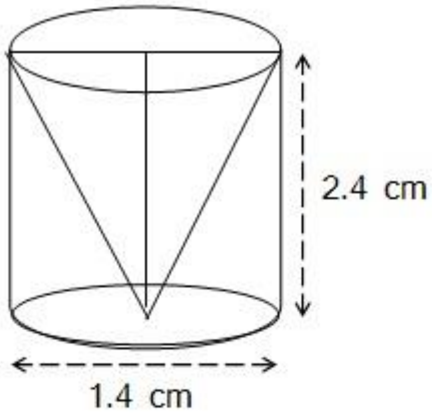
$= \frac{44}{7} \times 7$

$= 44\ cm^2$

कैनवास का लागत = 44 × 500 = ₹ 22000 |

❖ ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है |शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



बेलन की ऊँचाई h = 2.4 cm

बेलन का ब्यास = 1.4 cm

अत: बेलन की त्रिज्या r = 0.7 cm

काटे गए शंकु की ऊँचाई h = 2.4 cm

और त्रिज्या r = 0.7 cm

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$l = \sqrt{2.4^2 + 0.7^2}$

$l = \sqrt{5.76 + 0.49}$

$l = \sqrt{6.25}$

$l = 2.5$ cm

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन के पेंदी का क्षेत्रफल

= 2πrh + πrl + πr2

= πr(2h + l + r)

$= \frac{22}{7} \times 0.7\,(2 \times 2.4 + 2.5 + 0.7)$

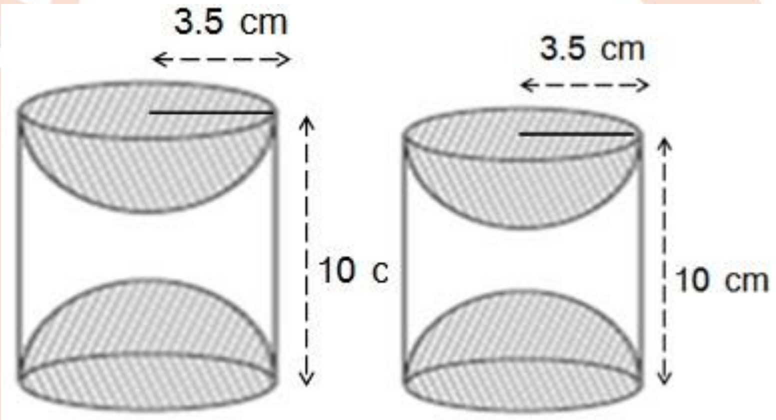
$= \frac{22}{10} \times (4.8 + 2.5 + 0.7)$

$= \frac{22}{10} \times (8.0)$

$= \frac{176}{10}$

$= 17.6\ cm^2$

❖ लकड़ी के ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसाकि आकृति 13.11 में दर्शाया गया है | यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल :

बेलन की ऊँचाई = 10 cm

आधार की त्रिज्या = 3.5 cm

अर्धगोले की त्रिज्या = 3.5 cm

वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + उपरी अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + निचली अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r2 + 2\pi r2$

$= 2\pi r(h + r + r)$

$= 2\pi r(h + 2r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5\,(10 + 2 \times 3.5)$

$= 2 \times \frac{110}{10}\,(10 + 7)$

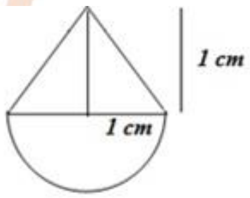
$= \frac{110 \times 34}{10}$

$= \frac{3740}{10}$

$= 374\ cm^2$

❖ एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है | इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए |

हल :



शंकु की त्रिज्या r = 1 cm

शंकु की ऊँचाई = 1 cm

अर्धगोले की त्रिज्या r = 1 cm

ठोस का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2(2r + h)$

$= \frac{1}{3}\pi\,(1)^2[2(1) + 1]$

$= \frac{1}{3}\pi\,[3]$

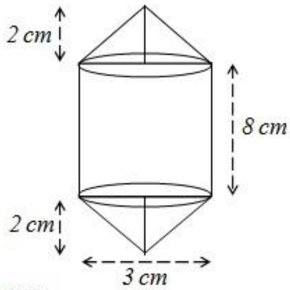
$= \pi\ cm^3$

ठोस का आयतन $\pi\ cm^3$

❖ एक इंजीनियरिंग के विधार्थी रचेल से एक पतली एल्युमिनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों | इसा मॉडल का व्यास 3 cm है और इसकी लंबाई 12 cm है | यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए|

(यह मान लीजिए कि मॉडल की आंतरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर है |)

हल :



शंकु की त्रिज्या $r = \frac{3}{2} = 1.5$ cm

शंकु की ऊँचाई $h = 2$ cm

बेलन की त्रिज्या $r = 1.5$ cm

बेलन की ऊँचाई $H = 12 - 2 - 2 = 8$ cm

मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन = 2(शंकु का आयतन) + बेलन का आयतन

$= 2(\frac{1}{3}\pi r^2 h) + \pi r^2 H$

$= \pi r^2(\frac{2}{3}h + H)$

$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 (\frac{2}{3} \times 2 + 8)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{15}{10} \times \frac{15}{10} \left(\frac{4+24}{3}\right)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \left(\frac{28}{3}\right)$

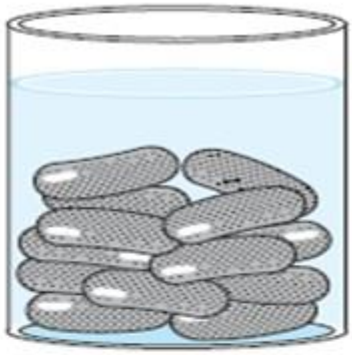
$= 22 \times 3$

$= 66 \text{ cm}^3$

अत: मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन 66 cm^3 है |

❖ एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है | 45 गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5 cm और व्यास 2.8 cm है

हल :



अर्धगोलाकार सिरे का व्यास = 2.8 cm

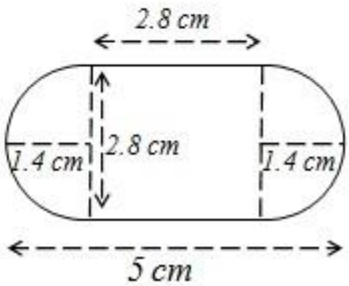
तो अर्धगोलाकार सिरे की त्रिज्या r = 1.4 cm

पुरे गुलाब जामुन की लम्बाई l = 5 cm

तो बेलनाकार भाग की लम्बाई h = 5 - (1.4 + 1.4)

= 5 - 2.8 cm

= 2.2 cm



सभी 45 गुलाब जामुनों का आयतन = 45(अर्धगोले का आयतन + बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन)

$= 45\left(\frac{2}{3}\pi r^2 + \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^2\right)$

$= 45\,\pi r^2\left(\frac{2}{3}r + h + \frac{2}{3}r\right)$

$= 45\left[\frac{22}{7}(1.4)^2\left(\frac{2}{3}\times 1.4 + 2.2 + \frac{2}{3}\times 1.4\right)\right]$

$= 45\left[\frac{22}{7}\times\frac{14}{10}\times\frac{14}{10}\left(\frac{2.8}{3} + 2.2 + \frac{2.8}{3}\right)\right]$

$= 45\left[\frac{44\times 14}{100}\left(\frac{5.6}{3} + 2.2\right)\right]$

$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{5.6 + 6.6}{3}\right)\right]$

$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{12.2}{3}\right)\right]$

$= \frac{15\times 616\times 122}{1000}$

$= \frac{1127280}{1000}$

$= 1127.280\ cm^3$

चासनी की मात्रा = 1127.280 cm^3 का 30%

$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$

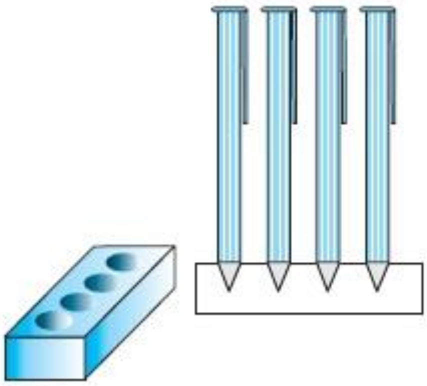
$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$

$= 338.1840\ cm^3$

अत: 45 गुलाब जामुनों में चासनी की मात्रा 338 cm^3 है |

एक कमलदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना हा जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्काकार गड्ढे बने हुए हैं | घनाभ की विमाएँ 15 cm x 10 cm x 3.5 cm हैं | प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है और गहराई 1.4 cm है | पुरे कमलदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए

हल :



धनाभ की लंबाई l = 15 cm

घनाभ की चौड़ाई b = 10 cm

घनाभ की ऊँचाई h = 3.5 cm

शंक्काकार भाग की त्रिज्या (r) = 0.5 cm

ऊँचाई (h) = 1.4 cm

पूरे कमलदान की लकड़ी का आयतन = घनाभ का आयतन – चरों शंक्काकार गड्ढे का आयतन

$= l \times b \times h - 4\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

$= 15 \times 10 \times 3.5 - 4\left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times 1.4\right)$

$= 525 - 4\left(\frac{1}{3} \times 22 \times 0.25 \times 0.2\right)$

$= 525 - \left(\frac{1}{3} \times 4.4\right)$

$= 525 - \frac{4.4}{3}$

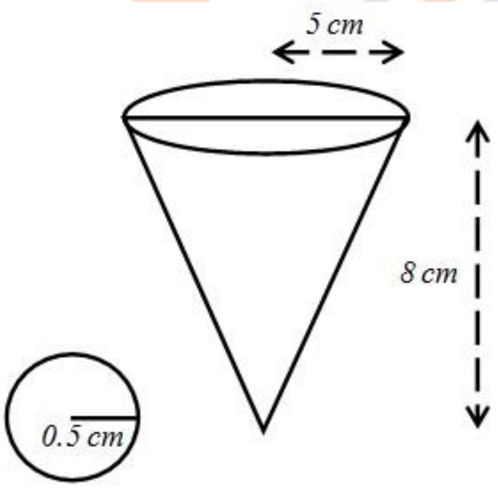
$= 525 - 1.47$

$= 523.53\ cm^3$

पूरे कमलदान की लकड़ी का आयतन 523.53 cm^3 है |

❖ एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है | इसकी ऊँचाई 8 cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5 cm त्रिज्या है | यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है | जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमे प्रत्येक 0.5 cm त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं, तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है | बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए |

हल :



शंकु की ऊँचाई (h) = 8 cm

शंकु की त्रिज्या (R) = 5 cm

गोली की त्रिज्या (r) = 0.5 cm

माना बर्तन में डाली गई गोलियों की संख्या = n

अत: n × (गोली का आयतन) = $\frac{1}{4}$ (शंकु का आयतन)

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

सरलीकरण करने पर

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times R^2 \times h$$

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 8$$

$$\Rightarrow \quad n \times \frac{4}{3} \times 0.125 = \frac{1}{3} \times 25 \times 2$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{3} \times 25 \times 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{0.125}$$

$$\Rightarrow \quad n = 25 \times \frac{1}{2} \times \frac{1000}{125}$$

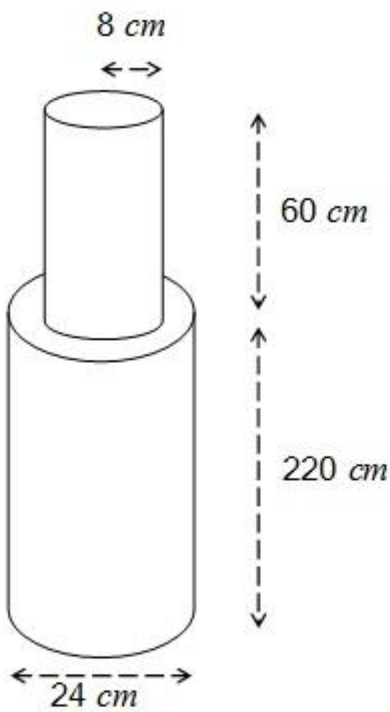
$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{2} \times \frac{1000}{5}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{500}{5} = 100$$

अत: गोलियों की संख्या 100 है |

ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का स्तंभ बना है | इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है 1 cm3 लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 g होता है | (π = 3.14 लीजिए |)

हल :



मोटे बेलन की ऊँचाई (H) = 220 cm

व्यास (d) = 24 cm

अत: त्रिज्या (R) = 12 cm

पतले बेलन की ऊँचाई (h) = 60 cm

त्रिज्या (r) = 8 cm

अब लौह स्तंभ का आयतन = $\pi R^2 H + \pi r^2 h$

$= \pi(R^2H + r^2h)$

$= 3.14\ (12\times12\times220 + 8\times8\times60)$

$= 3.14\ (31680 + 3840)$

$= 3.14\ (35520)$

$= 111532.8\ cm^3$

लोहे का द्रव्यमान = $111532.8\ cm^3 \times 8$

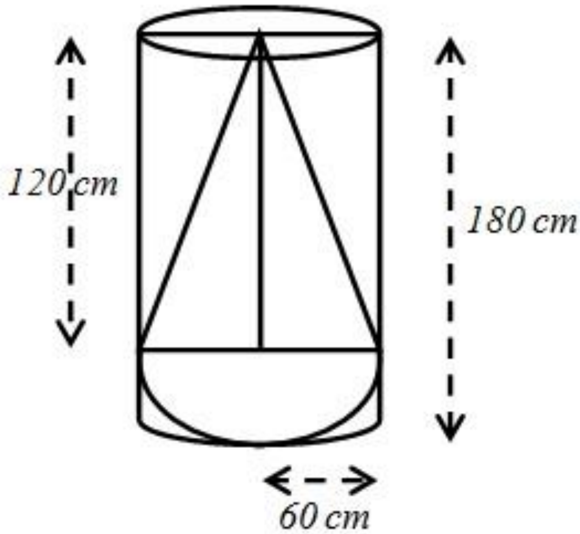
$= 892262.4\ g$

अब द्रव्यमान kg में = $\frac{892262.4}{1000} = 892.2624\ kg$

अर्थात लौह सतंभ का द्रव्यमान 892.26 kg है |

एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है | इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे | यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए |

हल :



ठोस के शंकु की ऊँचाई (h) = 120 cm

ठोस के शंकु की त्रिज्या (r) = 60 cm

ठोस के अर्धगोले की त्रिज्या (r) = 60 cm

बड़े बेलन की ऊँचाई (H) = 180 cm

बड़े बेलन की की त्रिज्या (r) = 60 cm

शेष बचे पानी का आयतन = बड़े बेलन का आयतन – ठोस का आयतन

$$= \pi r^2 H - (\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3)$$

$$= \pi r^2 [H - (\frac{1}{3} h + \frac{2}{3} r)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [180 - (\frac{1}{3} \times 120 + \frac{2}{3} \times 60)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [180 - (40 + 40)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [180 - 80]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 [100]$$

$$= \frac{22 \times 360000}{7} \text{ cm}^3$$

$$= \frac{7920000}{7} \text{ cm}^3$$

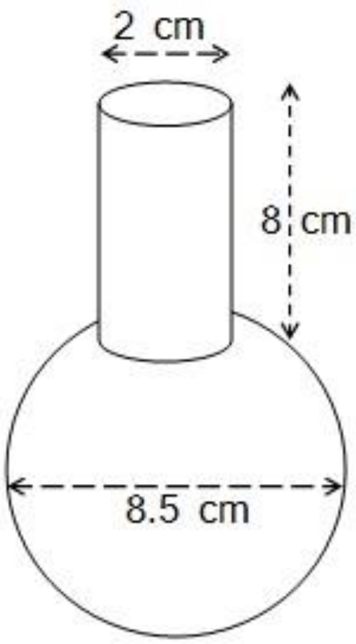
$$= 1131428.57 \text{ cm}^3$$

या आयतन घन मीटर में $= \frac{1131428.57}{100 \times 100 \times 100} \text{ m}^3$

$= 1.131 \text{ m}^3$ (लगभग)

❖ एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8 cm है और व्यास 2 cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है | इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345 cm3 है | जाँच कीजिए कि बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए की उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है और π = 3.14 |

हल :



गोलाकार भाग का व्यास = 8.5 cm

गोलाकार भाग का त्रिज्या (R) = $\frac{8.5}{2}$ cm

बेलनाकार गर्दन की ऊँचाई (h) = 8 cm

गर्दन का व्यास (d) = 2 cm

इसलिए, त्रिज्या (r) = 1 cm

इसमें भरे जा सकने वाले पानी का आयतन = गोले का आयतन + बेलन का आयतन

$= \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi r^2 h$

$= 3.14 \left(\frac{4}{3} \times \frac{8.5}{2} \times \frac{8.5}{2} \times \frac{8.5}{2} + 1 \times 1 \times 8 \right)$

$= 3.14 \left(\frac{8.5 \times 8.5 \times 8.5}{3 \times 2} + 8 \right)$

$= 3.14 \left(\frac{614.125 + 48}{6} \right)$

$= 3.14 \left(\frac{662.125}{6} \right)$

$= \frac{1.57 \times 662.125}{3}$

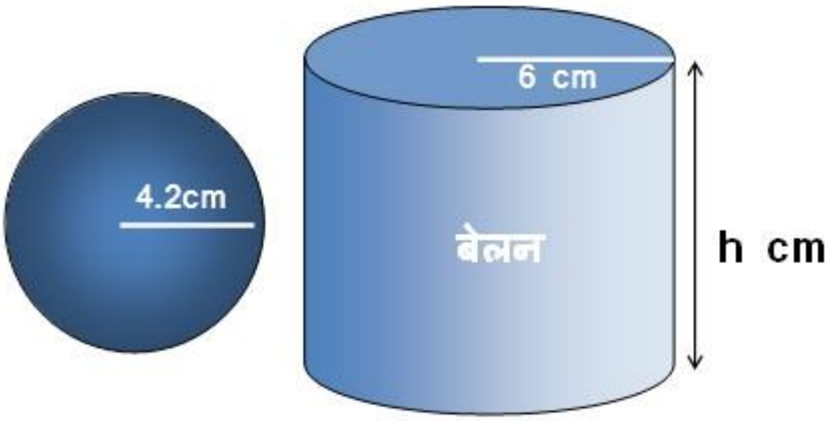
$= \frac{1.57 \times 662.125}{3}$

$= 346.51 \text{ cm}^3$

अत: बच्चे द्वारा ज्ञात माप सही नहीं है |

- त्रिज्या 4.2 cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है | बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल :



धातु के गोले की त्रिज्या (r) = 4.2 cm

बेलन की त्रिज्या (R) = 6 cm और

माना बेलन की ऊँचाई h cm है |

बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\Rightarrow \quad \pi R^2 h = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad R^2 h = \frac{4}{3} r^3$$

$$\Rightarrow \quad 6^2 h = \frac{4}{3} (4.2)^3$$

$$\Rightarrow \quad 36 h = \frac{4}{3} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4 \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 36}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 9} = 1.4 \times 1.4 \times 1.4 = 2.74 \text{ cm}$$

❖ क्रमशः 6 cm, 8 cm और 10 cm त्रिज्याओं वाले धातु के ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है | इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए |

हल : माना बड़े ठोस गोले की त्रिज्या = R cm

दिया है : r_1 = 6 cm, r_2 = 8 cm और r_3 = 10 cm

बड़े गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi (r_1)^3 + \frac{4}{3}\pi (r_2)^3 + \frac{4}{3}\pi (r_3)^3$

$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi (R)^3 = \frac{4}{3}\pi [(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3]$

दोनों तरफ सरल करने पर हम पाते हैं -

$\Rightarrow (R)^3 = [(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3]$

$\Rightarrow (R)^3 = [(6)^3 + (8)^3 + (9)^3]$

$\Rightarrow (R)^3 = [216 + 512 + 1000]$

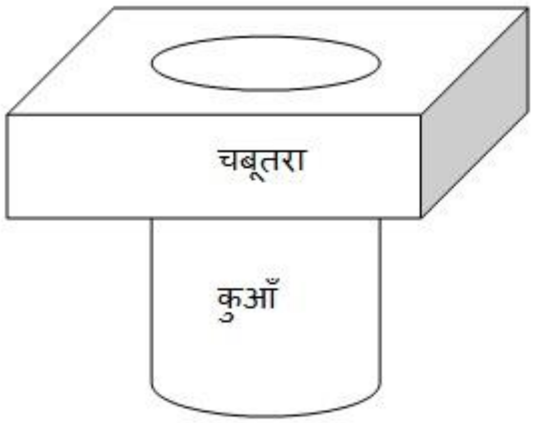
$\Rightarrow (R)^3 = 1728$

$\Rightarrow R = \sqrt[3]{1728}$

$\Rightarrow R = 12$

अत: नए गोले की त्रिज्या 12 cm है |

❖ व्यास 7 m वाला 20 m गहरा एक कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22 m x 14 m वाला एक चबूतरा बनाया गया है | इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |



हल : कुएँ का व्यास = 7 m

अत: कुएँ की त्रिज्या (r) = 3.5 cm

कुएँ की गहराई (h) = 20 m

चबूतरे की लम्बाई (l) = 22 m और चौड़ाई (b) = 14 m

माना चबूतरे की ऊँचाई = h m

चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन

$l \times b \times h = \pi r^2 h$

$22 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20 \text{ m}$

$\Rightarrow 22 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20$

$\Rightarrow h = \frac{22 \times 3.5 \times 3.5 \times 20}{7 \times 14 \times 22}$

$\Rightarrow h = \frac{35 \times 35 \times 20}{7 \times 14 \times 10 \times 10}$

$\Rightarrow h = \frac{5 \times 35 \times 2}{14 \times 10}$

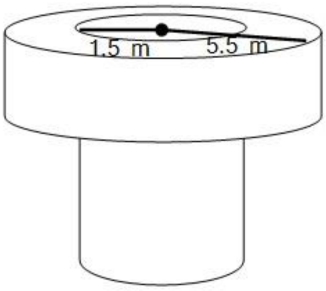
$\Rightarrow h = \frac{35 \times 2}{14 \times 2}$

$\Rightarrow h = \frac{35 \times 2}{14 \times 2}$

$\Rightarrow h = \frac{35}{14} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ m}$

अत : चबूतरे की ऊँचाई = 2.5 m

❖ व्यास 3 m वाला 14 m गहरा की गहराई तक खोदा जाता है | इससे निकली हुई मिट्टी को कुँए के चारों ओर 4 m चौड़ी एक वृत्ताकार वलय (ring) बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है | इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |



हल : कुएँ का व्यास = 3 m

कुएँ की त्रिज्या (r) = $\frac{3}{2}$ m = 1.5 m

कुएँ की गहराई (H) = 14 m

कुएँ के चारों वृताकार वलय की चौड़ाई = 4 m

अत: वलय की बाह्य त्रिज्या (R) = 4 m + 1.5 = 5.5 m

माना वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = h m

वलयाकार चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन

$\Rightarrow \pi R^2h - \pi r^2h = \pi r^2H$

$\Rightarrow \pi h (R^2 - r^2) = \pi r^2H$

$\Rightarrow h (R^2 - r^2) = r^2H$

$\Rightarrow h [(5.5)^2 - (1.5)^2] = 1.5 \times 1.5 \times 14$

$\Rightarrow h (5.5 + 1.5) (5.5 - 1.5) = 1.5 \times 1.5 \times 14$

[$a^2 - b^2 = (a + b) (a - b)$]

$\Rightarrow h (7 \times 4) = 1.5 \times 1.5 \times 14$

$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5 \times 14}{7 \times 4}$

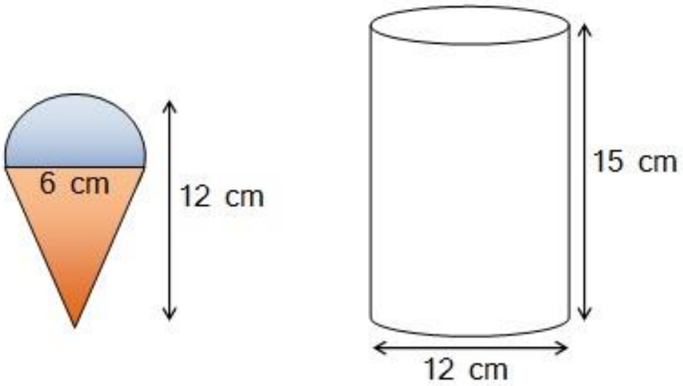
$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5}{2}$

$\Rightarrow h = \frac{2.25}{2}$

$\Rightarrow h = 1.125$ m

अत : वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = 1.125 m

❖ व्यास 12 cm और ऊँचाई 15 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम से पूरा भरा हुआ है | इस आइसक्रीम को ऊँचाई 12 cm और व्यास 6 cm वाले शकुओं में भरा जाना है, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार होगा | उन शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं |



हल : बेलनाकार बर्तन का व्यास = 12 cm

तो बर्तन की त्रिज्या R = 6 cm

बर्तन की ऊँचाई H = 15 cm

आइसक्रीम की त्रिज्या r = $\frac{6}{2}$ = 3 cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 12 cm

भरे जा सकने वाले आइसक्रीमों की संख्या = $\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{एक आइसक्रीम का आयतन}}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\text{अर्धगोले का आयतन} + \text{शंकु का आयतन}}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 (2r + h)}$

$\Rightarrow \quad = \frac{\pi\, 6^2 \times 15}{\frac{1}{3}\pi\, 3^2 (2 \times 3 + 12)}$

$\Rightarrow \quad = \frac{6^2 \times 15}{\frac{1}{3}\, 3^2 (18)}$

$\Rightarrow \quad = \frac{36 \times 15}{3 \times 18}$

$\Rightarrow \quad = \frac{2 \times 15}{3}$

$\Rightarrow \quad = \frac{30}{3} = 10$

अत: भरे जा सकने वाले आइसक्रीमों की संख्या 10 है |

❖ विमाओं 5.5 cm x 10 cm x 3.5 cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75 cm व्यास और 2 mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा ?

हल : सिक्कों का व्यास = 1.75 cm

त्रिज्या $r = \frac{1.75}{2}$ cm

सिक्के की ऊँचाई $h = 2$ mm $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ cm

माना चाँदी के सिक्कों की संख्या n है |

अत: n चाँदी के सिक्कों का आयतन = घनाभ का आयतन

$$\Rightarrow n(\pi r^2 h) = l \times b \times h$$

$$\Rightarrow n = \frac{l \times b \times h}{\pi r^2 h}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 3.5\text{ cm}}{\frac{22}{7} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5 \times 10 \times 3.5 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5}{22 \times 1.75 \times 1.75}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 100 \times 100}{22 \times 175 \times 175 \times 10 \times 10}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 2 \times 5 \times 100}{11 \times 25 \times 175}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 2 \times 100}{11 \times 25}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5 \times 10 \times 2 \times 100}{25}$$

$$\Rightarrow n = \frac{10 \times 2 \times 100}{5} = 2 \times 2 \times 100 = 400$$

अत: सिक्कों की संख्या 400 है |

❖ 32 cm ऊँची और आधार त्रिज्या 18 cm वाली एक बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है | इस बाल्टी को भूमि पर खाली किया जाता है और इस रेते की एक शंक्वाकार ढेरी बनाई जाती है | यदि शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई 24 cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल : बेलनाकार बाल्टी की त्रिज्या R = 18 cm

और ऊँचाई H = 32 cm

शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई = 24 cm

बेलनाकार बाल्टी की आयतन = πR^2H

शंक्वाकार ढेरी का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2h$

शंक्वाकार ढेरी का आयतन = बेलनाकार बाल्टी की आयतन

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2h = \pi R^2H$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} r^2 \times 24 = \frac{22}{7} \times 18 \times 18 \times 32$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times r^2 \times 24 = 18 \times 18 \times 32$

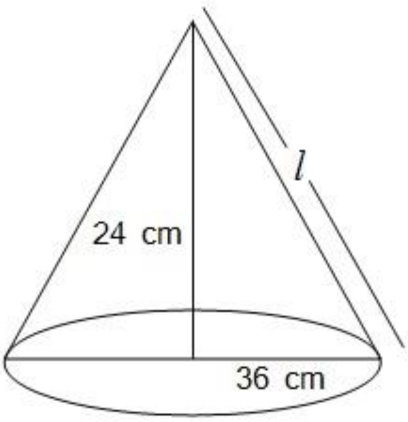
$\Rightarrow r^2 \times 8 = 18 \times 18 \times 32$

$\Rightarrow r^2 = \frac{18 \times 18 \times 32}{8}$

$\Rightarrow r^2 = 18 \times 18 \times 4$

$\Rightarrow r = \sqrt{18 \times 18 \times 4}$

$\Rightarrow r = 36$



$l = \sqrt{24^2 + 36^2}$

$l = \sqrt{(12 \times 2)^2 + (12 \times 3)^2}$

$l = \sqrt{12^2 \times 2^2 + 12^2 \times 3^2}$

$l = \sqrt{12^2 (2^2 + 3^2)} = 12\sqrt{(2^2 + 3^2)}$

$l = 12\sqrt{4+9} = 12\sqrt{13}\ cm$

❖ m चौड़ी और 1.5 m गहरी एक नहर में पानी 10 km /h की चाल से बह रहा है | 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के ल;इए 8 cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है |

हल : 1 घंटे में नहर की लंबाई l = 10km = 10000 m

नहर की चौड़ाई b = 6 m

नहर की गहराई h = 1.5 m

1 घंटे में नहर में पानी का आयतन = $l \times b \times h$

$= 10000 \times 6 \times 1.5 \text{ m}^3$

$= 90000 \text{ m}^3$

अत: 30 मिनट में पानी का आयतन = $\frac{90000}{2} \text{ m}^3$

$= 45000 \text{ m}^3$

सिंचाई के लिए पानी की ऊँचाई = 8 cm = $\frac{8}{100}$ m

अब, क्षेत्रफल × उचाई = आयतन

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल × $\frac{8}{100} = 45000 \text{ m}^3$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल = $45000 \text{ m}^3 \times \frac{100}{8}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल = 562500 m^2

अत: सिंचाई के लिए 562500 m^2 क्षेत्रफल की जरुरत है |

❖ पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है | दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm हैं | इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए |

हल : छिन्नक वाले गिलास की ऊँचाई = 14 cm

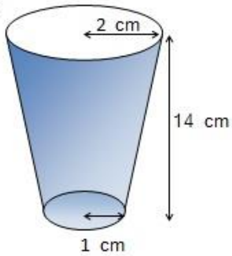
उपरी सिरे का व्यास = 4 cm

उपरी सिरे की त्रिज्या R = 2 cm

निचली सिरे का व्यास = 2 cm

निचली सिरे की त्रिज्या r = 1 cm

गिलास की धारिता = $\frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$



$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 (2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 2 (4 + 1 + 2)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 14$

$= \frac{308}{3} = 102\frac{2}{3} \text{ cm}^3$

❖ एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18 cm और 6 cm हैं | इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

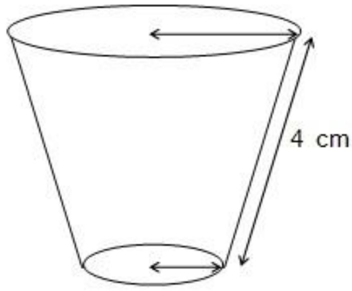
हल :

शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई (l) = 4 cm

उपरी सिरे का परिमाप = 18 cm

$$2\pi R = 18$$

$$R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi}$$



निचले सिरे का परिमाप = 6 cm

$$2\pi r = 6$$

$$r = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi l\,(R + r)$

$$= \pi \times 4\left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi}\right)$$

$$= \pi \times 4\left(\frac{12}{\pi}\right)$$

$$= 48 \text{ cm}^2$$

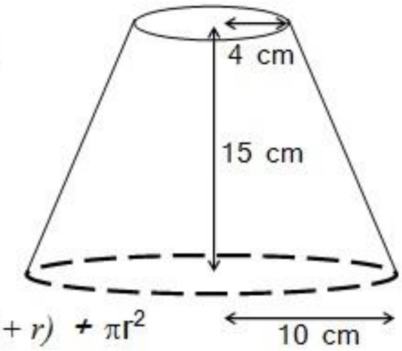
अत : छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 48 cm^2 है |

❖ एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकर की है (देखिये आकृति 13.24) | यदि इसके खुले सिरे की त्रिज्या 10 cm है, ऊपरी सिरे की त्रिज्या 4 cm है टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15 cm है तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल : टोपी की तिर्यक ऊँचाई (l) = 15 cm

खुले सिरे की त्रिज्या (R) = 10 cm

ऊपरी सिरे की त्रिज्या (r) = 4 cm



बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल = $\pi l\,(R+r) + \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 15\,(10+4) + \frac{22}{7} \times 4 \times 4$

$= \frac{22}{7} \times 15\,(14) + \frac{22}{7} \times 16$

$= \frac{22}{7} \times 210 + \frac{22}{7} \times 16$

$= \frac{22}{7}\,(210 + 16)$

$= \frac{22}{7}\,(226)$

$= \frac{4972}{7}\ cm^2$

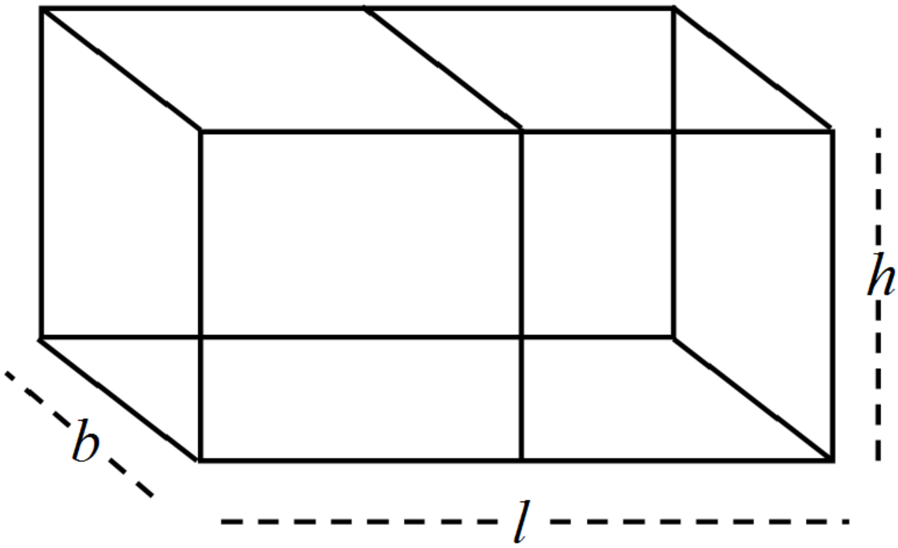
$= 710\frac{2}{7}\ cm^2$

NCERT SOLUTIONS
प्रश्नावली 13.1 (पृष्ठ संख्या 268-269)

प्रश्न 1 दो घनों, जिनमे से प्रत्येक का आयतन $64cm^3$ है, के सलंग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- एक घन का आयतन = $64cm^3$

एक किनारा = $64^{\frac{1}{3}} = 4cm$



दो घनों के फलकों को मिलाने पर,

l = 4 + 4 = 8cm

b = 4cm

h = 4cm

इस प्रकार इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(lb + bh + lh)

= 2(8 × 4 + 4 × 4 + 8 × 4)

= 2(32 + 16 + 32)

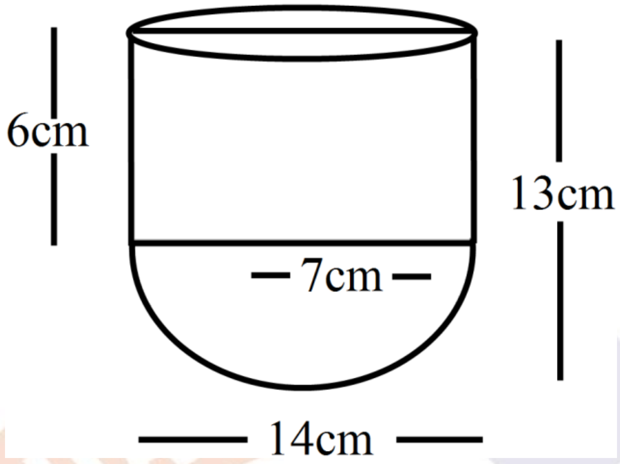
= 2 × 80

= $160cm^2$

अत :इस घनाभ का प्राप्त पृष्ठीय क्षेत्रफल $160cm^2$ है।

प्रश्न 2 कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्धगोले का व्यास 14cm है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13cm है। इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



अर्धगोले का व्यास = 14cm

अर्धगोले की त्रिज्या $\mathrm{r}=\frac{14}{2}\mathrm{cm}=7\mathrm{cm}$

बर्तन की कुल ऊँचाई H = 13cm

बेलना भाग की ऊँचाई h = 13cm - 7cm = 6cm

बेलनाकार की त्रिज्या r = 7cm

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi\mathrm{rh}+2\pi\mathrm{r}^2$

$=2\pi\mathrm{r}(\mathrm{h}+\mathrm{r})$

$=2\times\frac{22}{7}\times7(6+7)$

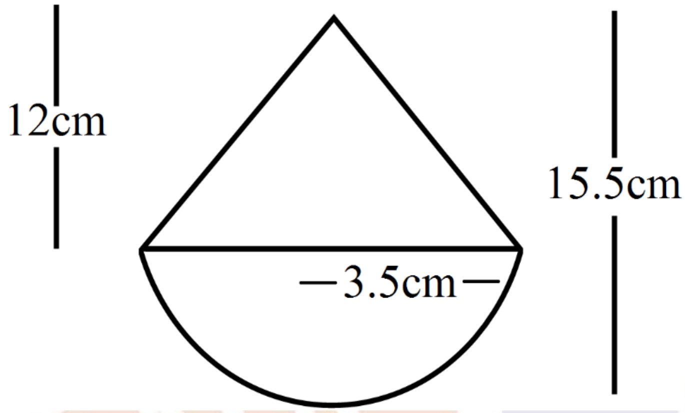
$=44\times13$

$=572\mathrm{cm}^2$

बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल $572\mathrm{cm}^2$ है।

प्रश्न 3 एक खिलौना त्रिज्या 3.5cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्ध गोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 15.5cm है। इस खिलोने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



अर्धगोलाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या r = 3.5cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 15.5 - 3.5 = 12cm

शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$l = \sqrt{12^2 + 3.5^2}$$

$$l = \sqrt{144 + 12.25}$$

$$l = \sqrt{156.25}$$

$$l = 12.5\text{cm}$$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + 2\pi r^2$

$= \pi r(l + 2r)$ [दोनों त्रिज्या बराबर रहने पर]

$$= \frac{22}{7} \times 3.5(12.5 + 2 \times 3.5)$$

$$= 22 \times 0.5(12.5 + 7)$$

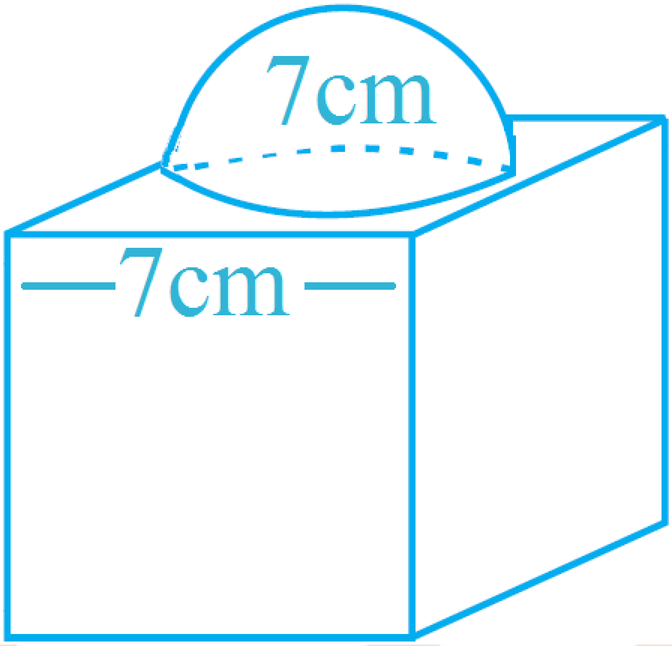
$$= 11(19.5)$$

$$= 214.5\text{cm}^2$$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 214.5cm^2 है।

प्रश्न 4 भुजा 7cm वाले एक घनाकार ब्लाक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है। अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



घनाकार ब्लॉक का एक किनारा = 7cm

अर्धगोले का अधिकतम व्यास d = 7cm

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{7}{2}\text{cm}$

ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल - अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

⇒ ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

$= 6a^2 + \pi r^2$ [a = धन का एक किनारा]

$6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

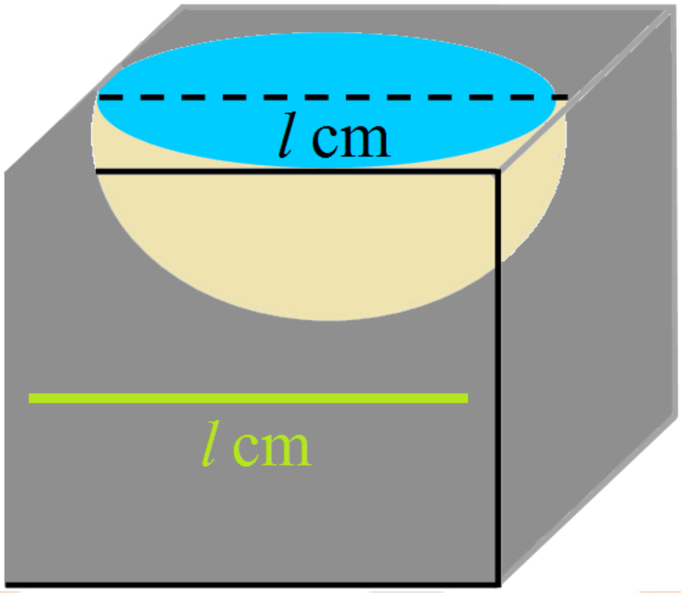
$= 6 \times 49 + \frac{77}{2}$

$= 294 + 38.5 = 332.5\text{cm}^2$

अतः ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 332.5cm^2

प्रश्न 5 एक घनाकार ब्लाक के एक फलक को अन्दर की ओर से काट कर एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है की अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है। शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना अर्धगोले का व्यास d = l इकाई

अतः त्रिज्या r = $\frac{1}{2}$

और घन का एक किनारा a = l इकाई

(चूँकि घन का किनारा अर्धगोले के ब्यास के बराबर है(

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल- अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

$= 6a^2 + 2\pi r - \pi r^2$ [a = घन का एक किनारा]

$= 6a^2 + \pi r^2$

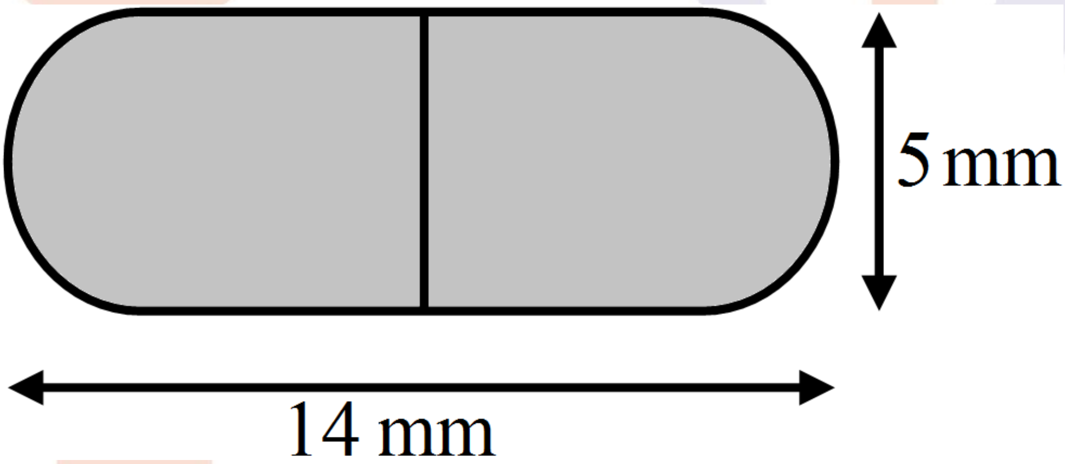
$= 6(l^2) + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2$

$= 6(l^2) + \pi\frac{l^2}{4}$

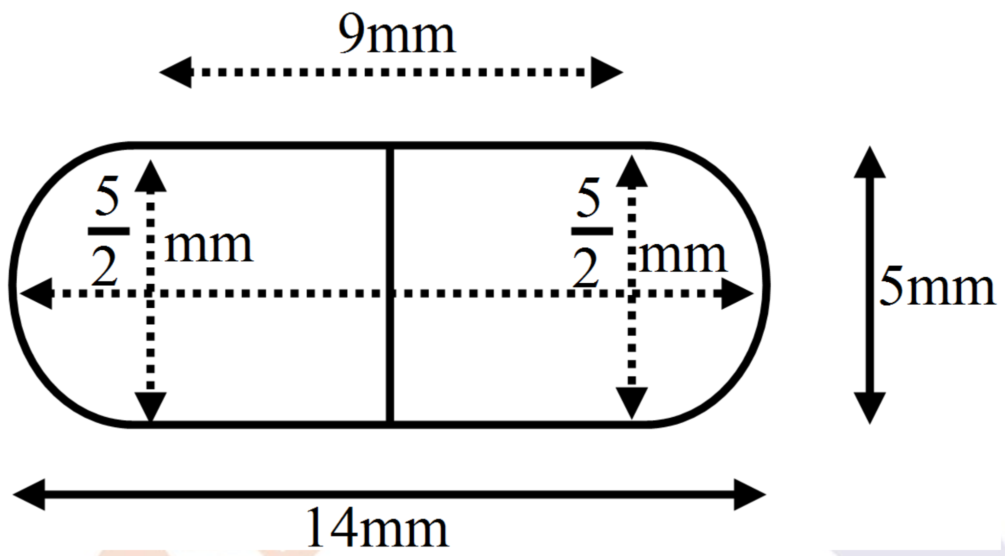
$= \frac{24(l^2)+\pi(l^2)}{4}$

$= \frac{1}{4}(24 + \pi)(l^2)$ वर्ग इकाई

प्रश्न 6 दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति)। पुरे कैप्सूल की लंबाई 14mm है और उसका व्यास 5mm है इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-



यहाँ बेलन का ब्यास, अर्धगोले के ब्यास के बराबर है।

अत: अर्धगोले का ब्यास D = 5mm

इसलिए, त्रिज्या $\mathrm{r} = \frac{5}{2}\mathrm{mm}$

और बेलन का व्यास d = 5mm

$\therefore$ त्रिज्या $\mathrm{r} = \frac{5}{2}\mathrm{mm}$

बेलन की ऊँचाई h = कैप्सूल की लम्बाई - 2r

h = 14mm - 5 [चूँकि 2r = D]

= 9mm

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 (अर्धगोलों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2 \times 2\pi \mathrm{r}2 + 2\pi \mathrm{rh}$$

$$= 2\pi \mathrm{r}(2\mathrm{r} + \mathrm{h})$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2}(5 + 9)$$

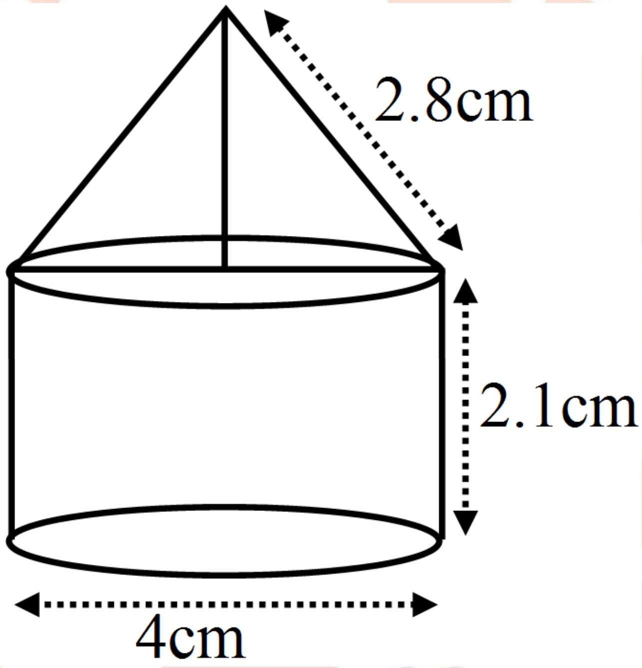
$= 2 \times 22 \times 5$

$= 220mm^2$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $220mm^2$

प्रश्न 7 कोई तंबू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु आध्यारोपित है। यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और क्रमशः 2.1m और 4m है तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8m है तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, 500 रू प्रति m^2 की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए। (ध्यान दीजिए कि तंबू के आधार को कैनवस से नहीं ढका जाता है।)

उत्तर-



तम्बू के बेलनाकार भाग का ब्यास = 4cm

अत :त्रिज्या r = 2cm

बेलनाकार भाग की ऊँचाई h = 2.1cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई = 2.8cm

ब्याज = 4cm

और त्रिज्या r = 2cm

इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस) canvas) का क्षेत्रफल = बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल +शंकाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi rl$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2.1 + \frac{22}{7} \times 2 \times 2.8$$

$$= \frac{22}{7} \times 2(2 \times 2.1 + 2.8)$$

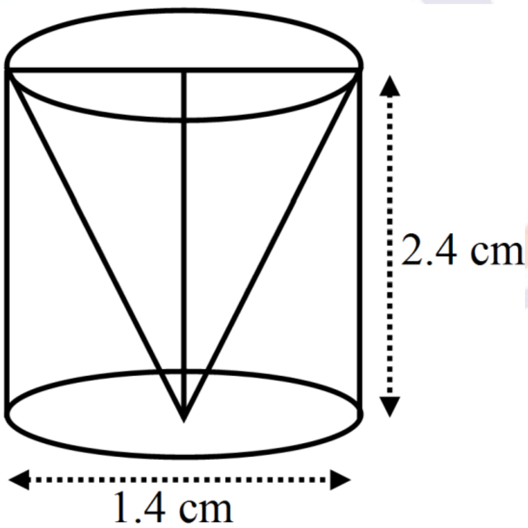
$$= \frac{44}{7} \times 7$$

$$= 44 cm^2$$

केनवास का लागत = 44 × 500 = रू 22000

प्रश्न 8 ऊँचाई 2.4cm और व्यास 1.4cm वाले एक ठोस बेलन में से ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



बेलन की ऊँचाई h = 2.4cm

बेलन का ब्यास = 1.4cm

अत: बेलन की त्रिज्या r = 0.7cm

काटे गए शंकु की ऊँचाई h = 2.4cm

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$l = \sqrt{2.4^2 + 0.7^2}$$

$$l = \sqrt{5.76 + 0.49}$$

$$l = \sqrt{6.25}$$

$$l = 2.5\text{cm}$$

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन के पेंदी का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r(2h + l + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 0.7(2 \times 2.4 + 2.5 + 0.7)$$

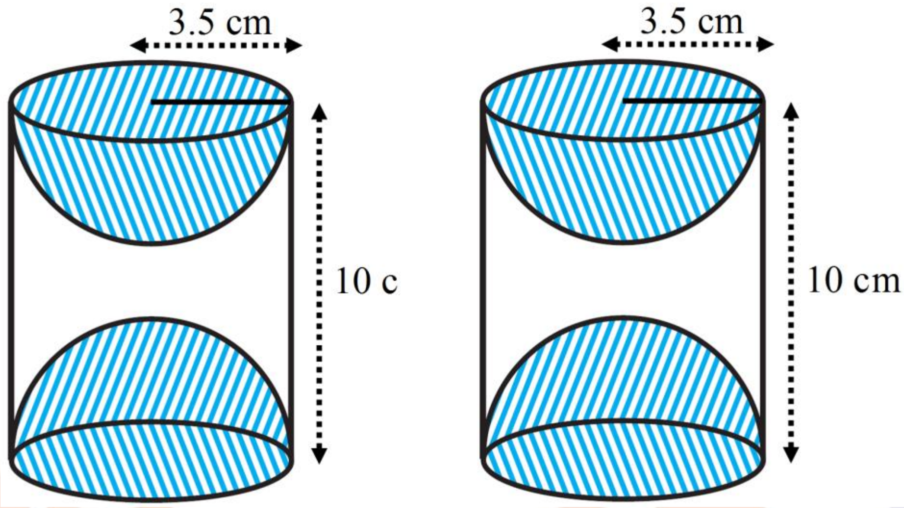
$$= \frac{22}{10} \times (4.8 + 2.5 + 0.7)$$

$$= \frac{22}{10} \times (8.0)$$

$$= \frac{176}{10}$$

$$= 17.6\text{cm}^2$$

प्रश्न 9 लकड़ी के ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10cm है और आधार की त्रिज्या 3.5cm है तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर- बेलन की ऊँचाई = 10cm

आधार की त्रिज्या = 3.5cm

अर्धगोले की त्रिज्या = 3.5cm

वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + उपरी अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + निचली अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r(h + r + r)$$

$$= 2\pi r(h + 2r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5(10 + 2 \times 3.5)$$

$$= 2 \times \frac{110}{10}(10 + 7)$$

$$= \frac{110 \times 34}{10}$$

$$= \frac{3740}{10}$$

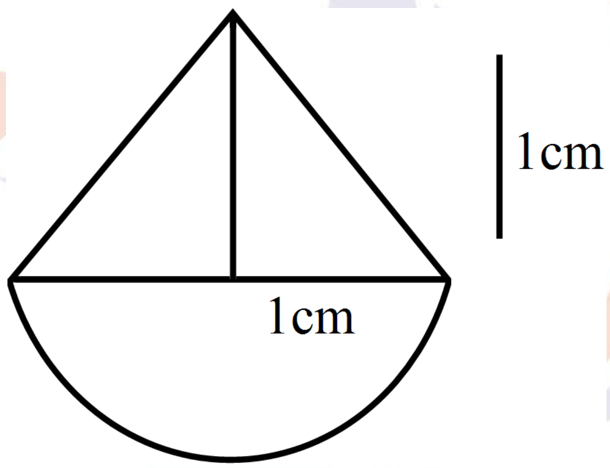
$$= 374\text{cm}^2$$

अत: वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 374cm^2 है।

प्रश्नावली 13.2 (पृष्ठ संख्या 271-272)

प्रश्न 1 एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



शंकु की त्रिज्या r = 1cm

शंकु की ऊँचाई = 1cm

अर्धगोले की त्रिज्या r = 1cm

ठोस का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2(2r + h)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(1)^2[2(1) + 1]$$

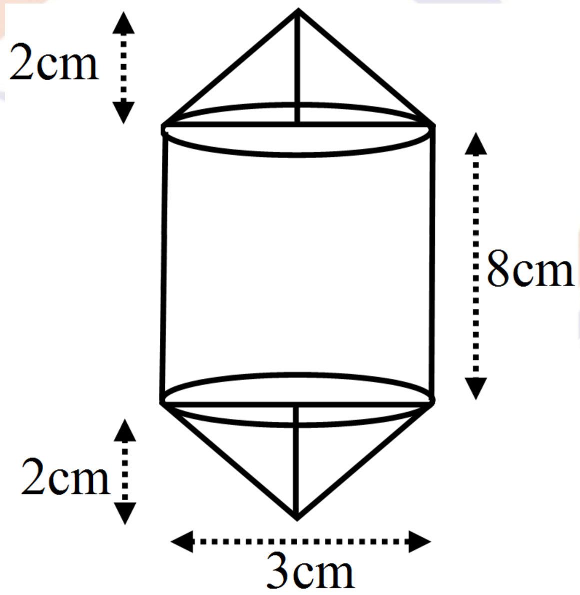
$$= \frac{1}{3}\pi[3]$$

$$= \pi \text{ cm}^3$$

3 ठोस का आयतन π cm^3

प्रश्न 2 एक इंजीनियरिंग के विधार्थी रचेल से एक पतली एल्युमिनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों। इसा मॉडल का व्यास 3cm है और इसकी लंबाई 12cm है। यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। (यह मान लीजिए कि मॉडल की आंतरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर है।)

उत्तर-



शंकु की त्रिज्या $r = \frac{3}{2} = 1.5\text{cm}$

शंकु की ऊँचाई h = 2cm

बेलन की त्रिज्या r = 1.5cm

बेलन की ऊँचाई H = 12 - 2 - 2 = 8cm

मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन = 2 (शंकु का आयतन) + बेलन का आयतन

$$= 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) + \pi r^2 H$$

$$= \pi r^2\left(\frac{2}{3}h + H\right)$$

$$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5\left(\frac{2}{3} \times 2 + 8\right)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{15}{10} \times \frac{15}{10}\left(\frac{4+24}{3}\right)$$

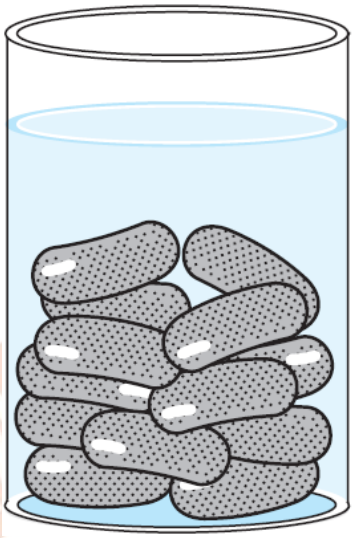
$$= \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}\left(\frac{28}{2}\right)$$

$$= 22 \times 3$$

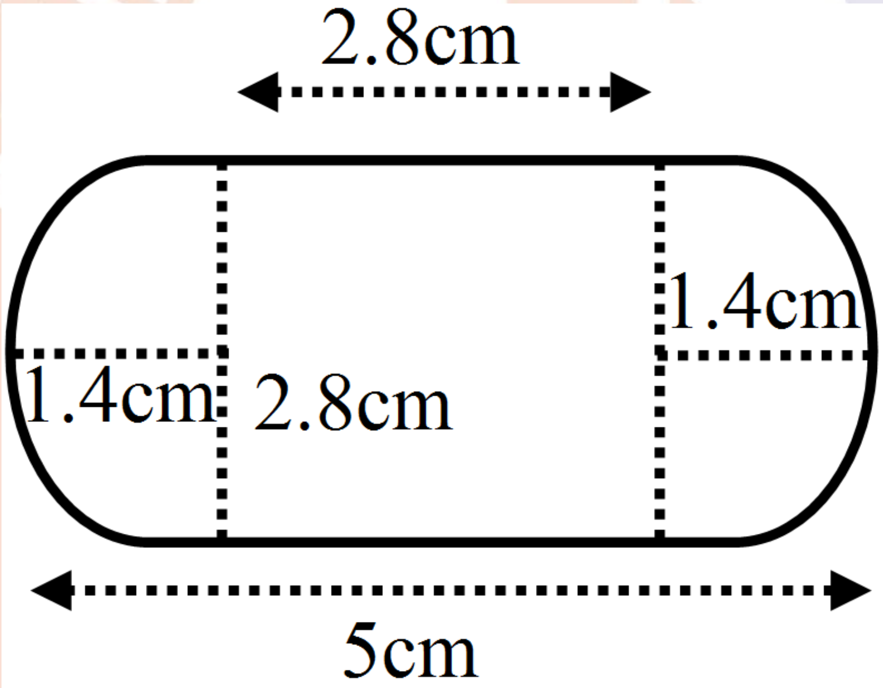
$$= 66\text{cm}^3$$

अतः मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन 66cm^3 है।

प्रश्न 3 एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है। 45 गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5cm और व्यास 2.8cm है (देखिए आकृति)।



उत्तर-



अर्धगोलाकार सिरे का व्यास = 2.8cm

तो अर्धगोलाकार सिरे की त्रिज्या r = 1.4cm

पुरे गुलाब जामुन की लम्बाई l = 5cm

तो बेलनाकार भाग की लम्बाई h = 5 - (1.4 + 1.4)

= 5 - 2.8cm

= 2.2cm

सभी 45 गुलाब जामुनों का आयतन = 45 (अर्धगोले का आयतन + बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन(

$$= 45\left(\frac{2}{3}\pi r^2 + \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^2\right)$$

$$= 45\pi r^2\left(\frac{2}{3}r + h + \frac{2}{3}r\right)$$

$$= 45\left[\frac{22}{7}(1.4)^2\left(\frac{2}{3} \times 1.4 + 2.2 + \frac{2}{3} \times 1.4\right)\right]$$

$$= 45\left[\frac{22}{7} \times \frac{14}{10} \times \frac{14}{10}\left(\frac{2.8}{3} + 2.2 + \frac{2.8}{3}\right)\right]$$

$$= 45\left[\frac{44 \times 14}{100}\left(\frac{5.6}{3} + 2.2\right)\right]$$

$$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{5.6+6.6}{3}\right)\right]$$

$$= 45\left[\frac{616}{100}\left(\frac{12.2}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{15 \times 616 \times 122}{1000}$$

$= \frac{1127280}{1000}$

$= 1127.280\text{cm}^3$

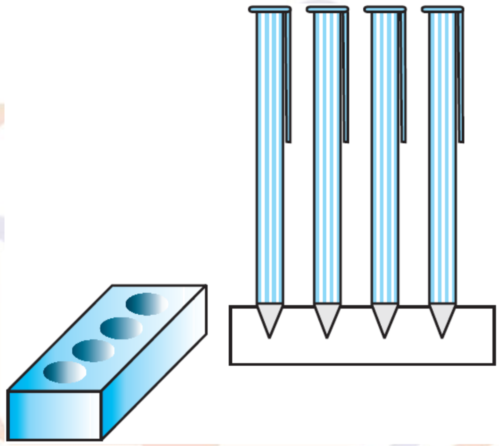
चासनी की मात्रा = 1127.280cm^3 का 30%

$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$

$= 338.1840\text{cm}^2$

अतः 45 गुलाब जामुनों में चासनी की मात्रा 338cm^3 है।

प्रश्न 4 एक कमलदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना हा जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं। घनाभ की विमाएँ 15cm × 10cm × 3.5cm हैं। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5cm है और गहराई 1.4cm है। पुरे कमलदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)।



उत्तर- धनाभ की लंबाई l = 15cm

घनाभ की चौड़ाई b = 10cm

घनाभ की ऊँचाई h = 3.5cm

शंक्वाकार भाग की त्रिज्या) r) = 0.5cm

ऊँचाई) h) = 1.4cm

पूरे कमलदान की लकड़ी का आयतन = घनाभ का आयतन- चरों शंक्वाकार गड्ढे का आयतन

$$= l \times b \times h - 4\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$

$$= 15 \times 10 \times 3.5 - 4\left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times 1.4\right)$$

$$= 525 - 4\left(\frac{1}{3} \times 22 \times 0.25 \times 0.2\right)$$

$$= 525 - \left(\frac{1}{3} \times 4.4\right)$$

$$= 525 - \frac{4.4}{3}$$

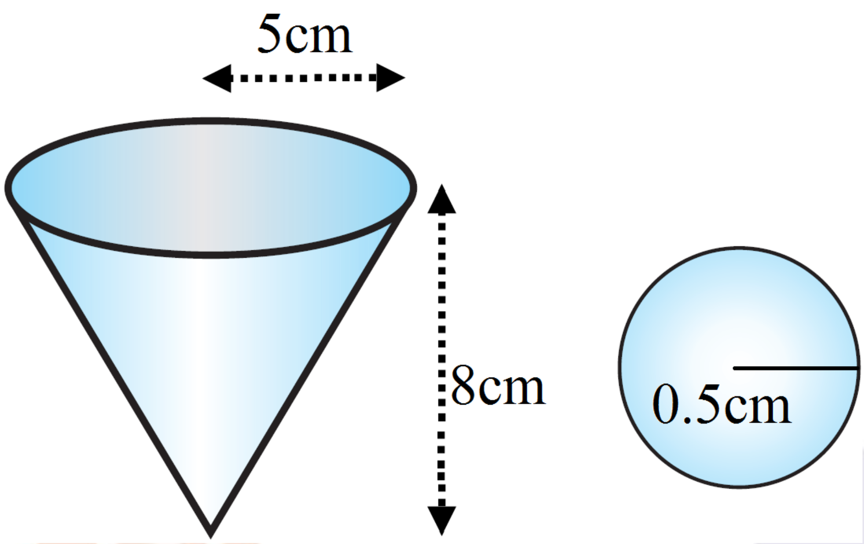
$$= 525 - 1.47$$

$$= 523.53\text{cm}^3$$

पुरे कमलदान की लकड़ी का आयतन 523.53cm^3 है।

प्रश्न 5 एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5cm त्रिज्या है। यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है। जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमे प्रत्येक 0.5cm त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं, तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है। बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



शंकु की ऊँचाई) h) = 8cm

शंकु की त्रिज्या) R) = 5cm

गोली की त्रिज्या) r) = 0.5cm

माना बर्तन में डाली गई गोलियों की संख्या = n

अतः n × (गोली का आयतन) $= \frac{1}{4}$ (शंकु का आयतन)

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

सरलीकरण करने पर-

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3} \times r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times R^2 \times h$$

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3} \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times 8$$

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3} \times 0.125 = \frac{1}{3} \times 25 \times 2$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{3} \times 25 \times 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{0.125}$$

$$\Rightarrow n = 25 \times \frac{1}{2} \times \frac{1000}{125}$$

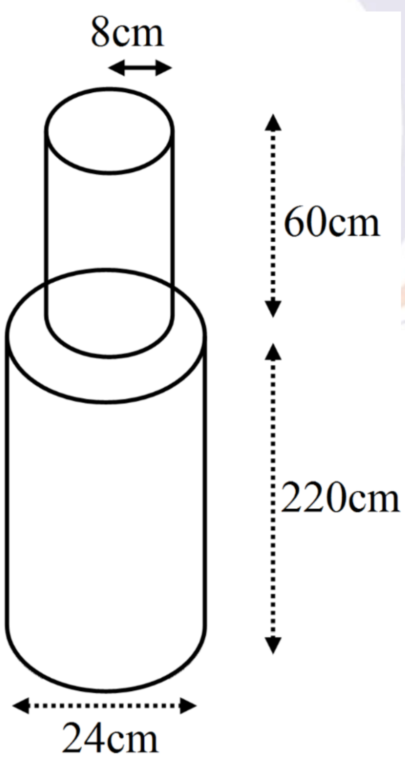
$$\Rightarrow n = \frac{1}{2} \times \frac{1000}{5}$$

$$\Rightarrow n = \frac{500}{5} = 100$$

अत: गोलियों की संख्या 100 है।

प्रश्न 6 ऊँचाई 220cm और आधार व्यास 24cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60cm और त्रिज्या 8cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का स्तंभ बना है। इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है 1cm^3 लोहे का द्रव्यमान लगभग 8g होता है। (π = 3.14 लीजिए।)

उत्तर-



मोटे बेलन की ऊँचाई) H) = 220cm

व्यास) d) = 24cm

अत :त्रिज्या) R) = 12cm

पतले बेलन की ऊँचाई) h) = 60cm

त्रिज्या) r) = 8cm

अब लौह स्तंभ का आयतन $= \pi R^2 H + \pi r^2 h$

$$= \pi(R^2 H + r^2 h)$$

$$= 3.14(12 \times 12 \times 220 + 8 \times 8 \times 60)$$

$$= 3.14(31680 + 3840)$$

$$= 3.14(35520)$$

$$= 111532.8 cm^2$$

लोहे का द्रव्यमान $= 111532.8 cm^3 \times 8$

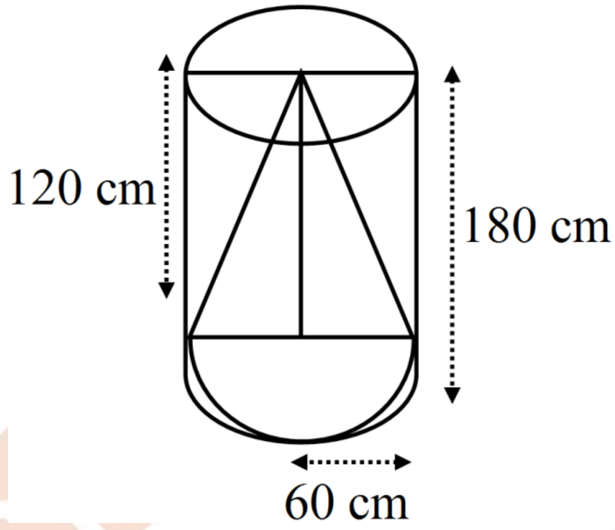
$$= 892262.4 g$$

अब द्रव्यमान kg में $= \frac{892262.4}{1000} = 8922624 kg$

अर्थात लौह स्तंभ का द्रव्यमान 892.26kg है।

प्रश्न 7 एक ठोस में, ऊँचाई 120cm और त्रिज्या 60cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60cm है, और ऊँचाई 180cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



ठोस के शंकु की ऊँचाई) h) = 120cm

ठोस के शंकु की त्रिज्या) r) = 60cm

ठोस के अर्धगोले की त्रिज्या) r) = 60cm

बड़े बेलन की ऊँचाई) H) = 180cm

बड़े बेलन की की त्रिज्या) r) = 60cm

शेष बचे पानी का आयतन = बड़े बेलन का आयतन- ठोस का आयतन

$$= \pi r^2 H - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \pi r^2 \left[H - \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{3}r\right)\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \left[180 - \left(\frac{1}{3} \times 120 + \frac{2}{3} \times 60\right)\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60[180 - (40 + 40)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60[180 - 80]$$

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60[100]$$

$$= \frac{22 \times 360000}{7} cm^3$$

$$= \frac{7920000}{7} cm^2$$

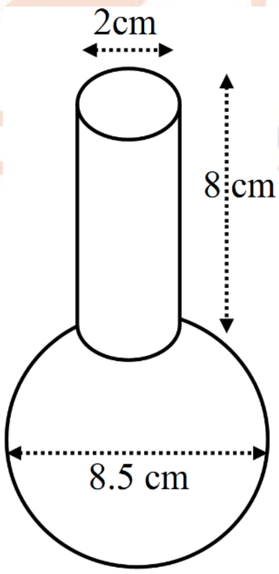
$$= 1131428.57cm^2$$

या आयतन घन मीटर में $= \frac{1131428.57}{100 \times 100 \times 100} m^3$

$= 1.131m^3$ (लगभग)

प्रश्न 8 एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8cm है और व्यास 2cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5cm है। इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345cm^3 है। जाँच कीजिए कि बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए की उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है। $\pi = 3.14$

उत्तर-



गोलाकार भाग का व्यास = 8.5cm

गोलाकार भाग का त्रिज्या $(\mathrm{R}) = \frac{8.5}{2}\mathrm{cm}$

बेलनाकार गर्दन की ऊँचाई (h) = 8cm

गर्दन का व्यास (d) = 2cm

इसलिए, त्रिज्या (r) = 1cm

इसमें भरे जा सकने वाले पानी का आयतन = गोले का आयतन + बेलन का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3 + \pi \mathrm{r}^2 \mathrm{h}$$

$$= 3.14\left(\frac{4}{3} \times \frac{8.5}{2} \times \frac{8.5}{2} \times \frac{8.5}{2} + 1 \times 1 \times 8\right)$$

$$= 3.14\left(\frac{8.5 \times 8.5 \times 8.5}{3 \times 2} + 8\right)$$

$$= 3.14\left(\frac{614.125 + 48}{6}\right)$$

$$= 3.14\left(\frac{662.125}{6}\right)$$

$$= \frac{1.57 \times 662.125}{3}$$

$$= \frac{1.57 \times 662.125}{3}$$

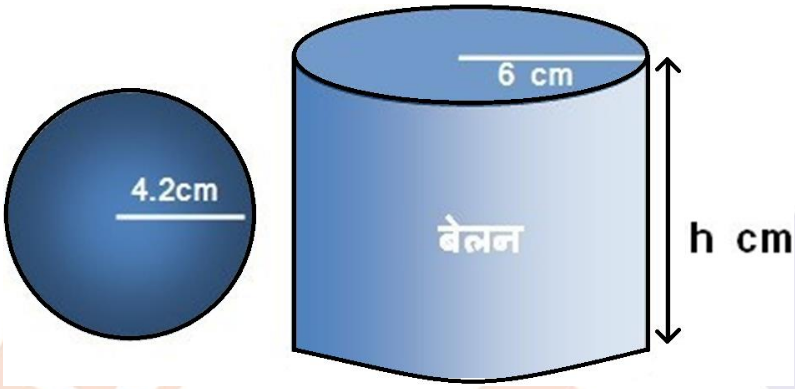
$$= 346.51\mathrm{cm}^3$$

अतः बच्चे द्वारा ज्ञात माप सही नहीं है।

प्रश्नावली 13.3 (पृष्ठ संख्या 276)

प्रश्न 1 त्रिज्या 4.2cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



धातु के गोले की त्रिज्या) r) = 4.2cm

बेलन की त्रिज्या) R) = 6cm और

माना बेलन की ऊँचाई h cm है।

बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\Rightarrow \pi R^2 h = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow R^2 h = \frac{4}{3} r^3$$

$$\Rightarrow 6^2 h = \frac{4}{3}(4.2)^3$$

$$\Rightarrow 36h = \frac{4}{3} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2$$

$$\Rightarrow h = \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 36}$$

$$\Rightarrow h = \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 9} = 1.4 \times 1.4 \times 1.4 = 2.74 cm$$

प्रश्न 2 क्रमशः 6cm, 8cm और 10cm त्रिज्याओं वाले धातु के ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना बड़े ठोस गोले की त्रिज्या = R cm

दिया हो- r_1 = 6cm, r_2 = 8cm और r_3 = 10cm

बड़े गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi(r_1)^3 + \frac{4}{3}\pi(r_2)^3 + \frac{4}{3}\pi(r_3)^3$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left[(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3\right]$$

दोनों तरफ सरल करने पर हम पाते है-

$$\Rightarrow (R)^3 = \left[(r_1)^3 + (r)^3 + (r)^3\right]$$

$$\Rightarrow (R)^3 = \left[(6)^3 + (8)^3 + (9)^3\right]$$

$$\Rightarrow (R)^3 = [216 + 512 + 1000]$$

$$\Rightarrow (R)^3 = 1728$$

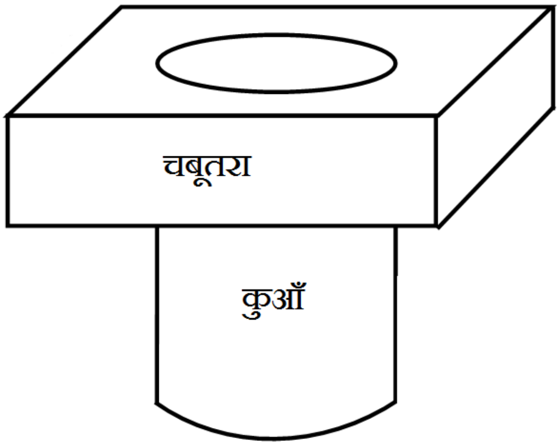
$$\Rightarrow R = \sqrt[2]{1728}$$

$$\Rightarrow R = 12$$

अतः नए गोले की त्रिज्या 12cm है।

प्रश्न 3 व्यास 7m वाला 20m गहरा एक कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22m × 14m वाला एक चबूतरा बनाया गया है। इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



कुएँ का व्यास = 7m

अत :कुएँ की त्रिज्या) r) = 3.5cm

कुएँ की गहराई) h) = 20m चबूतरे की लम्बाई) l) = 22m और चौड़ाई) b) = 14m

माना चबूतरे की ऊँचाई = h m

चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन $l \times b \times h = \pi r^2 h$

$$22\text{cm} \times 14\text{cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20\text{m}$$

$$\Rightarrow 22\text{cm} \times 14\text{cm} \times h = \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 20$$

$$\Rightarrow h = \frac{22 \times 3.5 \times 3.5 \times 20}{7 \times 14 \times 22}$$

$$\Rightarrow h = \frac{35 \times 35 \times 20}{7 \times 14 \times 10 \times 10}$$

$$\Rightarrow h = \frac{5 \times 35 \times 2}{14 \times 10}$$

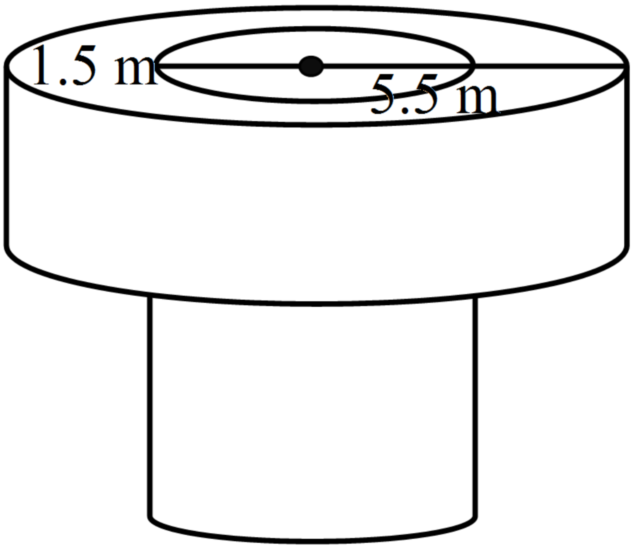
$$\Rightarrow h = \frac{35 \times 2}{14 \times 2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{35}{14} = \frac{5}{2} = 2.5\text{m}$$

अतः चबूतरे की ऊँचाई = 2.5m

प्रश्न 4 व्यास 3m वाला 14m गहरा की गहराई तक खोदा जाता है। इससे निकली हुई मिट्टी को कुँए के चारों ओर 4m चौड़ी एक वृत्ताकार वलय (ring) बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है। इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



कुएँ का व्यास = 3m

कुएँ की त्रिज्या $(r) = \frac{3}{2}m = 1.5m$

कुएँ की गहराई (H) = 14 m

कुएँ के चारों वृताकार वलय की चौड़ाई = 4m

अत: वलय की बाह्य त्रिज्या (R) = 4m + 1.5 = 5.5m

माना वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = h m

वलयाकार चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकाली गई मिटटी का आयतन

$$\Rightarrow \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi r^2 H$$

$$\Rightarrow \pi h(R^2 - r^2) = \pi r^2 H$$

$$\Rightarrow h(R^2 - r^2) = r^2 H$$

$$\Rightarrow h(5.5 + 1.5)(5.5 - 1.5) = 1.5 \times 1.5 \times 14$$

$$\left[a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\right]$$

$$\Rightarrow h(7 \times 4) = 1.5 \times 1.5 \times 14$$

$$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5 \times 14}{7 \times 4}$$

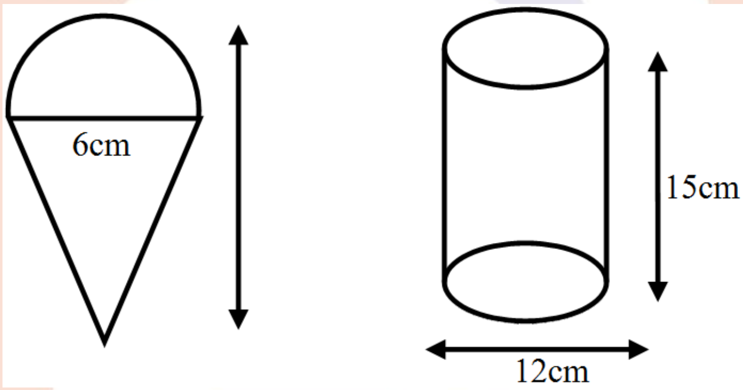
$$\Rightarrow h = \frac{2.25}{2}$$

$$\Rightarrow h = 1.125m$$

अतः वलयाकार चबूतरे की ऊँचाई = 1.125m

प्रश्न 5 व्यास 12cm और ऊँचाई 15cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम से पूरा भरा हुआ है। इस आइसक्रीम को ऊँचाई 12cm और व्यास 6cm वाले शकुओं में भरा जाना है, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार होगा। उन शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं।

उत्तर-



बेलनाकार बर्तन का व्यास = 12cm

तो बर्तन की त्रिज्या R = 6cm

बर्तन की ऊँचाई H = 15cm

आइसक्रीम की त्रिज्या $r = \frac{6}{2} = 3cm$

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई h = 12cm

भरे जा सकने वाले आइसक्रीमो की संख्या = $\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{एक आइसक्रीम का आयतन}}$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 H}{\text{अर्धगोले का आयतन} + \text{शंकु का आयतन}}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 H}{\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 (2r+h)}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi 6^2 \times 15}{\frac{1}{3}\pi 3^2 (2\times 3+12)}$$

$$\Rightarrow \frac{6^2 \times 15}{\frac{1}{3} 3^2 (18)}$$

$$\Rightarrow \frac{36\times 15}{3\times 18}$$

$$\Rightarrow \frac{2\times 15}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{3} = 10$$

अतः भरे जा सकने वाले आइसक्रीम की संख्या 10 है।

प्रश्न 6 विमाओं 5.5cm × 10cm × 3.5cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75cm व्यास और 2mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा?

उत्तर-

सिक्कों का व्यास = 1.75cm

त्रिज्या $r = \frac{1.75}{2}\text{cm}$

सिक्के की ऊँचाई h = 2mm $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\text{cm}$

माना चाँदी के सिक्कों की संख्या n है।

अतः n चाँदी के सिक्कों का आयतन - घनाभ का आयतन

$$\Rightarrow n(\pi r^2 h) = l \times b \times h$$

$$\Rightarrow n = \frac{l \times b \times h}{\pi r^2 h}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5cm \times 10cm \times 3.5cm}{\frac{22}{7} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5 \times 10 \times 3.5 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5}{22 \times 1.75 \times 1.75}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 100 \times 100}{22 \times 175 \times 175 \times 10 \times 10}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 35 \times 2 \times 5 \times 100}{11 \times 25 \times 175}$$

$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 10 \times 2 \times 100}{11 \times 25}$$

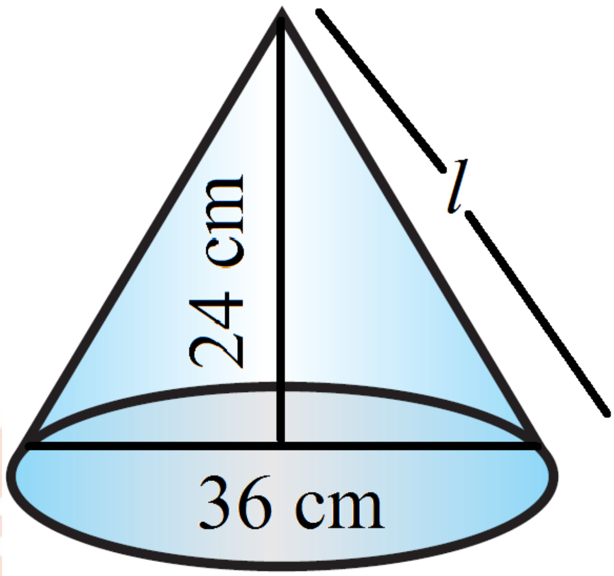
$$\Rightarrow n = \frac{5 \times 10 \times 2 \times 100}{25}$$

$$\Rightarrow n = \frac{10 \times 2 \times 100}{5} = 2 \times 2 \times 100 = 400$$

अतः सिक्कों की संख्या 400 है।

प्रश्न 7 32cm ऊँची और आधार त्रिज्या 18cm वाली एक बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है। इस बाल्टी को भूमि पर खाली किया जाता है और इस रेते की एक शंक्वाकार ढेरी बनाई जाती है। यदि शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई 24cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



बेलनाकार बाल्टी की त्रिज्या R = 18cm

और ऊँचाई H = 32cm

शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई = 24cm

बेलनाकार बाल्टी का आयतन $= \pi R^2 H$

शंक्वाकार ढेरी का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

शंक्वाकार ढेरी का आयतन = बेलनाकार बाल्टी का आयतन

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\pi r^2 h = \pi R^2 H$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} r^2 \times 24 = \frac{22}{7} \times 18 \times 18 \times 32$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \times r^2 \times 24 = 18 \times 18 \times 32$$

$$\Rightarrow r^2 \times 8 = 18 \times 18 \times 32$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{18\times18\times32}{8}$$

$$\Rightarrow r^2 = 18 \times 18 \times 4$$

$$\Rightarrow r^2 = \sqrt{18 \times 18 \times 4}$$

$$\Rightarrow r = 36$$

$$l = \sqrt{24^2 + 36^2}$$

$$l = \sqrt{(12 \times 2)^2 + (12 \times 3)^2}$$

$$l = \sqrt{12^2 \times (2^2 + 3^2)} = 12\sqrt{(2^2 + 3^2)}$$

$$l = 12\sqrt{4+9} = 12\sqrt{13}\,\text{cm}$$

अत: ढेरी की त्रिज्या = 36cm और तिर्यक ऊँचाई $= 12\sqrt{13}\,\text{cm}$ है।

प्रश्न 8 6m चौड़ी और 1.5m गहरी एक नहर में पानी 10 km/ h की चाल से बह रहा है। 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के लिए 8cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है।

उत्तर-

1 घंटे में नहर की लम्बाई l = 10km = 10000m

नहर की गहराई b = 6m

नहर की गहराई h = 1.5m

1 घंटे में नहर में पानी का आयतन = l × b × h

= 10000 × 6 × 1.5m^3

= 90000m^3

अतः 30 मिनट में पानी का आयतन $= \frac{90000}{2} m^3$

$= 450000m^3$

सिंचाई के लिए पानी की ऊँचाई $= 8cm = \frac{8}{100} m$

अब, क्षेत्रफल × ऊँचाई = आयतन

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $\times \frac{8}{100} = 45000m^3$

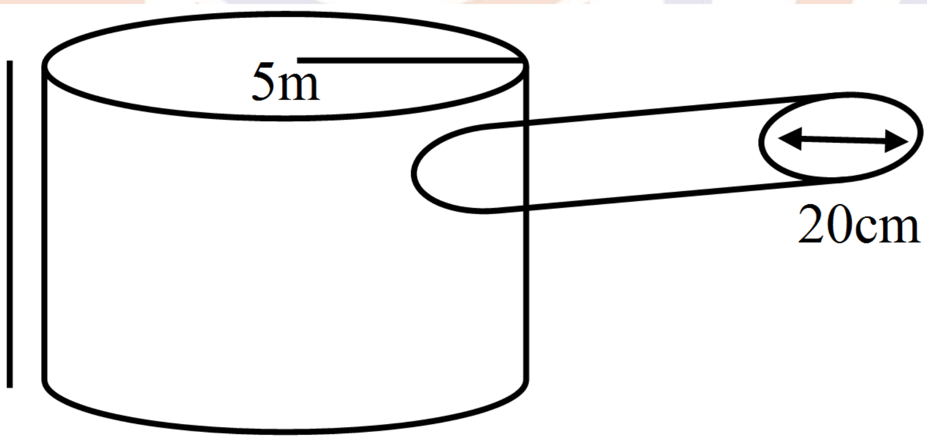
$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= 45000m^3 \times \frac{100}{8}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $= 562500m^2$

अतः सिंचाई के लिए 562500m^3 क्षेत्रफल की जरूरत है।

प्रश्न 9 एक किसान अपने खेत में बनी 10m व्यास वाली और 2m गहरी एक बेलनाकार टंकी को आंतरिक व्यास 20cm वाले एक पाइप द्वारा एक नहर से जोड़ता है। यदि पाइप में पानी 3km/ h की चाल से बह रहा है, तो कितने समय बाद टंकी पूरी भर जाएगी?

उत्तर-



टंकी का व्यास = 10m

टंकी की त्रिज्या = 5m

टंकी की गहराई h = 2m

पाइप का व्यास = 20cm पाइप की त्रिज्या = 10cm = 0.1m

1 घंटे में पाइप की लम्बाई = 3km = 3000m

अब पाइप में 1 घंटे में पानी का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \pi \times 0.1 \times 0.1 \times 3000$

$= \pi \times 30 m^3$

टंकी में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \pi \times 5 \times 5 \times 2$

टंकी भरने में लगा समय $= \dfrac{\text{टंकी का आयतन}}{\text{1 घंटे में पाइप में पानी}}$

$= \frac{\pi \times 5 \times 5 \times 2}{\pi \times 30}$

$= \frac{5 \times 5}{15}$

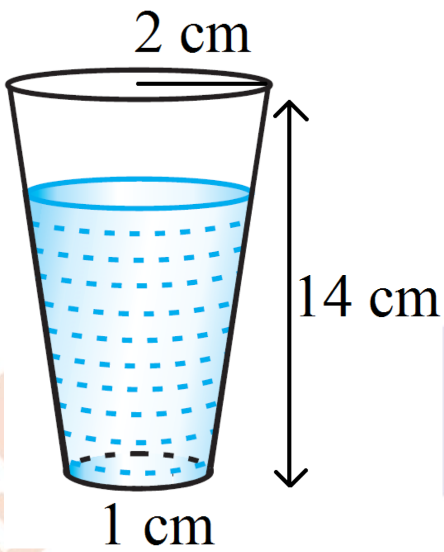
$= \frac{5}{3}$ घंटा

मिनट में लगा समय $= \frac{5}{3} \times 30 = 5 \times 20 = 100m$

प्रश्नावली 13.4 (पृष्ठ संख्या 282)

प्रश्न 1 पानी पीने वाला एक गिलास 14cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4cm और 2cm हैं। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



छिन्नक वाले गिलास की ऊँचाई = 14cm

उपरी सिरे का व्यास = 4cm

उपरी सिरे की त्रिज्या R = 2cm

निचली सिरे का व्यास = 2cm

निचली सिरे की त्रिज्या I = 1cm

गिलास की धारिता $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14(2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$$

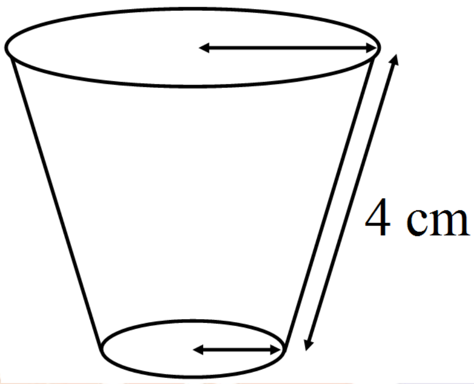
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 2(4 + 1 + 2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 14$$

$$= \frac{308}{3} = 102\frac{2}{3}\text{cm}^3$$

प्रश्न 2 एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18cm और 6cm हैं। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई (l) = 4cm

ऊपरी सिरे का परिमाप = 18cm

$$2\pi R = 18$$

$$R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi}$$

निचले सिरे परिमाप = 6cm

$$2\pi r = 6$$

$$r = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(R + r)$

$$= \pi \times 4\left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi}\right)$$

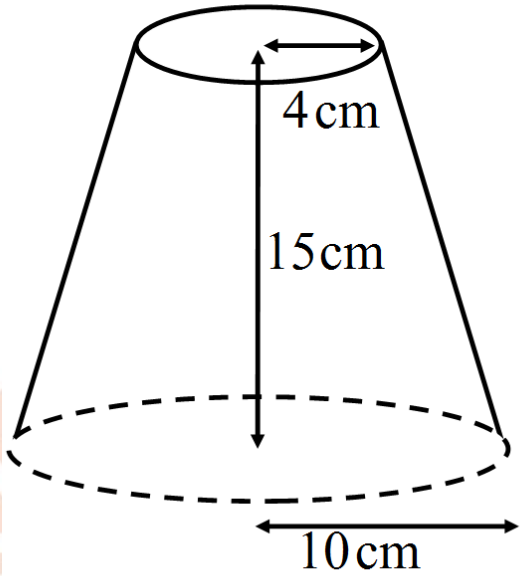
$$= \pi \times 4\left(\frac{12}{\pi}\right)$$

$$= 48 cm^2$$

अतः छिन्नक का पृष्ठीय क्षेत्रफल $48cm^2$ है।

प्रश्न 3 एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकर की है (देखिये आकृति)। यदि इसके खुले सिरे की त्रिज्या 10cm है, ऊपरी सिरे की त्रिज्या 4cm है टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15cm है तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- टोपी की तिर्यक ऊँचाई (l) = 15cm



खुले सिरे की त्रिज्या (R) = 10cm

ऊपरी सिरे की त्रिज्या (r) = 4cm

बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल $= \pi l(R + r) + \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 15(10 + 4) + \frac{22}{7} \times 4 \times 4$

$= \frac{22}{7} \times 15(14) + \frac{22}{7} \times 16$

$= \frac{22}{7} \times 210 + \frac{22}{7} \times 16$

$= \frac{22}{7}(210 + 16)$

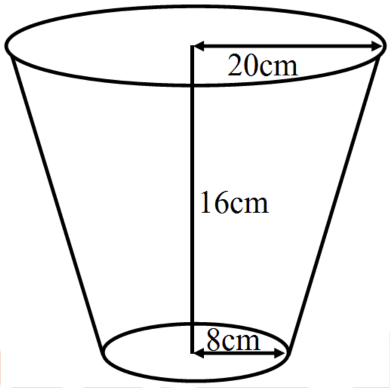
$= \frac{22}{7}(226)$

$= \frac{4972}{7}\,\text{cm}^2$

$= 710\frac{2}{7}\,\text{cm}^2$

प्रश्न 4 धातु की चादर से बना और ऊपर से खुला एक बर्तन शंकु के छिन्नक के आकार का है, जिसकी ऊँचाई 16cm है तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8cm और 20cm हैं। 20 रू प्रति लीटर की दर से, इस बर्तन को पूरा भर सकने वाले दूध का मूल्य ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस बर्तन को बनाने के लिए प्रयुक्त धातु की चादर का मूल्य 8 रू प्रति 100cm^2 की दर से ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



बर्तन की ऊँचाई (h) = 16cm

बर्तन की ऊपरी सिरे की त्रिज्या (R) = 20cm

बर्तन के निचले सिरे की त्रिज्या (r) = 8cm

बर्तन का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16(20^2 + 8^2 + 20 \times 8)$$

$$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16(400 + 64 + 160)$$

$$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16 \times 624$$

$$= 3.14 \times 3328$$

$$= 10449.92 \text{cm}^3$$

लीटर में धारिता $= \frac{10449.92}{1000}$ लीटर

लीटर में धारिता = 10.45 लीटर (लगभग)

दूध का मूल्य = 20 × 10.45 = रू 209.00

तिर्यक ऊँचाई (i) $= \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

$$= \sqrt{16^2 + (20 - 8)^2}$$

$$= \sqrt{256 + 12^2}$$

$$= \sqrt{256 + 144}$$

$$= \sqrt{400} = 20\text{cm}$$

प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल $= \pi l(R + r) + \pi r^2$

$$= 3.14 \times 20(20 + 8) + 3.14 \times 8 \times 8$$

$$= 3.14 \times 20(28) + 3.14 \times 64$$

$$= 3.14(560 + 64)$$

$$= 3.14(624)$$

$$= 1959.36\text{cm}^2$$

8 रु प्रति 100cm^2 की दर से चादर का मूल्य $= \frac{8}{100} \times 1959.36$

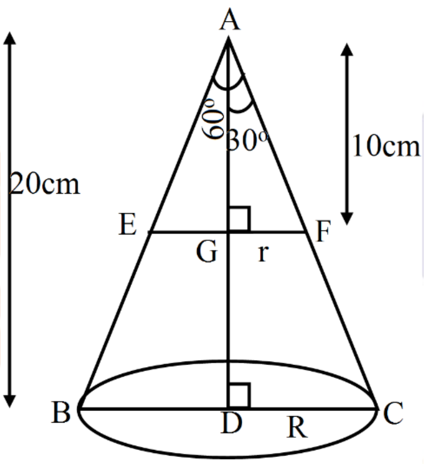
$$= \frac{15674.88}{100} = 156.75$$

अतः धातु के चादर का मूल्य रु 156.75 है।

प्रश्न 5 20cm ऊँचाई और शीर्ष कोण (vertical angle) 60° एक शंकु को उसकी ऊँचाई के बीचोंबीच से होकर जाते हुए एक ताल से दो भागों में काटा गया है, जबकि ताल शंकु के आधार के समांतर है।

यदि इस प्राप्त शंकु के छिन्नक को व्यास $\frac{1}{16}$ cm वाले एक तार के रूप में बदल दिया जाता है तो की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया है-

$$AD = 20cm$$

तो AG = 10cm (बीचो बीच से काटा गया है)

$$\angle BAC = 60^\circ$$

AD $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है।

इसलिए, $\angle CAD = 30^\circ$

समकोण $\triangle AGF$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{r}{AG}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{10}$$

$$\Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{3}} \dots (i)$$

इसी प्रकार, समकोण $\triangle ADC$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{R}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{20}$$

$$\Rightarrow R = \frac{20}{\sqrt{3}} \quad \ldots \text{(ii)}$$

माना तार की लम्बाई H है।

$$\text{त्रिज्या} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}\,\text{cm}$$

तार का आयतन = प्राप्त छिन्नक का आयतन

$$\Rightarrow \pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10\left[\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10\left[\frac{400}{3} + \frac{100}{3} + \frac{100}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{700}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{7000}{9}$$

$$\Rightarrow H = \frac{7000}{9} \times \frac{32}{1} \times \frac{32}{1}\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow H = \frac{7168000}{9} \times \frac{1}{100}\,\text{m}$$

$$\Rightarrow H = \frac{71680}{9}\,\text{m}$$

$$\Rightarrow H = 7964.44\text{m}$$

अतः तार की लम्बाई 7964.44m है।

प्रश्नावली 13.5 (पृष्ठ संख्या 283)

प्रश्न 1 व्यास 3mm वाले ताँबे के तार को 12cm लंबे और 10cm व्यास वाले एक बेलन पर इस प्रकार लपेटा जाता है वह बेलन के वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढक लेता है। तार की लंबाई और द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यह मानते हुए कि ताँबे का घनत्व 8.88g प्रति cm^3 है।

उत्तर-

सिलेंडर की लंबाई = 12cm = 120mm

$\because$ 3mm = 1 को कवर करने के लिए राउंड की संख्या

$\therefore$ 120mm को कवर करने के लिए राउंड की संख्या

$$=\frac{120}{3}=40$$

Rcm बेलन की त्रिज्या हो, तब

$$=\mathrm{r}=\frac{10}{2}=5\mathrm{cm}$$

$\therefore$ एक चक्कर पूरा करने में तार की लंबाई,

$$=2\pi$$

$$=2\pi(5)=10\pi\mathrm{cm}$$

$\therefore$ पूरी सतह को पूरा करने में तार की लंबाई (40 राउंड)

$$=10\pi\times 40=400\pi\mathrm{cm}$$

तांबे के तार का त्रिज्या $=\frac{3}{2}\mathrm{mm}=\frac{3}{20}\mathrm{cm}$

$\therefore$ तार की मात्रा $=\pi\left(\frac{3}{20}\right)^2(400\pi)$

$$9\pi^2\mathrm{cm}^3$$

$$=79.92\pi^2\mathrm{g}$$

प्रश्न 2 एक समकोण त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ 3cm और 4cm हैं (कर्ण के अतिरिक्त), को उसके कर्ण के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त द्वी-शंकु (double cone) के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π भी उपयुक्त लगे, प्रयोग कीजिए।)

उत्तर- सही त्रिकोण CAB में:

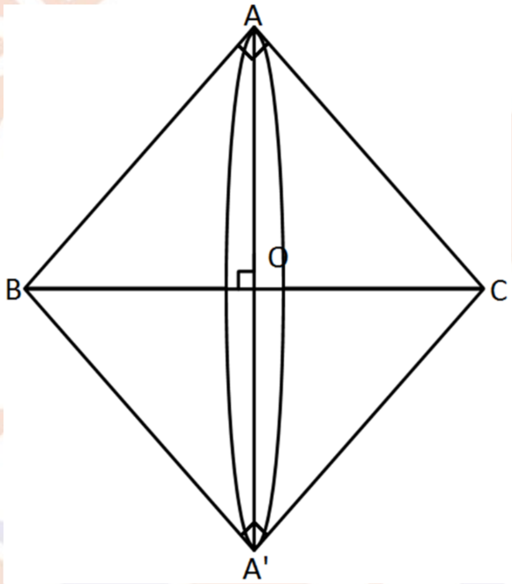
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

[पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करना[

$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2$

$\Rightarrow BC^2 = 9 + 16 = 25$

$\Rightarrow BC = 5cm$



अब, में $\triangle AOB$ और $\triangle CAB$

$\angle AOB = \angle CAB (90°)$

$\angle B = \angle B$ [Common]

इसलिए, AA इसी तरह की स्थिति का उपयोग करके,

$\triangle AOB \sim \triangle CAB$

$\Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{AB}{CB}$

$\Rightarrow \frac{OA}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow OA = \frac{12}{5} cm$

इसी प्रकार, $\frac{OB}{AB} = \frac{AB}{CB}$

$\Rightarrow \frac{OB}{3} = \frac{3}{5} \Rightarrow OB = \frac{9}{5} cm$

$\therefore OC = BC - OB$

$= 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5} cm$

अभी डबल शंकु की मात्रा तो बनती है।

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \times \frac{16}{5} + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \times \frac{9}{5}$

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \left[\frac{16}{5} + \frac{9}{5}\right]$

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \left[\frac{25}{5}\right]$

$= \left(\frac{1}{3}\pi \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{25}{5}\right) cm^3$

$= \left(\frac{3600}{375}\pi\right) cm^3$

$= 9.6\pi cm^3$

$(9.6 \times 3.14) cm^3$

$$= 30.14\text{cm}^3$$

और डबल कोन का सरफेस एरिया-

$$= \pi \times \frac{12}{5} \times 3 + \pi \times \times \frac{12}{5} \times 4$$

$$= \pi \times \frac{12}{5}(3 + 4)$$

$$= \pi \times \frac{12}{5} \times 7 = \frac{84}{5}\pi$$

$$= \frac{84}{5} \times 3.14 = 52.75\text{cm}^2.$$

प्रश्न 3 एक टंकी, जिसके आंतरिक मापन 150cm × 120cm × 110cm हैं, में 129600cm^3 पानी में कुछ छिद्र वाली ईंटे तब तक डाली जाती हैं, जब तक कि ताकि पूरी ऊपर तक भर न जाए। प्रत्येक ईंट अपने आयतन का $\frac{1}{17}$ पानी सोख लेती है। यदि प्रत्येक ईंट की माप 22.5cm × 7.5cm × 6.5cm हैं, तो टंकी में कुल कितनी ईंटे डाली जा सकती हैं, ताकि उसमें से पानी बाहर न बहे?

उत्तर- गढ्ढे में पानी की मात्रा = 129600cm ^{3}

आइए, b और h, Cistern की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं। फिर

मैं = 150cm = 120cm और एच = 110cm

अब, Cistern का आयतन = l × b × h

= 150 × 120 × 110 = 1980000cm^3

∴ भरा जाने वाला गढ्ढा का आयतन

= (1980000 - 129600)cm^3

= 1850400cm^3

एक ईंट की मात्रा) = 22.5 × 7.5 × 6.5)cm^3

= 1096.875cm^3

बता दें कि ईंटों की कुल संख्या x है।

फिर, एक्स ईंटों द्वारा पानी अनुपस्थित,

$$= \left(\frac{x}{17} \times 1096.875\right) cm^3$$

$\therefore$ गढ्ढे में बचे पानी का आयतन,

$$= \left(129600 - \frac{x}{17} \times 1096.875\right) cm^3$$

चूंकि, पुल के ऊपर तक का हिस्सा भर जाता है। इसलिए,

गढ्ढे का आयतन = ईंटों के गढ्ढे की मात्रा में छोड़े गए पानी का आयतन

$$\Rightarrow 1980000 = \left(129600 - \frac{x}{17} \times 1096.875\right) + x \times 1096.875$$

$$\Rightarrow x = 1792.410$$

इसलिए, ईंटों की कुल संख्या = 1792 (लगभग)।

प्रश्न 4 किसी महीने के 15 दिनों में, एक नदी की घाटी में 10cm वर्षा हुई। यदि इस घाटी का क्षेत्रफल 97280km^2 है, तो दर्शाइए कि कुल वर्षा लगभग तीन नदियों के सामान्य पानी के योग के समतुल्य थी, जबकि प्रत्येक नदी 1072km लंबी, 75m चौड़ी और 3m गहरी है।

उत्तर-

वर्षा का आयतन-

$$= 7280 \times \frac{10}{100 \times 1000}$$

$$= 0.7280\text{km}$$

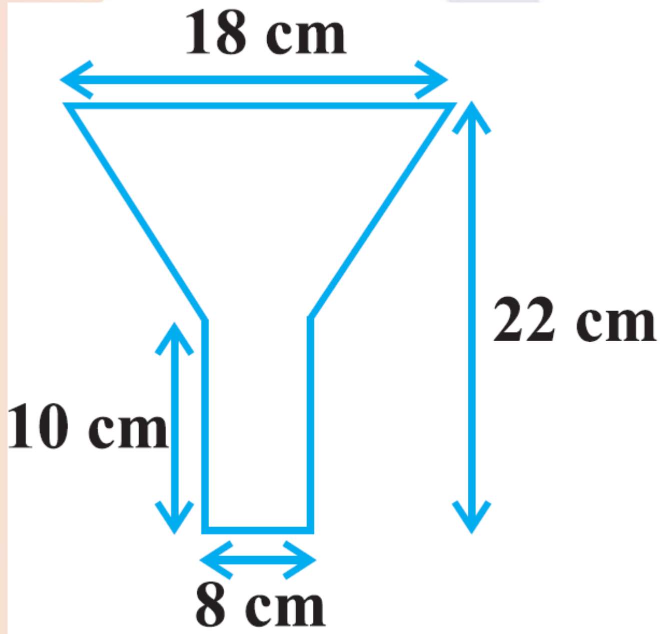
तीन नदियों का आयतन-

$$= \left(3 \times 1072 \times \frac{75}{1000} \times \frac{3}{100}\right)\text{km}$$

$$0.7236\text{km}$$

इसलिए, दोनों लगभग बराबर हैं।

प्रश्न 5 टीन की बनी हुई एक तेल की कुप्पी 10cm लंबे एक बेलन में एक शंकु के छिन्नक को जोड़ने से बनी है। यदि इसकी कुल ऊँचाई 22cm है, बेलनाकार भाग का व्यास 8cm है और कुप्पी के ऊपरी सिरे का व्यास 18cm है, तो इसके बनाने में लगी टीन की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)।



उत्तर-

$$R = \frac{18}{2} = 9cm; r = \frac{8}{2} = 4cm$$

आइए और एच क्रमशः तिरछी ऊंचाई और कुंठा की ऊंचाई, फिर

h = कुल ऊँचाई - बेलनाकार भाग की ऊँचाई

= 22cm - 10cm = 12cm

और $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

$$= \sqrt{(12)^2 + (9 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{144 + 25}$$

$$= \sqrt{169} = 13cm$$

अभी फ्रुम का घुमावदार सतह क्षेत्र-

$$= \pi l(R + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 13(9 + 4)$$

$$= \frac{22}{7} \times 13 \times 13$$

$$= 531.14cm^2$$

आज्ञा देना और h_1 क्रमशः त्रिज्या और त्रिज्या की ऊंचाई है।

फिर, और h_1 = 4cm और एच = 10cm

अभी, सिलेंडर का घुमावदार सतह क्षेत्र-

$$= 2\pi r_1 h_1$$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 10\right) cm^2$$

$$= 251.43cm^2$$

अतः टिन का क्षेत्र आवश्यक है,

= बेलन के घुमावदार सतह क्षेत्र + सिलेंडर का घुमावदार सतह क्षेत्र-

= 531.14 + 251.43

= 782.57cm^2

प्रश्न 6 शंकु के एक छिन्नक के लिए, पूर्व स्पष्ट किए संकेतों का प्रयोग करते हुए, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल के उन सूत्रों को सिद्ध कीजिए, जो अनुच्छेद 13.5 में दिए गए हैं।

उत्तर-

माना कि ऊँचाई, I तिर्यक ऊँचाई एवं r_1 और r_2 फ्रूम के परिपत्र आधार की त्रिज्या है, $r_1 > r_2$

माना की कोण VAB की ऊँचाई h_1 और तिर्यक ऊँचाई इस प्रकार है कि VO = h_1 और VA = VB = l_1

$\therefore$ VA' = VA - AA = l_1 - I

और VO' = VO - OO' = h_1 - h

तथा $\triangle VOA \approx \triangle VO'A'$

$$\therefore \frac{VO}{VO'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{VA}{VA'}$$

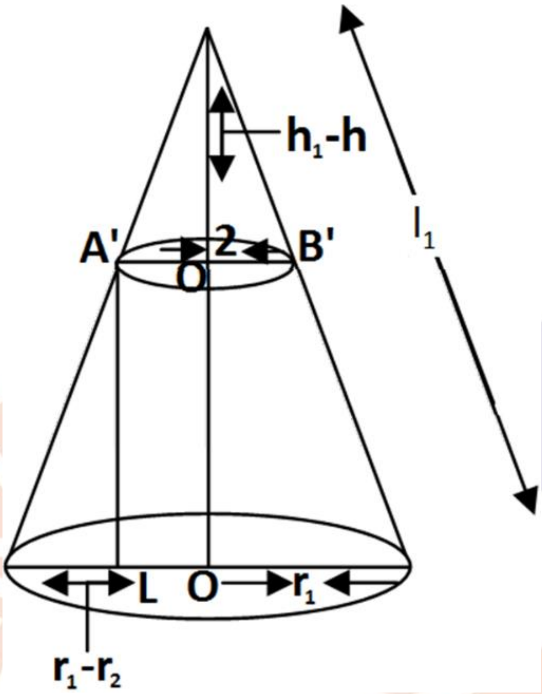
$$\Rightarrow \frac{h_1}{h_1 - h} = \frac{r}{R} = \frac{l_1}{l_1 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h_1 - h} = \frac{F_2}{F_1} = 1 - \frac{l_1}{l_1 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_1} = 1 - \frac{r_2}{r_1} \text{ and } \frac{l}{l_1} = 1 - \frac{r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \text{ and } \frac{l}{l_1} = 1 - \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{hr_1}{r_1 - r_2} \text{ and } l_1 = \frac{lr_1}{r_1 - r_2} \ldots (A)$$



अभी,

शंकु VA'B 'की ऊँचाई-

$$= h_1 - h = \frac{hr_1}{r_1 - r_2} - h = \frac{hr_2}{r_1 - r_2} \ldots (B)$$

$$= l_1 - l = \frac{lr_1}{r_1 - r_2} - l = \frac{lr_2}{r_1 - r_2} \ldots (c)$$

आइए, शंकु के फ्रुम के घुमावदार सतह क्षेत्र को निरूपित करते हैं। फिर,

शंकु VAB का एस = पार्श्व (घुमावदार) सतह क्षेत्र - शंकु VA'B 'का घुमावदार सतह क्षेत्र,

$$\Rightarrow s = \pi r_1 l_1 - \pi r_2 (l_1 - l)$$

$$\Rightarrow s = \pi r_1 . \frac{lr_1}{r_1 - r_2} - \pi r_1 . \frac{lr_2}{r_1 - r_2}$$

[A और C का उपयोग करना]

$$S=\pi\left(\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1 r_2}\right)l$$

$$=\pi(r_1-r_2)l$$

छिन्नक का वक्र सतही क्षेत्रफल-

फ्रिज़्म का कुल सतह क्षेत्र = पार्श्व (घुमावदार) सतह क्षेत्र + गोलाकार आधारों का भूतल क्षेत्र,

$$=\pi(r_1-r_2)l+\pi r_1^2+\pi r_2^2$$

$$=\pi\left[(r_1-r_2)l+r_1^2+r_2^2\right]$$

प्रश्न 7 शंकु के एक छिन्नक के लिए, पूर्व स्पष्ट किए संकेतों का प्रयोग करते हुए, आयतन का वह सूत्र कीजिए, जो अनुच्छेद 13.5 में दिया गया है।

उत्तर-

बता दें कि V शंकु के फ्रुम का आयतन है। फिर,

V = शंकु की मात्रा VAB - शंकु VA 'B' का आयतन,

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1-\frac{1}{3}\pi r_2^2(h_1-h)$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}\left[r_1^2 h_1-r_2^2(h_1-h)\right]$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{hr_1^3}{r_1-r_2}\right)-\left(\frac{hr_2^3}{r_1-r_2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}\left[\frac{h}{r_1-r_2}(r_1-r_2)\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}h\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$$

इस प्रकार, शंकु के फ्रुम की मात्रा द्वारा दी गई है।

सांख्यिकी

शाब्दिक रूप में सांख्यिकी शब्द अंग्रेजी के शब्द statistics का हिन्दी रूपान्तर है जो लैटिन भाषा के शब्द स्टेटस (status) तथा जर्मन भाषा शब्द statistik से भी जोड़ते हैं जिसका अर्थ राज्य है। साख्यिकी का शाब्दिक अर्थ है संख्या से संबंधित शास्त्र। इस प्रकार विषय के रूप में सांख्यिकी ज्ञान की वह शाखा है जिसका संबंध संख्याओं या संख्यात्मक आंकड़ों से हो। सांख्यिकी सिद्धान्तों को वैज्ञानिक रूप में प्रस्तुत करने का श्रेय जर्मन विद्वान गाॅटफ्रायड एचेनवाल को है इसी कारण एकेनवेल को सांख्यिकी का जनक कहा जाता है। वर्तमान युग में सांख्यिकी को विकसित करने में कार्ल पियर्सन का योगदान सबसे अधिक है।

सांख्यिकी की परिभाषा

1. बाउले - "समंक किसी अनुसंधान के किसी विभाग में तथ्यों का संख्या के रूप में प्रस्तुतीकरण है, जिन्हें एक दूसरे से सम्बन्धित रूप में प्रस्तुत किया जाता है"।

2. कानर - "सांख्यिकी किसी प्राकृतिक अथवा सामाजिक समस्या से सम्बन्धित माप की गणना या अनुमान का क्रमबद्ध एवं व्यवस्थित ढंग है जिससे कि अन्तसम्बन्धों का प्रदर्शन किया जा सके"।

3. वालिस और राबटस - "सांख्यिकी के परिमाणात्मक पहलुओं के संख्यात्मक विवरण है जो मदों की गिनती या माप के रूप में व्यक्त होते हैं"।

सांख्यिकी के प्रकार

सांख्यिकी के मुख्यतः दो प्रकार प्रचलित है -

1. प्राचल सांख्यिकी

प्राचल सांख्यिकी में सभी के किसी एक विशेष प्राचल से संबंधित होता है तथा आंकड़ों के आधार पर प्राचल के संबंध में अनुमान लगाया जाता है। प्राचल सांख्यिकी में जिस प्रकार के आंकड़ों का विश्लेषण किया जाता है वह आंकड़ें न्यादर्श और सामान्य विवरण से संबंधित होते है।

2. अप्राचल सांख्यिकी

अप्राचल सांख्यिकी को वितरण मुक्त सांख्यिकी भी कहा जाता है क्योंकि कुछ आंकड़ें ऐसे भी होते है जहां न तो संयोगिक चयन होता है और न सामान्य वितरण हो। ऐसे आंकड़ों की संख्या कम होने के कारण आकड़ों का स्वरूप रूप बिगड़ा हुआ होता है और इनका एक समग्र के प्राचल से संबंध नहीं होता है। ऐसे आंकडों से संबंधित सांख्यिकी विधियां अप्राचल सांख्यिकी में आती हैं। माध्यिका, सहसंबंध, काई टेस्ट, माध्यिका टेस्ट ये प्रमुख सांख्यिकी विधियां है।

व्यावहारिक सांख्यिकी के मुख्यतः दो प्रकारों में बाट कर सकते है।

- वर्णनात्मक सांख्यिकी
- अनुमानिक सांख्यिकी

1. वर्णनात्मक सांख्यिकी - वर्णनात्मक सांख्यिकी में वे विधियां आती है जिनके प्रयोग से किसी न्यादर्श की विशेषताओं का प्राप्त आंकडों के आधार पर वर्णन किया जाता है। इस प्रकार की सांख्यिकी का प्रयोग सांख्यिकी में प्रदत्तों का संकलन, संगठन, प्रस्तुतीकरण एवं परिकलन से होता हैं इसके अंतर्गत प्रदत्तों का संकलन करके सारणीबद्ध किया जाता है और प्रदत्तों की विशेषता स्पष्ट करने के लिए कुछ सरल सांख्यिकीय मानों की गणना की जाती है- जैसे केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों, विचलन मापकों तथा सहसंबंध आदि का प्रयोग वर्ग की प्रकृति तथा स्थिति आदि जानने के लिए किया जाता है।

2. अनुमानिक सांख्यिकी - अनुमानिक सांख्यिकी विधियां का प्रयोग किसी जनसंख्या से लिये गए न्यादर्श के विशेष में तथ्य एकत्र करके उसके आधार पर जनसंख्या के विषय में निष्कर्ष निकालने के लिए किया जाता है। बहुधा इस सांख्यिकी की सहायता से परिणामों की वैधता जांच की जाती है। बहुधा अनुमान के लिए अपेक्षाकृत उच्च सांख्यिकी विधियों का प्रयोग किया जाता है जैसे सम्भावना नियम, मानक त्रुटि, सार्थकता, परीक्षण आदि। चूंकि समूह विस्तृत होते है तथा इनके सदस्यों की संख्या अधिक होती है अतः अध्ययनकत्र्ता अध्ययन के लिए इन बड़े समूहों से न्यादर्श को चुनकर समस्या का अध्ययन से प्राप्त निष्कर्ष सम्पूर्ण समूह का प्रतिनिधित्व करते है।

सांख्यिकी की विशेषताएं:

1. तथ्यों के किसी समूह अथवा उस पर आधारित निष्कर्ष को सांख्यिकी कहा जाता है। उदाहरण- किसी एक व्यक्ति की महीने की आय सांख्यिकी नहीं है बल्कि बहुत से लोगों की महीने की आय से प्राप्त औसत आय को सांख्यिकी आँकड़ा कहा जाता है।

2. सांख्यिकी उपयोग किसी तथ्य की गुणात्मक महत्व अर्थात अच्छा, बुरा, उचित अथवा अनुचित को व्यक्त नहीं करता है। इसके विपरीत प्रत्येक निष्कर्ष को प्रतिशत, अनुपात, औसत अथवा विचलन के रूप में संख्या के द्वारा व्यक्त किया जाता है। वास्तविक अर्थो में सांख्यिकी संख्यात्मक आँकड़ों का समूह होता है। किसी उद्योग क्षेत्र के प्रबन्धक का वेतन श्रमिकों से ज्यादा होता है, इस तथ्य द्वारा सांख्यिकी प्रकृति प्रदर्शित नहीं होती है, जबकि विभिन्न श्रेणियों के कार्मिकों की औसत मासिक आय की परस्पर तुलना तथ्यों को सांख्यिकी रूप में प्रस्तुत करेगी।

3. सांख्यिकी में आँकड़ों समंको का संकलन एक पूर्व निश्चित उद्देश्य को दृष्टिगत रखकर किया जाता है। सांख्यिकीय समंक यत्र-तत्र अव्यवस्थित नहीं होते लेकिन यह अति व्यवस्थित एवं योजनाबद्ध रूप में होते हैं। किसी पूर्व निर्धारित उद्देश्य की अनुपस्थिति में प्राप्त किये जाने वाले तथ्यों को संख्या कहा जा सकता है लेकिन वह आँकड़ों की श्रेणी में नहीं आते है।। जैसे किसी औद्योगिक क्षेत्र में श्रमिकों की सामाजिक आर्थिक स्थिति का अध्ययन किया जाना है तो पहले में ही उद्देश्य निर्धारित किया जाता है कि तथ्यों का संग्रहीकरण किस लक्ष्य के लिए किया जा रहा है। इस लक्ष्य के लिए कार्य घण्टे, दैनिक मजदूरी , स्वास्थ्य दशाएं, परिवार का आकार, शैक्षणिक स्तर आदि तथ्य एकत्र किये जा सकते है।

4. सांख्यिकी का संबंध उन आँकड़ों से भी होता है जो एक दूसरे के साथ तुलना योग्य होते है। तुलनात्मक अध्ययन के लिए तुलना की श्रेणियों में सजातीय एकरूपता का होना अनिवार्य है। उदाहरण के लिए यदि व्यक्तियों की आय की तुलना वृक्षारोपण के आँकड़ों से की जायेगी तो समरूपता न होने का कारण उन्हें सांख्यिकी मे नहीं रखा जा सकता है। उक्त उदाहरण से स्पष्ट होता हे कि आँकड़ों के

केवल उन समूहों को सांख्यिकी कहा जा सकता है जो परस्पर तुलना योग्य हों।

5. आँकड़ों में पर्याप्त शुद्धता की उपस्थिति सांख्यिकी की एक विशेष आवश्यकता होती है। इसका आशय यह है कि अध्ययन विषय की प्रकृति तथा अनुसंधान का उद्देश्य शुद्ध होना चाहिए। आँकड़ों की शुद्धता का संबंध विषय की प्रकृति एवं विशिष्ट परिस्थिति से होता है। इस परिशुद्धता का निर्धारण संमको की मात्रा अथवा संख्या से किया जाता है जिसके आधार पर एक उपयोगी निष्कर्ष निरूपित किया जा सकता है।

6. सांख्यिकी की इस विशेष के तहत तथ्यों का संकलन योजनापूर्ण तरीके से किया जाता है क्योंकि अव्यवस्थित आँकड़े किसी भी निष्कर्ष को वस्तुनिष्ठतापूर्वक निरूपित नहीं कर सकते हैं।

7. यह मालूम है कि विज्ञान होने के कारण सांख्यिकी से संबंधित आँकड़े अनेक कारणों अथवा कारकों से प्रभावित होते है। सांख्यिकी का संबंध किसी एक पक्ष मात्र के विष्लेशण से ही नहीं बल्कि उन सभी कारकों के आंकलन अथवा विवेचन से भी होता है जो किसी विशेष दशा में परिवर्तन उत्पन्न करते हैं, साथ ही घटनाओं के मध्य परस्पर सह-संबंध को व्यक्त करते हैं।

8. सांख्यिकी मे निहित आँकड़ों का संकलन कई पद्धतियों एवं तकनीक पर आधारित होते है। उद्देश्यपूर्ण विधि से संकलित संगणना व निदर्शन आधारित आँकड़े सांख्यिकी की विशेषता को स्पष्ट करते हैं। सीमित अनुसंधान क्षेत्र में संमको का एकत्रीकरण संगणना विधि तथा विस्तृत अनुसंधान क्षेत्र में आँकड़ों का संकलन निदर्शन अर्थात् संबधित पूर्ण इकाइयों में से कुछ प्रतिनिधि इकाइयों का चयन करके किया जाता है।

9. विशेष रूप से सांख्यिकी एक ऐसा विज्ञान है जो आँकड़ों के आधार पर किसी विषय से संबंधित सामान्य प्रवृत्तियों को स्पष्ट करता है। सांख्यिकी की आधारभूत मान्यता यह है कि कतिपय संख्याओं के आधार पर निरूपित निष्कर्ष दूसरी संख्याओं पर लागू होता है। जैसे- यदि किसी विशेष समाज में कार्यदशाओं, स्वास्थ्य- स्तर, मासिक आय, जन्म दर, मृत्यु दर आदि आँकड़े एकत्रित कर लिये जाये तो उनके आधार पर उसी प्रकार के अन्य समाजों के लिए भी जनसंख्या संबंधी सामानय प्रवृत्तियों को समझा जा सकता है।

वर्गीकृत आंकड़े

अपरिष्कृत आँकड़ों को वर्गीकृत करने का उद्देश्य उन्हें व्यवस्थित करना है, ताकि उन्हें आसानी से आगे के सांख्यिकीय विशलेषण के योग्य बनाया जा सके। समूह या वर्ग बन जाता है।

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

यदि प्रेक्षणों x_1, x_2, ..., x_n की बारंबारताएँ क्रमशः f_1, f_2, ..., f_n हों, तो इसका अर्थ है कि प्रेक्षण x_1, f_1 बार आता है प्रेक्षण x_2, f_2 बार आता है, इत्यादि।

अब, सभी प्रेक्षणों के मानों का योग $= f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n$ है तथा प्रेक्षणों की संख्या $f_1 + f_2 + ...,+ f_n$ है।

अतः, इनका माध्य x निम्नलिखित द्वारा प्राप्त होगा:

$$x = \frac{f^1x^1 + f^2x^2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{f^1 + f^2 + \ldots\ldots\ldots, + f_n}$$

या माध्य $x = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

इसे और अधिक संक्षिप्त रूप में, $x = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

लिखते हैं, यह समझते हुए कि i का मान 1 से n तक विचरण करता है।

हल

अब, माध्य $x = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$$= \frac{1779}{30}$$

वर्ग अंतराल

उदाहरण 1 के अवर्गीकृत आँकड़ों को चौड़ाई, मान लीजिए, 15 के वर्ग अंतराल बनाकर वर्गीकृत आँकड़ों में बदलें। याद रखिए कि वर्ग अंतरालों की बारंबारताएँ निर्दिष्ट करते समय, किसी उपरि वर्ग सीमा में आने वाले प्रेक्षण अगले वर्ग अंतराल में लिए जाते हैं। उदाहरणार्थ, अंक 40 प्राप्त करने वाले 4 विद्यार्थियों को वर्ग अंतराल 25-40 में न लेकर अंतराल 40-55 में लिया जाता है। इस परंपरा को ध्यान में रखते हुए, आइए इनकी एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी बनाएँ:

वर्ग अंतराल	विद्यार्थियों की संख्या
10-25	2
25-40	3
40-55	7
55-70	6
70-85	6
85-100	6

मध्य बिंदु

अब, प्रत्येक वर्ग अंतराल के लिए, हमें एक ऐसे बिदु (मान) की आवश्यकता है, जो पूरे अंतराल का प्रतिनिधित्व करे। यह मान लिया जाता है कि प्रत्येक वर्ग अंतराल की बारंबारता उसके मध्य-बिदु के

चारों ओर केंद्रित होती है। अतः, प्रत्येक वर्ग के मध्य-बिंदु या वर्ग चिह्न को उस वर्ग में आने वाले सभी प्रेक्षणों का प्रतिनिधि माना जा सकता है। याद कीजिए कि हम एक वर्ग अंतराल का मध्य बिदु (या वर्ग चिह्न) उसकी उपरि और निचली सीमाओं का औसत निकालकर ज्ञात करते हैं। अर्थात्

$$\text{वर्ग चिह्न} = \frac{(\text{उपरि वर्ग सीमा} + \text{निचली वर्ग सीमा})}{2}$$

उदाहरण के लिए वर्ग 10 – 25 के लिए वर्ग चिह्न $x_i = \frac{10-25}{2} = 17.5$ है। इसी प्रकार अन्य वर्गों के लिए वर्ग चिह्न प्राप्त कर सकते हैं।

इससे हमें प्रत्येक वर्ग के लिए $f_i x_i$ प्राप्त हो जायेगा।

अतः, दिए हुए आँकड़ों का माध्य x, नीचे दर्शाए अनुसार प्राप्त होता है:

$$X = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30}$$

= 62

नोट: माध्य ज्ञात करने की इस नयी विधि को प्रत्यक्ष विधि कहा जा सकता है।

कल्पित माध्य

कभी-कभी जब x_i और f_i के मान बड़े होते हैं, तो x_i और f_i के गुणनफल ज्ञात करना जटिल हो जाता है तथा इसमें समय भी अधिक लगता है। अतः, ऐसी स्थितियों के लिए, आइए इन परिकलनों को सरल बनाने कल्पित माध्य विधि का सहारा लेते हैं। हम f_i के साथ कुछ नहीं कर सकते, परंतु हम प्रत्येक x_i को एक छोटी संख्या में बदल सकते हैं, जिससे हमारे परिकलन सरल हो जाएँगे।

इसमें पहला चरण यह हो सकता है कि प्राप्त किए गए सभी x_i में से किसी x_i को कल्पित माध्य के रूप में चुन लें तथा इसे "a" से व्यक्त करें। साथ ही, अपने परिकलन कार्य को और अधिक कम करने के लिए, हम "a" को ऐसा x_i ले सकते हैं जो $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ के मध्य में कहीं आता हो। अतः, हम a = 47.5 या a = 62.5 चुन सकते हैं। आइए a = 47.5 चुनें।

अगला चरण है कि a और प्रत्येक x_i के बीच का अंतर d_i ज्ञात किया जाए, अर्थात् प्रत्येक x_i से "a" का विचलन ज्ञात किया जाए।

अर्थात् $d_i = x_i - a$

तीसरा चरण है कि प्रत्येक d_i और उसके संगत f_i का गुणनफल ज्ञात करके सभी $f_i\, d_i$ का योग ज्ञात किया जाए।

विचलनों का माध्य $d = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

या माध्य $d = \Sigma \frac{f_i(x_i - a)}{\Sigma f_i}$

अर्थात् $x = \frac{(a + \Sigma f_i d_i)}{\Sigma f_i}$

नोट: माध्य ज्ञात करने की उपरोक्त विधि कल्पित माध्य विधि कहलाती है।

वर्गीकृत आंकड़ों का बहुलक

बहुलक दिए हुए प्रेक्षणों में वह मान है जो सबसे अधिक बार आता है, अर्थात् उस प्रेक्षण का मान जिसकी बारंबारता अधिकतम है।

उदाहरण:

किसी गेंदबाज़ द्वारा 10 क्रिकेट मैचों में लिए गए विकिटों की संख्याएँ निम्नलिखित हैं:

2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल

आइए उपरोक्त आँकड़ों के लिए, एक बारंबारता बंटन सारणी बनाएँ, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है:

विकेटों की संख्या	क्रिकेट मैचों की संख्या
0	1
1	1
2	3
3	2
4	1
5	1
6	1

स्पष्ट है कि गेंदबाज़ ने अधिकतम मैचों (3) में 2 विकिट लिए हैं। अतः, इन आँकड़ों का बहुलक 2 है।

बहुलक वर्ग

एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन में, बारंबारताओं को देखकर बहुलक ज्ञात करना संभव नहीं है। यहाँ, हम केवल वह वर्ग ज्ञात कर सकते हैं जिसकी बारंबारता अधिकतम है। इस वर्ग को बहुलक वर्ग कहते हैं। बहुलक इस बहुलक वर्ग के अंदर कोई मान है, जिसे निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है:

$$\text{बहुलक} = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(2f_1 - f_0 - f_2)} \times h$$

जहाँ l = बहुलक वर्ग की निम्न (निचली) सीमा

h = वर्ग अंतराल की माप (यह मानते हुए कि सभी अंतराल बराबर मापों के हैं)

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारंबारता तथा

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता है।

उदाहरण:

विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा एक मोहल्ले के 20 परिवारों पर किए गए सर्वेक्षण के परिणामस्वरूप विभिन्न परिवारों के सदस्यों की संख्या से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए:

परिवार माप	परिवारों की संख्या
1-3	7
3-5	8
5-7	2
7-9	2
9-11	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल

यहाँ, अधिकतम वर्ग बारंबारता 8 है तथा इस बारंबारता का संगत वर्ग 3-5 है। अतः, बहुलक वर्ग 3-5 है।

अब, बहुलक वर्ग = 3 – 5, बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 3 तथा वर्ग माप (h) = 2 है।

बहुलक वर्ग की बारंबारता (f_1) = 8

बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता (f_0) = 7 तथा

बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता (f_2) = 2 है।

आइए इन मानों को सूत्र में प्रतिस्थापित करें। हमें प्राप्त होता है:

$$\text{बहुलक} = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(2f_1 - f_0 - f_2)} \times h$$

$$= 3 + \frac{8-7}{2 \times 8 - 7 - 2} \times 2$$

$$= 3 + \frac{1}{7} \times 2$$

$$= \frac{23}{7} = 3.286$$

अतः, उपरोक्त आँकड़ों का बहुलक 3.286 है।

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक

माध्यक (उमकपंद) केंद्रीय प्रवृत्ति का ऐसा मापक है, जो आँकड़ों में सबसे बीच के प्रेक्षण का मान देता है। अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करने के लिए, पहले हम प्रेक्षणों के मानों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। अब, यदि n विषम है, तो माध्यक (n + 1)/2 वें प्रेक्षण का मान होता है। यदि n सम है, तो माध्यक n वें और n/2 + 1 वें प्रेक्षणों के मानों का औसत (माध्य) होता है।

संचयी बारंबारता

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए, यह कल्पना की जाती है कि प्रत्येक वर्ग अंतराल की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु पर केंद्रित होती है। माध्य (x) = , जहाँ x, (वर्ग चिह्न) n वें वर्ग अंतराल का मध्य-बिंदु है तथा f उसकी संगत बारंबारता है।

माध्यक वर्ग

इस अंतराल को ज्ञात करने के लिए, हम सभी वर्गों की संचयी बारंबारताएँ और n/2 ज्ञात करते हैं। अब, हम वह वर्ग खोजते हैं जिसकी संचयी बारंबारता n/2 से अधिक और उसके निकटतम है। इस वर्ग को माध्यक वर्ग कहते हैं।

माध्यक वर्ग ज्ञात करने के बाद, हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके माध्यक ज्ञात करते हैं:

माध्यक = l + (n/2 – cf)/f × h

जहाँ l = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

n = प्रेक्षणों की संख्या

cf = माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता

f = माध्यक वर्ग की बारंबारता

h = वर्ग माप (यह मानते हुए कि वर्ग माप बराबर हैं)

माध्यक का उदाहरण

1. किसी स्कूल की कक्षा ग् की 51 लड़कियों की ऊँचाइयों का एक सर्वेक्षण किया गया और **निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त किए गए:**

ऊंचाई (cm) में लड़कियों की संख्या

- 140 से कम 4
- 145 से कम 11
- 150 से कम 29
- 155 से कम 40
- 160 से कम 46
- 165 से कम 51

माध्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल

माध्यक ऊँचाई ज्ञात करने के लिए, हमें वर्ग अंतराल और उनकी बारंबारताओं की आवश्यकता है। चूँकि दिया हुआ बंटन कम प्रकार का है, इसलिए हमें वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ 140, 145, 150, ..., 165 प्राप्त होती हैं तथा इनके संगत वर्ग अंतराल क्रमशः 140 से कम, 140-145, 145-150, ..., 160-165 हैं। दिए हुए बंटन से, हम देखते हैं कि ऐसी 4 लड़कियाँ हैं जिनकी ऊँचाई 140 से कम है, अर्थात् वर्ग अंतराल 140 से कम की बारंबारता 4 है। अब 145 cm से कम ऊँचाई वाली 11 लड़कियाँ हैं और 140 cm से कम ऊँचाई वाली 4 लड़कियाँ हैं। अतः, अंतराल 140 – 145 में ऊँचाई रखने वाली लड़कियों की संख्या 11 – 4 = 7 होगी। अर्थात् वर्ग अंतराल 140 – 145 की बारंबारता 7 है। इसी प्रकार, 145 – 150 की बारंबारता 29 – 11 = 18 है, 150 – 155 की बारंबारता 40 – 29 = 11 है, इत्यादि। अतः संचयी बारंबारताओं के साथ हमारी बारंबारता बंटन सारणी निम्नलिखित रूप की हो जाती है:

वर्ग अंतराल बारंबारता संचयी बारंबारता

- 140 से कम 4 4
- 140 – 145 7 11
- 145 -150 18 29
- 150 – 155 11 40
- 155 – 160 6 46
- 160 – 165 5 51

अब n = 51 है। अतः, n/2 = 51/2 = 25.5 है। यह प्रेक्षण अंतराल 145 – 150 में आता है। तब, l (निम्न सीमा) = 145, माध्यक वर्ग 145 – 150 के ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता (cf) = 11,

माध्यक वर्ग 145 – 150 की बारंबारता f = 18 तथा वर्ग माप h = 5 है।

सूत्र, माध्यक = l + (n/2 – cf)/f × h का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

माध्यक = 145 + (25.5 – 11)/18 × 5

= 145 + 72.5/18 = 149.03

अतः, लड़कियों की माध्यक ऊँचाई 149.03 cm है।

इसका अर्थ है कि लगभग 50% लड़कियों की ऊँचाइयाँ 149.03 cm से कम या उसके बराबर है तथा शेष 50% की ऊँचाइयाँ 149.03 cm से अधिक है।

2. विधार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण संचेतना अभियान के अन्तर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए | प्रति घर पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए |

पौधों की संख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों ?

हल

$$\text{वर्ग चिन्ह } (xi) = \frac{\text{ऊँच सीमा + निम्न सीमा}}{2}$$

$$fixi = (fi) \times (xi) \Rightarrow 1 \times 1 = 1$$

पौधों की संख्या C-I	घरों की संख्या (fi)	x_i	fixi
0 - 2	1	1	1
2 - 4	2	3	6
4 - 6	1	5	5
6 - 8	5	7	35
8 - 10	6	9	54
10 - 12	2	11	22
12 - 14	3	13	39
Total	$\sum fi = 20$		$\sum fixi = 162$

$$\text{माध्य } (\overline{X}) = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{162}{20} = 8.1$$

किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों मज़दूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए :

दैनिक मज़दूरी (रुपयों में)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मज़दूरी ज्ञात कीजिए |

हल : प्रत्येक अंतराल के लिए वर्ग-चिन्ह को इस सूत्र से ज्ञात करेंगे

वर्ग चिन्ह (xi) = $\frac{\text{ऊँच सीमा} + \text{निम्न सीमा}}{2}$

कल्पित माध्य विधि से

जहाँ कल्पित माध्य a = 150 है |

दैनिकमजदूरी (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या	xi	$di = xi - a$	$fidi$
100 - 120	12	110	110 - 150 = - 40	- 480
120 - 140	14	130	130 - 150 = - 20	- 280
140 - 160	8	a =150	150 - 150 = 0	0
160 - 180	6	170	170 - 150 = 20	120
180 - 200	10	190	190 - 150 = 40	400
कुल (Total)	Σfi = 50			Σfidi = -240

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

Σfidi = – 480 + – 280 + 0 + 120 + 400 = –760 + 520 = –240

Σfi = 50 और a = 150

माध्य $(\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$

$= 150 + \frac{-240}{50}$

$= 150 + \frac{-24}{5}$

= 150 + (- 4.8)

= 145.2

1. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेबखर्च दर्शाता है | माध्य जेबखर्च 18 रू है | लुप्त बारंबारता f ज्ञात कीजिए :

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल :

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	बच्चों की संख्या	x_i	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
11 - 13	7	12	12 - 18 = - 6	- 42
13 - 15	6	14	14 - 18 = - 4	- 24
15 - 17	9	16	16 - 18= - 2	- 18
17 - 19	13	a = 18	18 - 18 = 0	0
19 - 21	f	20	20 - 18 = 2	2f
21 - 23	5	22	22 - 18 = 4	20
23 - 25	4	24	24 - 18 = 6	24
कुल (Total)	$\Sigma f_i = 44 + f$			2f - 40

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

$\Sigma fidi = 2f - 40$, $\Sigma fi = 44 + f$ और $a = 18$,

माध्य जेब खर्च $(\bar{X})$ = ₹ 18

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$$

$$18 = 18 + \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$18 - 18 = \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$2f - 40 = 0$$

$$2f = 40$$

$$f = \frac{40}{2} = 20$$

$$f = 20$$

अत: लुप्त बारंबारता 20 है |

3. किसी अस्पताल में, एक डॉक्टर द्वारा 30 महिलाओं की जाँच की गई और उनके ह्रदय स्पंदन (beat) की प्रति मिनट संख्या नोट करके नीचे दर्शाए अनुसार संक्षिप्त रूप में लिखी गई | एक उपयुक्त विधि चुनते हुए, इन महिलाओं के ह्रदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या ज्ञात कीजिए :

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

हल :

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	महिलाओं की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
65 - 68	2	66.5	– 9	– 18
68 - 71	4	69.5	– 6	– 24
71 - 74	3	72.5	– 3	– 9
74 - 77	8	a = 75.5	0	0
77 - 80	7	78.5	3	21
80 - 83	4	81.5	6	24
83 - 86	2	84.5	9	18
Total	$\Sigma f_i = 30$			12

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

Σfidi = 12, Σfi = 30 और a = 75.5,

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$$

$$= 75.5 + \frac{12}{30}$$

$$= 75.5 + \frac{4}{10}$$

$$= 75.5 + 0.4$$

$$= 75.9$$

अत: महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या = 75.9 है |

4. किसी फुटकर बाज़ार में, फल विक्रेता पेटियों में रखे आम बेच रहें थे | इन पेटियों में आमों की संख्याएँ भिन्न – भिन्न थी | पेटियों की संख्या के अनुसार, आमों का बंटन निम्नलिखित था :

आमों की संख्या	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
पेटियों की संख्या	15	110	135	115	25

एक पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए | आपने माध्य ज्ञात करने की किस विधि का

प्रयोग किया है ?

हल:

दी गयी श्रृखला समावेशी (inclusive) है जहाँ वर्ग-अंतरालों में 1 का अंतर है | अत: दी गयी श्रृंखला को अपवर्जी (exclusive) श्रृंखला में बदलेंगे |

53 – 52 = 1

अत: $\frac{1}{2} = 0.5$ और अब निम्न सीमा में से 0.5 घटाने और उच्च सीमा में 0.5 जोड़ने पर :

आमों की संख्या	पेटियों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}, h = 3$	$f_i d_i$
49.5 - 52.5	15	51	– 6	$\frac{-6}{3} = -2$	– 30
52.5 - 55.5	110	54	– 3	$\frac{-3}{3} = -1$	– 110
55.5 - 58.5	135	a = 57	0	$\frac{0}{3} = 0$	0
58.5 - 61.5	115	60	3	$\frac{3}{3} = 1$	115
61.5 - 64.5	25	63	6	$\frac{6}{3} = 2$	50
Total	400				25

पग-विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

$\Sigma fiui = 25, \Sigma fi = 400, h = 3, a = 57$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

माध्य $(\bar{X}) = a + \left(\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}\right) \times h$

$= 57 + \left(\frac{25}{400}\right) \times 3$

$= 57 + \left(\frac{1}{16}\right) \times 3$

$= 57 + \left(\frac{3}{16}\right)$

= 57 + 0.1875

= 57.1875 या 57.19

आमों की माध्य संख्या = 57.19

5. निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है:

दैनिक व्यय (रुपयों में)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए |

हल :

दैनिक व्यय (रुपयों में)	परिवारों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$, $h = 50$	$f_i d_i$
100 - 150	4	125	– 100	$\frac{-100}{50} = -2$	– 8
150 - 200	5	175	– 50	$\frac{-50}{50} = -1$	– 5
200 - 300	12	a = 225	0	$\frac{0}{50} = 0$	0
300 - 350	2	275	50	$\frac{50}{50} = 1$	2
350 - 400	2	325	100	$\frac{100}{50} = 2$	4
Total	25				– 7

पग-विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

Σfiui = – 7, Σfi = 25, h = 50 , a = 225

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \left(\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}\right) \times h$$

$$= 225 + \left(\frac{-7}{25}\right) \times 50$$

$$= 225 + (-14)$$

$$= 211$$

भोजन पर हुआ माध्य व्यय = ₹ 211

6. वायु में सल्फर डाई – ऑक्साइड (SO) की सान्द्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गये, जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया गया है :

SO_2 की सांद्रता	बारंबारता
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

वायु में SO_2 की सांद्रता का माध्य ज्ञात कीजिए |

हल :

SO_2 की सांद्रता	बारंबारता (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$, $h = 0.04$	$f_i d_i$
0.00 – 0.04	4	0.02	– 0.12	$\frac{-0.12}{0.04} = -3$	– 12
0.04 – 0.08	9	0.06	– 0.08	$\frac{-0.08}{0.04} = -2$	– 18
0.08 – 0.12	9	0.10	– 0.04	$\frac{-0.04}{0.04} = -1$	– 9
0.12 – 0.16	2	a = 0.14	0	0	0
0.16 – 0.20	4	0.18	0.04	$\frac{0.04}{0.04} = 1$	4
0.20 – 0.24	2	0.22	0.08	$\frac{0.08}{0.04} = 2$	4
Total	30				– 31

पग-विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

$\Sigma fiui = -31$, $\Sigma fi = 30$, $h = 0.04$, $a = 0.14$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \left(\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}\right) \times h$$

$$= 0.14 + \left(\frac{-31}{30}\right) \times 0.04$$

$$= 0.14 + (-0.04133)$$

$$= 0.14 - 0.041$$

$$= 0.099$$

वायु में सल्फर डाई-ऑक्साइड (SO) की सान्द्रता का माध्य = 0.099

किसी कक्षा अध्यापिका ने पुरे सत्र के लिए अपनी कक्षा के 40 विधार्थियों कि अनुपस्थिति निम्नलिखित

रूप में रिकॉर्ड (record) की | एक विधार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य ज्ञात कीजिए :

दिनों की संख्या	0-6	6-10	10-14	14-20	20-28	28-38	38-40
विद्यार्थियों की संख्या	11	10	7	4	4	3	1

हल :

दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
0 – 6	11	3	– 14	– 154
6 –10	10	8	– 9	– 90
10 – 14	7	12	– 5	– 35
14 – 20	4	a = 17	0	0
20 – 28	4	24	7	28
28 – 38	3	33	16	48
38 – 40	1	39	22	22
Total	$\Sigma f_i = 40$			– 181

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

$\Sigma f_i d_i = -181$, $\Sigma f_i = 40$ और $a = 17$,

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$$

$$= 17 + \frac{-181}{40}$$

$$= 17 + (-4.525)$$

$$= 12.475$$

$$= 12.48$$

विद्यार्थी की अनुपस्थित का माध्य = 12.48 दिन

निम्नलिखित सारणी 35 नगरों कि साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है | माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए :

साक्षरता दर (% में)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

हल :

साक्षरता दर (%) में	नगरों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$, $h = 10$	$f_i d_i$
45 – 55	3	50	– 20	– 2	– 6
55 – 65	10	60	– 10	– 1	– 10
65 – 75	11	a = 70	– 0	0	0
75 – 85	8	80	10	1	8
85 – 95	3	90	20	2	6
Total	35				– 2

विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

Σfiui = – 2, Σfi = 35, h = 10 , a = 70

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \left(\frac{\sum fiui}{\sum fi}\right) \times h$$

$$= 70 + \left(\frac{-2}{35}\right) \times 10$$

$$= 70 + \left(\frac{-4}{7}\right)$$

$$= 70 + (-0.57)$$

$$= 70 - 0.57$$

$$= 69.43$$

अत: माध्य साक्षरता दर = 69.43 %

1. विधार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण संचेतना अभियान के अन्तर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित

किए | प्रति घर पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए |

पौधों की संख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों ?

हल :

वर्ग चिन्ह (xi) = $\dfrac{\text{ऊँच सीमा + निम्न सीमा}}{2}$

fixi = (fi) × (xi) ⇒ 1 × 1 = 1

पौधों की संख्या C-I	घरों की संख्या (fi)	x_i	$fixi$
0 - 2	1	1	1
2 - 4	2	3	6
4 - 6	1	5	5
6 - 8	5	7	35
8 - 10	6	9	54
10 - 12	2	11	22
12 - 14	3	13	39
Total	$\sum fi = 20$		$\sum fixi = 162$

माध्य $(\bar{X}) = \dfrac{\sum fixi}{\sum fi} = \dfrac{162}{20} = 8.1$

किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों मज़दूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए :

दैनिक मज़दूरी (रुपयों में)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मज़दूरी ज्ञात कीजिए |

हल : प्रत्येक अंतराल के लिए वर्ग-चिन्ह को इस सूत्र से ज्ञात करेंगे

वर्ग चिन्ह (xi) = $\frac{\text{ऊँच सीमा} + \text{निम्न सीमा}}{2}$

कल्पित माध्य विधि से

जहाँ कल्पित माध्य a = 150 है |

दैनिकमजदूरी (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या	xi	$di = xi - a$	$fidi$
100 - 120	12	110	110 - 150 = - 40	- 480
120 - 140	14	130	130 - 150 = - 20	- 280
140 - 160	8	a =150	150 - 150 = 0	0
160 - 180	6	170	170 - 150 = 20	120
180 - 200	10	190	190 - 150 = 40	400
कुल (Total)	Σfi = 50			Σfidi = -240

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

Σfidi = – 480 + – 280 + 0 + 120 + 400 = – 760 + 520 = – 240

Σfi = 50 और a = 150

माध्य $(\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$

$= 150 + \frac{-240}{50}$

$= 150 + \frac{-24}{5}$

$= 150 + (-4.8)$

$= 145.2$

निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेबखर्च दर्शाता है | माध्य जेबखर्च 18 रू है | लुप्त बारंबारता f ज्ञात कीजिए :

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल :

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	बच्चों की संख्या	x_i	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
11 - 13	7	12	12 - 18 = - 6	- 42
13 - 15	6	14	14 - 18 = - 4	- 24
15 - 17	9	16	16 - 18= - 2	- 18
17 - 19	13	a = 18	18 - 18 = 0	0
19 - 21	f	20	20 - 18 = 2	2f
21 - 23	5	22	22 - 18 = 4	20
23 - 25	4	24	24 - 18 = 6	24
कुल (Total)	$\Sigma f_i = 44 + f$			2f - 40

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

$\Sigma fidi = 2f - 40$, $\Sigma fi = 44 + f$ और $a = 18$,

माध्य जेब खर्च $(\bar{X})$ = ₹ 18

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$$

$$18 = 18 + \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$18 - 18 = \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$2f - 40 = 0$$

$$2f = 40$$

$$f = \frac{40}{2} = 20$$

$$f = 20$$

अत: लुप्त बारंबारता 20 है |

किसी अस्पताल में, एक डॉक्टर द्वारा 30 महिलाओं की जाँच की गई और उनके हृदय स्पंदन (beat) की प्रति मिनट संख्या नोट करके नीचे दर्शाए अनुसार संक्षिप्त रूप में लिखी गई | एक उपयुक्त विधि चुनते हुए, इन महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या ज्ञात कीजिए :

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

हल :

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	महिलाओं की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
65 - 68	2	66.5	– 9	– 18
68 - 71	4	69.5	– 6	– 24
71 - 74	3	72.5	– 3	– 9
74 - 77	8	a = 75.5	0	0
77 - 80	7	78.5	3	21
80 - 83	4	81.5	6	24
83 - 86	2	84.5	9	18
Total	$\Sigma f_i = 30$			12

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

Σfidi = 12, Σfi = 30 और a = 75.5,

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$$

$$= 75.5 + \frac{12}{30}$$

$$= 75.5 + \frac{4}{10}$$

$$= 75.5 + 0.4$$

$$= 75.9$$

अत: महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या = 75.9 है |

किसी फुटकर बाज़ार में, फल विक्रेता पेटियों में रखे आम बेच रहें थे | इन पेटियों में आमों की संख्याएँ भिन्न – भिन्न थी | पेटियों की संख्या के अनुसार, आमों का बंटन निम्नलिखित था :

आमों की संख्या	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
पेटियों की संख्या	15	110	135	115	25

एक पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए | आपने माध्य ज्ञात करने की किस विधि का प्रयोग किया है ?

हल:

दी गयी श्रृखला समावेशी (inclusive) है जहाँ वर्ग-अंतरालों में 1 का अंतर है | अत: दी गयी श्रृंखला को अपवर्जी (exclusive) श्रृंखला में बदलेंगे |

53 – 52 = 1

अत: $\frac{1}{2}$ = 0.5 और अब निम्न सीमा में से 0.5 घटाने और उच्च सीमा में 0.5 जोड़ने पर :

आमों की संख्या	पेटियों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$, $h = 3$	$f_i d_i$
49.5 - 52.5	15	51	– 6	$\frac{-6}{3} = -2$	– 30
52.5 - 55.5	110	54	– 3	$\frac{-3}{3} = -1$	– 110
55.5 - 58.5	135	a = 57	0	$\frac{0}{3} = 0$	0
58.5 - 61.5	115	60	3	$\frac{3}{3} = 1$	115
61.5 - 64.5	25	63	6	$\frac{6}{3} = 2$	50
Total	400				25

पग-विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

$\Sigma fiui = 25, \Sigma fi = 400, h = 3, a = 57$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

माध्य $(\bar{X}) = a + \left(\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}\right) \times h$

$= 57 + \left(\frac{25}{400}\right) \times 3$

$= 57 + \left(\frac{1}{16}\right) \times 3$

$= 57 + \left(\frac{3}{16}\right)$

57 + 0.1875

= 57.1875 या 57.19

आमों की माध्य संख्या = 57.19

निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है:

दैनिक व्यय (रुपयों में)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए |

हल :

दैनिक व्यय (रुपयों में)	परिवारों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$, $h = 50$	$f_i d_i$
100 - 150	4	125	– 100	$\frac{-100}{50} = -2$	– 8
150 - 200	5	175	– 50	$\frac{-50}{50} = -1$	– 5
200 - 300	12	a = 225	0	$\frac{0}{50} = 0$	0
300 - 350	2	275	50	$\frac{50}{50} = 1$	2
350 - 400	2	325	100	$\frac{100}{50} = 2$	4
Total	25				– 7

पग-विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

$\Sigma f_i u_i = -7$, $\Sigma f_i = 25$, $h = 50$, $a = 225$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

माध्य $(\bar{X}) = a + \left(\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}\right) \times h$

$= 225 + \left(\frac{-7}{25}\right) \times 50$

$= 225 + (-14)$

$= 211$

भोजन पर हुआ माध्य व्यय = ₹ 211

वायु में सल्फर डाई – ऑक्साइड (SO) की सान्द्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गये, जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया गया है :

SO_2 की सांद्रता	बारंबारता
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

वायु में SO_2 की सांद्रता का माध्य ज्ञात कीजिए |

हल :

SO_2 की सांद्रता	बारंबारता (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$, $h = 0.04$	$f_i d_i$
0.00 – 0.04	4	0.02	– 0.12	$\frac{-0.12}{0.04} = -3$	– 12
0.04 – 0.08	9	0.06	– 0.08	$\frac{-0.08}{0.04} = -2$	– 18
0.08 – 0.12	9	0.10	– 0.04	$\frac{-0.04}{0.04} = -1$	– 9
0.12 – 0.16	2	a = 0.14	0	0	0
0.16 – 0.20	4	0.18	0.04	$\frac{0.04}{0.04} = 1$	4
0.20 – 0.24	2	0.22	0.08	$\frac{0.08}{0.04} = 2$	4
Total	30				– 31

पग-विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

$\Sigma fiui = -31$, $\Sigma fi = 30$, $h = 0.04$, $a = 0.14$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \left(\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}\right) \times h$$

$$= 0.14 + \left(\frac{-31}{30}\right) \times 0.04$$

$$= 0.14 + (-0.04133)$$

$$= 0.14 - 0.041$$

$$= 0.099$$

वायु में सल्फर डाई-ऑक्साइड (SO) की सान्द्रता का माध्य = 0.099

किसी कक्षा अध्यापिका ने पुरे सत्र के लिए अपनी कक्षा के 40 विधार्थियों कि अनुपस्थिति निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड (record) की | एक विधार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य ज्ञात कीजिए :

दिनों की संख्या	0-6	6-10	10-14	14-20	20-28	28-38	38-40
विद्यार्थियों की संख्या	11	10	7	4	4	3	1

हल :

दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
0 – 6	11	3	– 14	– 154
6 –10	10	8	– 9	– 90
10 – 14	7	12	– 5	– 35
14 – 20	4	a = 17	0	0
20 – 28	4	24	7	28
28 – 38	3	33	16	48
38 – 40	1	39	22	22
Total	$\Sigma f_i = 40$			– 181

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

$\Sigma f_i d_i = -181$, $\Sigma f_i = 40$ और $a = 17$,

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$$

$$= 17 + \frac{-181}{40}$$

$$= 17 + (-4.525)$$

$$= 12.475$$

$$= 12.48$$

विद्यार्थी की अनुपस्थित का माध्य = 12.48 दिन

निम्नलिखित सारणी 35 नगरों कि साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है | माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए :

साक्षरता दर (% में)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

हल :

साक्षरता दर (%) में	नगरों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}, h = 10$	$f_i d_i$
45 – 55	3	50	– 20	– 2	– 6
55 – 65	10	60	– 10	– 1	– 10
65 – 75	11	a = 70	– 0	0	0
75 – 85	8	80	10	1	8
85 – 95	3	90	20	2	6
Total	35				– 2

पग-विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

Σfiui = – 2, Σfi = 35, h = 10 , a = 70

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \left(\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}\right) \times h$$

$$= 70 + \left(\frac{-2}{35}\right) \times 10$$

$$= 70 + \left(\frac{-4}{7}\right)$$

$$= 70 + (-0.57)$$

$$= 70 - 0.57$$

$$= 69.43$$

अत: माध्य साक्षरता दर = 69.43 %

निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली कि मासिक खपत दर्शाता है | इन आँकड़ों के Ex माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए | इनकी तुलना कीजिए |

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65 – 85	4
85 – 105	5
105 – 125	13
125 – 145	20
145 – 165	14
165 – 185	8
185 – 205	4

हल :

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या	x_i	संचयी बारंबारता (c.f)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$, h = 20	f_iu_i
65 – 85	4	75	4	– 60	– 3	– 12
85 – 105	5	95	4 + 5 = 9	– 40	– 2	– 10
105 – 125	13 = f_0	115	9 + 13 = 22	– 20	– 1	– 13
125 – 145	20 = f_1	135=a	22 + 20 = 42	0	0	0
145 – 165	14 = f_2	155	42 + 14 = 56	20	1	14
165 – 185	8	175	56 + 8 = 64	40	2	16
185 – 205	4	195	64 + 4 = 68	60	3	12
total	N=68					7

माध्यक (Median) के लिए :

$$N = 68 \text{ और } \frac{N}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

34 संचयी बारंबारता के 42 में शामिल है |

इसलिए, माध्यक वर्ग 125 – 145 है |

अत: l = 125, f = 20, cf = 22 (माध्यक वर्ग से ठीक ऊपर वाला संचयी बारंबारता) और

h = 20,

माध्यक (Median) = $l + \left(\dfrac{\frac{N}{2} - c.f}{f}\right) \times h$

$= 125 + \left(\dfrac{34 - 22}{20}\right) \times 20$

$= 125 + 12$

$= 137$

माध्य के लिए :

$a = 135$, $\Sigma f_i u_i = 7$, $\Sigma f_i = 68$, $h = 20$

माध्य / Mean $(\bar{X}) = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$= 135 + \left(\dfrac{7}{68}\right) \times 20$

$= 135 + \dfrac{140}{68}$

$= 135 + 2.058$

$= 137.058$

बहुलक के लिए :

सारणी से हमें ज्ञात होता है कि वर्ग 125 – 145 की बारंबारता सबसे अधिक है इसलिए बहुलक वर्ग 125 – 145 है

अत: l = 125, f0 = 13, f1 = 20, f2 = 14 और h = 20

बहुलक (Mode) = $l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$= 125 + \left(\frac{20-13}{2 \times 20 - 13 - 14}\right) \times 20$

$= 125 + \left(\frac{7}{40 - 27}\right) \times 20$

$= 125 + \frac{140}{13}$

$= 125 + 10.76$

$= 135.76$

माध्यक = 137, माध्य = 137.058 और बहुलक = 135.76

यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए :

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
योग	60

हल :

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0 - 10	5	5
10 - 20	x	5 + x
20 - 30	20	25 + x
30 - 40	15	40 + x
40 - 50	y	40 + x + y
50 - 60	5	45 + x + y
योग	60	45 + x + y = 60

दिया है, माध्यक = 28.5,

अत: 28.5 वर्ग-अन्तराल 20 – 30 में शामिल है |

इसलिए, l = 20, f = 20, h = 10 और cf = 5 + x

N = 60,

अत: $\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$

माध्यक (Median) = $l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c.f}{f}\right) \times h$

$28.5 = 20 + \left(\frac{30 - (5+x)}{20}\right) \times 10$

$28.5 = 20 + \left(\frac{30 - 5 - x}{20}\right) \times 10$

$28.5 - 20 = \left(\frac{25 - x}{2}\right)$

$8.5 = \left(\frac{25 - x}{2}\right)$

$17 = 25 - x$

$x = 25 - 17$

$x = 8$ ...... (1)

अब, $45 + x + y = 60$

अथवा $x + y = 60 - 45$

$x + y = 15$

$8 + y = 15$ समी० (1) से

$y = 15 - 8$

$y = 7$

$x = 8$, और $y = 7$

निम्नलिखित बंटन किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों कि दैनिक आय दर्शाता है :

दैनिक आय (रुपयों में)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

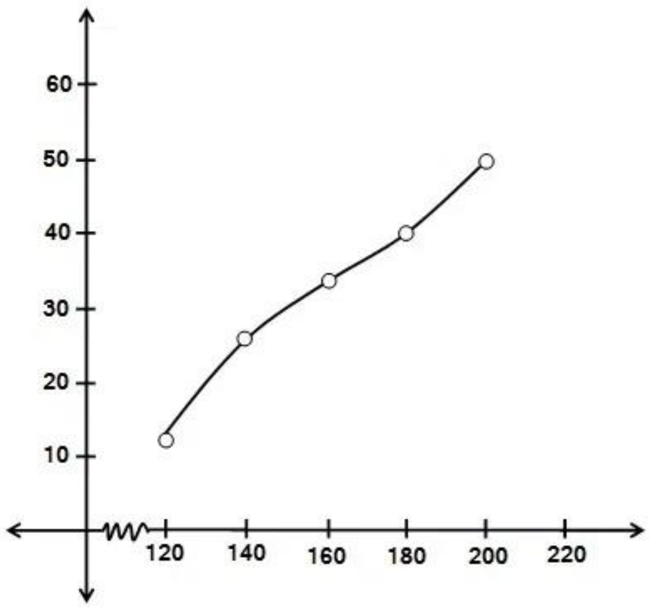
उपरोक्त बंटन को एक कम प्रकार ' के संचयी बारंबारता बंटन में बदलिए और उसका तोरण खींचिए |

हल : 'से कम प्रकार' का संचयी बारंबारता बंटन सारणी :

दैनिक आय	श्रमिकों की संख्या	संचयी बारंबारता
120 से कम	12	12
140 से कम	14	26
160 से कम	8	34
180 से कम	6	40
200 से कम	10	50

से कम प्रकार' के तोरण के लिए क्रमित युग्म (order pairs) :

(120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) और (200, 50)



NCERT SOLUTIONS
प्रश्नावली 14.1 (पृष्ठ संख्या 296-298)

प्रश्न 1 विधार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण संचेतना अभियान के अन्तर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए। प्रति घर पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

पौधों की संख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14

घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों?

उत्तर-

$$\text{fixi} = (\text{fi}) \times (\text{xi})$$

$$\Rightarrow 1 \times 1 = 1$$

पौधों की संख्या C-I	घरों की संख्या (fi)	Xi	fixi
0-2	1	1	1
2-4	2	3	6
4-6	1	5	5
6-8	5	7	35
8-10	6	9	54
10-12	2	11	22
12-14	3	13	39
Total	∑fi = 20		∑fixi = 162

माध्य $\bar{X} = \frac{\text{fixi}}{\sum \text{fi}} = \frac{162}{20} = 8.1$

प्रश्न 2 किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों मज़दूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए:

दैनिक मज़दूरी (रुपयों में)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मज़दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रत्येक अंतराल के लिए वर्ग-चिन्ह को इस सूत्र से ज्ञात करेंगे

कल्पित माध्य विधि से

जहाँ कल्पित माध्य a = 150 है।

दैनिक मज़दूरी (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या	xi	di = xi - a	fidi
100-120	12	110	110 - 150 = -40	-480
120-140	14	130	130 - 150 = -20	-280
140-160	8	a = 150	150 - 150 = 0	0
160-180	6	170	170 - 150 = 20	120

180-200	10	190	190 - 150 = 40	400
कुल (Total)	∑fi = 50			∑fidi = −240

कल्पित माध्य विधि से

$$\sum \text{fidi} = -480 + (-280) + 0 + 120 + 400 = -760 + 520 = -240$$

$\sum \text{fi} = 50$ और $\text{a} = 150$

माध्य $\bar{X} = a + \frac{\sum \text{fixi}}{\sum \text{fi}}$

$$= 150 + \frac{-240}{50}$$

$$= 150 + \frac{-24}{5}$$

$$= 150 + (-4.8)$$

$$= 145.2$$

प्रश्न 3 निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेबखर्च दर्शाता है। माध्य जेबखर्च 18 रू है। लुप्त बारंबारता f ज्ञात कीजिए:

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

उत्तर-

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	बच्चों की संख्या	xi	di = xi - a	fidi
11-13	7	12	12 - 18 = -6	-42
13-15	6	14	14 - 18 = -2	-24
15-17	9	16	16 - 18 = -2	-18
17-19	13	a = 18	18 - 18 = 0	0
19-21	f	20	20 - 18 = 2	2f
21-23	5	22	22 - 18 = 4	20
23-25	4	24	24 - 18 = 6	24
कुल (Total)	∑fi = 44 + f			2f - 40

कल्पित माध्य विधि से,

$\sum fidi = 2f - 40, \sum fi = 44 + f$ और $a = 18,$

माध्य जेब खर्च $\bar{X} = ₹18$

माध्य $\bar{X} = a + \frac{\sum fixi}{\sum fi}$

$18 = 18 + \frac{2f-40}{44+f}$

$18 - 18 = \frac{2f-40}{44+f}$

$\frac{0}{1} = \frac{2f-40}{44+f}$

$2f - 40 = 0$

$2f = 40$

$f = \frac{40}{2} = 20$

$f = 20$

अतः लुप्त बारंबारता 20 है।

प्रश्न 4 किसी अस्पताल में, एक डॉक्टर द्वारा 30 महिलाओं की जाँच की गई और उनके हृदय स्पंदन)beat) की प्रति मिनट संख्या नोट करके नीचे दर्शाए अनुसार संक्षिप्त रूप में लिखी गई। एक उपयुक्त विधि चुनते हुए, इन महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या ज्ञात कीजिए:

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

उत्तर-

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	**महिलाओं की संख्या**	**xi**	**di = xi - a**	**fidi**
65-68	2	66.5	-9	-18
68-71	4	69.5	-6	-24
71-74	3	72.5	-3	-9
74-77	8	a = 75.5	0	0

77-80	7	78.5	3	21
80-83	4	81.5	6	24
83-86	2	84.5	9	18
Total	$\sum$fi = 30			12

कल्पित माध्य विधि से

$\Sigma fidi = 12, \Sigma fi = 30$ और $a = 75.5,$

माध्य $\bar{X} = a + \frac{\sum fixi}{\sum fi}$

$= 75.5 + \frac{12}{30}$

$= 75.5 + \frac{4}{10}$

$= 75.5 + 0.4$

$= 75.9$

अत: महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या = 75.9 है।

प्रश्न 5 किसी फुटकर बाज़ार में, फल विक्रेता पेटियों में रखे आम बेच रहें थे। इन पेटियों में आमों की संख्याएँ भिन्न-भिन्न थी। पेटियों की संख्या के अनुसार, आमों का बंटन निम्नलिखित था:

आमों की संख्या	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
पेटियों की संख्या	15	110	135	115	25

एक पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए। आपने माध्य ज्ञात करने की किस विधि का प्रयोग किया है?

उत्तर- दी गयी श्रृखला समावेशी है जहाँ वर्ग-अंतरालों में 1 का अंतर है। अत :दी गयी श्रृंखला को अपवर्जी श्रृंखला में बदलेंगे।

53 - 52 = 1

अत: $\frac{1}{2}$ = 0.5 और अब निम्न सीमा में से 0.5 घटाने और उच्च सीमा में 0.5 जोड़ने पर:

आमों की संख्या	पेटियों की संख्या (fi)	xi	di = xi - a	$u_1 = \frac{di}{h}, h = 3$	fidi
49.5-52.5	15	51	-6	$\frac{-6}{3} = -1$	-30
52.5-55.5	110	54	-3	$\frac{-3}{3} = -1$	-110
55.5-58.5	135	a = 57	0	$\frac{0}{3} = 0$	0
58.5-61.5	115	60	3	$\frac{3}{3} = 1$	115
61.5-64.5	25	63	6	$\frac{6}{3} = 2$	50
Total	400				25

पग-विचलन विधि से माध्य:

$$\sum \text{fiui} = 25, \sum \text{fi} = 400, \text{h} = 3, \text{a} = 57$$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों को रखने पर,

माध्य $\bar{X} = a + \left(\frac{\sum \text{fiui}}{\sum \text{fi}}\right) \times h$

$$= 57 + \left(\frac{25}{400}\right) \times 3$$

$$= 57 + \left(\frac{1}{16}\right) \times 3$$

$$= 57 + \left(\frac{3}{16}\right)$$

$$= 57 + 0.1875$$

$$= 57.1875 \text{ या } 57.19$$

आमों की माध्य संख्या 57.19

प्रश्न 6 निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है:

दैनिक व्यय (रुपये में)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दैनिक व्यय (रुपयों में)	**परिवारों की संख्या** (fi)	**(x_i)**	**$d_i = x_i - 225$**	$u_i = \frac{d_i}{50}$	**f_iu_i**
100 - 150	4	125	-100	-2	-8
150 - 200	5	175	-50	-1	-5
200 - 250	155	a = 225	0	0	0
250 - 300	2	275	50	1	2
300 - 350	2	325	100	2	4
	Σfi = 25				Σfiui = −7

पग-विचलन विधि से माध्य:

$$\Sigma \text{fiui} =-7, \Sigma \text{fi} = 25, \text{h} = 50, \text{a} = 225$$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों को रखने पर,

$$\text{माध्य } \bar{\text{X}} = \text{a} + \left(\frac{\sum \text{fiui}}{\sum \text{fi}}\right) \times \text{h}$$

$$= 225 + \left(\frac{-7}{25}\right) \times 50$$

$$= 225 + (-14)$$

$$= 211$$

भोजन पर हुआ माध्य व्यय $= ₹211$

प्रश्न 7 वायु में सल्फर डाई-ऑक्साइड (SO) की सान्द्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गये, जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया गया है:

SO_2 की सांद्रता	बारंबारता
0.00-0.04	4
0.04-0.08	9
0.08-0.12	9
0.12-0.16	2
0.16-0.20	4
0.20-0.24	2

वायु में SO_2 की सांद्रता का माध्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

SO_2 की सांद्रता	बारंबारता (fi)	xi	di = xi - a	$ui = \frac{di}{h} . h = 0.04$	fidi
0.00-0.04	4	0.02	-0.12	$\frac{-0.12}{0.04} = -3$	-12
0.04-0.08	9	0.06	-0.08	$\frac{-0.08}{0.04} = -2$	-18
0.08-0.12	9	0.10	-0.04	$\frac{-0.04}{0.04} = -1$	-9
0.12-0.16	2	a = 0.14	0	0	0
0.16-0.20	4	0.18	0.04	$\frac{0.04}{0.04} = 1$	4
0.20-0.24	2	0.22	0.08	$\frac{0.08}{0.04} = 2$	4
Total	30				-31

पग-विचलन विधि से माध्य:

$$\Sigma fiui = -31, \Sigma fi = 30, h = 0.04, a = 0.14$$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों को रखने पर,

माध्य $\bar{X} = a + \left(\frac{\sum fiui}{\sum fi}\right) \times h$

$$= 0.14 + \left(\frac{-31}{30}\right) \times 0.04$$

$$= 0.14 + (-0.04133)$$

$$= 0.14 - 0.041$$

$$= 0.099$$

वायु में सल्फर डाई-ऑक्साइड (SO) की सान्द्रता का माध्य $= 0.099$

प्रश्न 8 किसी कक्षा अध्यापिका ने पुरे सत्र के लिए अपनी कक्षा के 40 विधार्थियों कि अनुपस्थिति निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड की। एक विधार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य ज्ञात कीजिए:

दिनों की संख्या	0-6	6-10	10-14	14-20	20-28	28-38	38-40
विधार्थियों की संख्या	11	10	7	4	4	3	1

उत्तर-

दिनों की संख्या	विधार्थियों की संख्या (fi)	xi	di = xi - a	fidi
0-6	11	3	-14	-154
6-10	10	8	-9	-90
10-14	7	12	-5	-35
14-20	4	a = 17	0	0
20-28	4	24	7	28
28-38	3	33	16	48
38-40	1	39	22	22
Total	∑fi = 40			-181

कल्पित माध्य विधि से,

$$\sum \mathrm{fidi} = -181, \sum \mathrm{fi} = 40 \text{ और } \mathrm{a} = 17,$$

$$\text{माध्य } \bar{\mathrm{X}} = \mathrm{a} + \frac{\sum \mathrm{fixi}}{\sum \mathrm{fi}}$$

$$= 17 + \frac{-181}{40}$$

$$= 17 + (-4.525)$$

$$= 12.475$$

$$= 12.48$$

विधार्थियों की अनुपस्थित का माध्य $= 12.48$ दिन

प्रश्न 9 निम्नलिखित सारणी 35 नगरों कि साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए:

साक्षरता दर (% में)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

उत्तर-

साक्षरता दर (% में)	नगरों की संख्या (fi)	xi	di = xi - a	ui = $\frac{di}{h}$, h =10	fidi
45-55	3	50	-20	-2	-6
55-65	10	60	-10	-1	-10
65-75	11	a = 70	-0	0	0
75-85	8	80	10	1	8
85-95	3	90	20	2	6
Total	35				-2

पग-विचलन विधि से माध्य:

$$\Sigma \text{fiui} =-2, \Sigma \text{fi} = 35, \text{h} = 10, \text{a} = 70$$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों को रखने पर,

माध्य $\bar{X} = a + \left(\frac{\sum \text{fiui}}{\sum \text{fi}}\right) \times h$

$$= 70 + \left(\frac{-2}{35}\right) \times 10$$

$$= 70 + \left(\frac{-4}{7}\right)$$

$$= 70 + (-0.57)$$

$$= 7 - 0.57$$

$$69.43$$

अत: माध्य साक्षरता दर $= 69.43\%$

प्रश्नावली 14.2 (पृष्ठ संख्या 302-303)

प्रश्न 1 निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाते है:

आयु (वर्षों में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65

रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपरोक्त आंकड़ो के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों केंद्रीय प्रवृत्ति की मापों की तुलना कीजिए और उनकी व्याख्या कीजिए।

उत्तर- कल्पित माध्य विधि और बहुलक के लिए सारणी:

आयु (वर्षों में)	रोगियों की संख्या (fi)	वर्ग-चिन्ह xi	di = xi - a	fidi
5-15	6	10	-20	-120
15-25	11	20	-10	-110
25-35	$21 = f_0$	a = 30	0	0
l = 35-45	$23 = f_1$	40	10	230
45-55	$14 = f_2$	50	20	280
55-65	5	60	30	150
Total	$\sum fi = 80$			$\sum fixi = 430$

बहुलक के लिए सारणी से:

$$\text{बहुलक वर्ग} = 35 - 45$$

$$\therefore l = 35$$

$$\text{बहुलक वर्ग की बारंबारता } (f_1) = 23,$$

$$(f_0) = 21, (f_2) = 14,$$

$$\text{वर्ग-आकार } (h) = 10$$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$35 + \left(\frac{23 - 21}{2(23) - 21 - 24}\right) \times 10$$

$$= 35 + \left(\frac{2}{46 - 35}\right) \times 10$$

$$= 35 + \frac{20}{11}$$

$$= 35 + 1.81$$

$$= 36.8$$

कल्पित माध्य विधि से माध्य

$$\sum f_1 x_1 = 430, \sum f_1 = 80, a = 30$$

$$\text{माध्य} = a + \frac{\sum \text{fidi}}{\sum \text{fi}}$$

$$= 30 + \frac{430}{80}$$

$$= 30 + 5.375$$

$$= 35.375$$

$$= 35.38$$

प्रश्न 2 निम्नलिखित आँकड़े, 225 बिजली के उपकरणों के प्रेक्षित जीवन कल (घंटो में) कि सुचना देते है:

जीवनकाल (घंटो में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
बारंबारता	10	35	52	61	38	29

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

जीवनकाल (घंटो में)	**बारंबारता (fi)**
0-20	10
20-40	35
40-60	52
60-80	61
80-100	38
100-120	29

वर्ग 60-80 की सबसे अधिक बारंबारता 61 है, अतः बहुलक वर्ग 60-80 है।

इसलिए, $l = 60$, $f_1 = 61$, $f_0 = 52$, $f_2 = 38$ और $h = 20$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 60 + \left(\frac{61-52}{2(61)-52-38}\right) \times 20$$

$$= 60 + \left(\frac{9}{122-90}\right) \times 20$$

$$= 60 + \left(\frac{9 \times 20}{32}\right)$$

$$= 60 + \left(\frac{9 \times 5}{8}\right)$$

$$= \left(\frac{45}{8}\right)$$

$$= 60 + 5.625$$

$$= 65.625$$

अतः उपकरणों का बहुलक जीवनकाल 65.63 है।

प्रश्न 3 निम्नलिखित आँकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलू व्यय के बंटन को दर्शाते है। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिए। साथ ही माध्य मासिक व्यय भी ज्ञात कीजिए।

व्यय (रुपयों में)	**परिवारों की संख्या**
1000-1500	24
1500-2000	40
2000-2500	33
2500-3000	28
3000-3500	30
3500-4000	22
4000-4500	16
4500-5000	7
Total (कुल)	200

उत्तर-

व्यय (रुपयों में)	परवारो की संख्या	xi	xi - a	ui = $\frac{i}{h}$, h = 500	fiui
1000-1500	24 = f_0	1250	-1500	-3	-72
l = 1500-2000	40 = f_1	1750	-1000	-2	-80
2000-2500	33 = f_2	2250	-500	-1	-33
2500-3000	28	2750 = a	0	0	0
3000-3500	30	3250	500	1	30
3500-4000	22	3750	1000	2	44
4000-4500	16	4250	1500	3	48
4500-5000	7	4750	2000	4	28
Total (कुल)	200				-35

बहुलक के लिए:

वर्ग 1500-2000 की बारंबारता सबसे आधिक 40 बार है अतः l = 1500

$$f_1 = 40$$

$$f_0 = 24$$

$$f_2 = 33$$

$$h = 500$$

$$\text{बहुलक } l = \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 1500 + \left(\frac{40-24}{2(40)-24-33}\right) \times 500$$

$$= 1500 + \left(\frac{16}{80-57}\right) \times 500$$

$$= 1500 + \left(\frac{8000}{23}\right)$$

$= 1847.826$

$= 1847.83$

अतः परिवारों का बहुलक मासिक व्यय 1847.83 माध्य के लिए पग-विचलन विधि से:

माध्य $\bar{X} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$= 2750 + \frac{-35}{200} \times 500$

$= 2750 + \frac{-17500}{200}$

$= 2750 + \frac{-175}{2}$

$= 2750 + (-87.5)$

$= 2662.5$

अतः मासिक मध्य खर्च $=$ ₹2662.5

प्रश्न 4 निम्नलिखित बंटन भारत के उच्चतर माध्यमिक स्कूलों में, राज्यों के अनुसार, शिक्षक-विद्यार्थी अनुपात को दर्शाता है। इन आँकड़ो के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों मापकों की व्याख्या कीजिए।

प्रति शिक्षक विद्यार्थियों की संख्या	राज्य/ संघीय क्षेत्रों की संख्या
15-20	3
20-25	8
25-30	9
30-35	10
35-40	3
40-45	0
45-50	0
50-55	2

उत्तर-

प्रति शिक्षक विद्यार्थियों की संख्या	राज्य/ संघीय क्षेत्रों की संख्या (f_i)	xi	$d_i = x_i - a$	ui = $\frac{x_i - a}{h}$, h = 5	$f_i u_i$
15-20	3	17.5	-15	-3	-9

20-25	8	22.5	-10	-2	-16
25-30	9 = f_0	27.5	-5	-1	-9
l = 30-35	10 = f_1	a = 32.5	0	0	0
35-40	3 = f_2	37.5	5	1	3
40-45	0	42.5	10	2	0
45-50	0	47.5	15	3	0
50-55	2	52.5	20	4	8
Total	35				-23

उपरोक्त सारणी के अनुसार

$$l = 30, f_0 = 9, f_1 = 10, f_2 = 3h = 5,$$

बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f - 0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 30 + \left(\frac{10-9}{2(10)-9-3}\right) \times 5$$

$$= 30 + \left(\frac{1}{20-12}\right) \times 5$$

$$= 30 + \left(\frac{5}{8}\right)$$

$$= 30 + 0.625$$

$$= 30.625$$

बहुलक $= 30.6$

माध्य के लिए: $a = 32.5, Sf_iu_i = -23, Sf_i = 35, h = 5$

माध्य $\bar{X} = a + \left(\frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$$= 32.5 + \left(\frac{-23}{35}\right) \times 5$$

$$= 32.5 + \left(\frac{-23}{7}\right)$$

$$= 32.5 + (-3.28)$$

$$= 32.5 - 3.28$$

$$= 29.22$$

अतः आँकड़ो का माध्य $= 29.22$ और बहुलक $= 30.6$

प्रश्न 5 दिया हुआ बंटन विश्व के कुछ श्रेष्टतम बल्लेबाजों द्वारा एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैचों बनाये गए रनों को दर्शाते है:

बनाए गए रन	बल्लेबाजों की संख्या
3000-4000	4
4000-5000	18
5000-6000	9
6000-7000	7
7000-8000	6
8000-9000	3
9000-10,000	1
10,000-11,000	1

इन आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

बनाए गए रन	बल्लेबाजों की संख्या
3000-4000	$4 = f_0$
l = 4000-5000	$18 = f_1$
5000-6000	$9 = f_2$
6000-7000	7
7000-8000	6
8000-9000	3
9000-10,000	1
10,000-11.000	1

वर्ग 4000-5000 की आवृति सबसे अधिक बात हुई है इसलिए,

बहुलक वर्ग 4000-5000 है और

$l = 4000$, $f_1 = 18$, $f_0 = 4$, $f_2 = 9$ और $h = 1000$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 4000 + \left(\frac{18-4}{2(18)-4-9}\right) \times 1000$$

$$= 4000 + \left(\frac{14}{36-13}\right) \times 1000$$

$$= 4000 + \left(\frac{14000}{23}\right)$$

$$= 4000 + 608.695$$

$$= 4608.695$$

अतः दिए, गए आँकड़ो का बहुलक $= 4608.695$ रन।

प्रश्न 6 एक विद्यार्थी ने एक सड़क के किसी स्थान से होकर जाती हुए कर की संख्या नोट कि और उन्हें निचे दी हुई सारणी के रूप में व्यक्त किया। सारणी में दिया प्रत्येक प्रेक्षण 3 मिनट के अंतराल में उस स्थान से होकर जाने वाले कारों कि संख्याओं से संबंधित है। ऐसे 100 अंतरालों पर प्रक्षेण लिए गए। इन आँकड़ो का बहुलक ज्ञात कीजिए।

कारों की संख्या	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
बारम्बारता	7	14	13	12	20	11	15	8

उत्तर-

वर्ग 40-50 की आवृति सबसे अधिक 20 हुई है इसलिए,

बहुलक वर्ग 40-50 है और

$l = 40$, $f_1 = 20$, $f_0 = 12$, $f_2 = 11$ और $h = 10$

$$\text{बहुलक} = l = \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{20-12}{2(20)-12-11}\right) \times 10$$

$$= 40 + \left(\frac{8}{40-23}\right) \times 10$$

$$= 40 + \left(\frac{80}{17}\right)$$

$$= 40 + 4.7$$

$$= 44.7$$

अतः दिए गए आँकड़ो का बहुलक $= 44.7$ करें।

प्रश्नावली 14.3 (पृष्ठ संख्या 314-316)

प्रश्न 1 निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली कि मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के Ex माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65-85	4
85-105	5
105-125	13
125-145	20
145-165	14
165-185	8
185-205	4

उत्तर-

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या	x_i	संचयी बारंबारता (C.F)	$d_i = x_i - 1$	$u_i = \frac{d_i}{h}, h = 20$	f_iu_i
65-85	4	75	4	-60	-3	-12
85-105	5	95	4 + 5 = 9	-40	-2	-10
105-125	$13 = f_0$	115	9 + 13 = 22	-20	-1	-13
125-145	$20 = f_1$	135 = a	22 + 20 = 42	0	0	0
145-165	$14 = f_2$	155	42 + 14 = 56	20	1	14
165-185	8	175	56 + 8 = 64	40	2	16
185-205	4	195	64 + 4 = 68	60	3	12
Total	N = 68					7

माध्यक के लिए:

$$N = 68 \text{ और } \frac{N}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

34 संचयी बारंबारता के 42 में शामिल है।

इसलिए, माध्यक वर्ग 125 – 145 है।

अत: l = 125, f = 20, cf = 22 (माध्यक वर्ग से ठीक ऊपर वाला संचयी बारंबारता) और

h = 20,

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F.}{f}\right) \times h$$

$$= 125\left(\frac{34 - 22}{20}\right) \times 20$$

$$= 125 + 12$$

$$= 137$$

माध्य के लिए:

$$a = 135, \sum f_i u_i = 7, \sum f_i = 68, h = 20$$

माध्य $\bar{X} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$$= 135 + \left(\frac{7}{68}\right) \times 20$$

$$= 135 + \frac{140}{68}$$

$$= 135 + 2.058$$

$$= 137.058$$

बहुलक के लिए:

सारणी से हमें ज्ञात होता है कि वर्ग 125 - 145 की बारंबारता सबसे अधिक है इसलिए बहुलक वर्ग 125 - 145 है

अत: $l = 125$, $f_0 = 13$, $f_1 = 20$, $f_2 = 14$ और $h = 20$

बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 125 + \left(\frac{20-13}{2\times20-13-14}\right) \times 20$$

$$= 125 + \left(\frac{7}{40-27}\right) \times 20$$

$$= 125 + \frac{140}{13}$$

$$= 125 + 10.76$$

$$= 135.76$$

माध्यक = 137, माध्य = 137.058 और बहुलक = 135.76

प्रश्न 2 यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए:

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0-10	5
10-20	x

20-30	20
30-40	15
40-50	y
60-50	5
योग	60

उत्तर-

वर्ग-अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0-10	5	5
10-20	x	x + 5
20-30	20	25 + x
30-40	15	40 + x
40-50	y	40 + x + y
50-60	5	45 + x + y = 60

दिया है, माध्यक = 28.5,

अत :28.5 वर्ग-अन्तराल 20 – 30 में शामिल है

इसलिए, l = 20, f = 20, h = 10 और cf = 5 + x

N = 60,

$$\text{अतः } \frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F.}{f}\right) \times h$$

$$28.5 = 20 + \left(\frac{30-(5+x)}{20}\right) \times 10$$

$$28.5 = 20 + \left(\frac{30-5-x}{20}\right) \times 10$$

$$28.5 - 20 = \left(\frac{25-x}{2}\right)$$

$$8.5 = \left(\frac{25-x}{2}\right)$$

$17 = 25 - x$

$x = 25 - 17$

$x = 8 \ldots (i)$

अब, $45 + x + y = 60$

अथवा $x + y = 60 - 45$

$x + y = 15$

$8 + y = 15$ समी० (1) से

$y = 15 - 8$

$y = 7$

$x = 8$, और $y = 7$

प्रश्न 3 एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों कि आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्यक्तियों को दी जाती है, जिनकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, 60 वर्ष से कम हो,

आयु (वर्षो में)	पॉलिसी धारको की संख्या
20 से कम	2
25 से कम	6
30 से कम	24
35 से कम	45
40 से कम	78
45 से कम	89
50 से कम	92
55 से कम	98
60 से कम	100

उत्तर-

आयु (वर्षो में)	पॉलिसी धारकों की संख्या	संचयी आवृति
20 से कम	2	2
25 से कम	6	6
30 से कम	24	24

35 से कम	45	45
40 से कम	78	78
45 से कम	89	89
50 से कम	92	92
55 से कम	98	98
60 से कम	100	100

यहाँ n = 100,

$$\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

अवलोकन कक्षा 35 - 40 में निहित है

निचली सीमा (I) = 35

cf - अंतराल को आगे बढ़ाने वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति 35 - 40 = 45 है

माध्यिका वर्ग की आवृत्ति (f) 35 - 40 = 33

वर्ग आकार (h) = 5

$$\text{माध्य} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - C.F}{f}\right) \times h$$

$$= 35 + \left(\frac{50-45}{33}\right) \times 5$$

$$= 35 + \frac{5}{33} \times 5$$

$$= 35.76$$

$\therefore$ औसत आयु 35.76 वर्ष है।

प्रश्न 4 एक पौधे कि 40 पत्तियों कि लंबाइयाँ निकटतम मिलीमीटरों में मापी जाती है तथा प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में निरुपित किया जाता है:

लम्बाई(मिमी में)	पतियों की संख्या
118-126	3
127-135	5

136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2

पत्तियों की माध्यक लंबाई ज्ञात कीजिए।

संकेत :माध्यक ज्ञात करने के लिए, आँकड़ों को सतत वर्ग अंतरालों में बदलना पड़ेगा, क्योंकि सूत्र में वर्ग अंतरालों को सतत मन गया है। तब ये वर्ग 117.5 - 126.5 - 135.5,... 171.5 - 180.5 में बदल जाते हैं।

उत्तर-

लम्बाई (मिमी में)	लम्बाई (मिमी में) निरंतर कक्षा	पत्तियों की संख्या
118-126	117.5 - 126.5	3
127-135	126.5 - 135.5	5
136-144	135.5 - 144.5	9
145-153	144.5 - 153.5	12
154-162	153.5 - 162.5	5
163-171	162.5 - 171.5	4
172-180	171.5 - 180.5	2
	$\sum f = 40$	

अब,

$$n = 40, \frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - C.F}{f}\right) \times h$$

$$= 144.5 + \left(\frac{20-17}{12}\right) \times 9$$

$= 144.5 + \left(\frac{3}{12}\right) \times 9$

$= 144.5 + \frac{27}{12}$

$= 144.5 + 2.25$

$= 146.75$ मिमी

$\therefore$ पत्तियों की औसत लम्बाई $= 146.75$ मिमी।

प्रश्न 5 निम्नलिखित सारणी 400 नियाँन लैंपों के जीवनकालों को प्रदर्शित करती है:

जीवन कल (घंटो में)	**लैंपों की संख्या**
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	74
4000-4500	62
4500-5000	48

एक लैंप का माध्यक जीवन काल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

जीवनकाल (घंटो में)	**दीपक की संख्या**	**संचयी आवृति**
1500-2000	14	14
2000-2500	56	14 + 56 = 70
2500-3000	60	70 + 60 = 130
3000-3500	86	130 + 86 = 216
3500-4000	74	216 + 74 = 290
4000-4500	62	290 + 62 = 352
4500-5000	48	352 + 48 = 400
	$\sum f = 400$	

अब,

$$n = \sum f_i = 400$$

$$\frac{n}{2} = \frac{400}{2} = 200$$

इस प्रकार अवलोकन कक्षा 3000-3500 में निहित है,

$$\text{माध्य} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{C.F.}}{f}\right) \times h$$

जहां वर्ग की कम सीमा = 3000

f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति = 86

cf = संचयी आवृत्ति माध्यिका वर्ग = 130

h - वर्ग आकार = 500

$$\text{माध्य} = 3000 + \left(\frac{200 - 130}{86}\right) \times 500$$

$$= 3000 + \frac{70}{86} \times 500$$

$$= 3000 + 406.98$$

$$= 3406.98$$

इस प्रकार एक दीपक का औसत जीवनकाल 3406.98 घंटे है।

प्रश्न 6 एक स्थानीय टेलीफ़ोन निर्देशिका से 100 कुल नाम लिए और उनमें प्रयुक्त अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त हुआ:

अक्षरों कि संख्या	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
कुल नामों की संख्या	6	30	40	16	4	4

कुल नामों में माध्यक अक्षरों कि संख्या ज्ञात कीजिए। कुल नामों में माध्य अक्षरों कि संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुल नामों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

अक्षरों की संख्या	उपनामों की संख्या	संचयी आवृति
1-4	6	6

4-7	30	6 + 30 = 36
7-10	40	36 + 40 = 76
10-13	16	16 + 76 = 92
13-16	4	4 + 92 = 96
16-19	4	4 + 96 = 100
	100	

अब,

$$n = 100, \frac{n}{2} = 50$$

यहाँ अवलोकन कक्षा 7 - 10 में है

f - माध्यिका वर्ग की आवृत्ति (1 - 10) = 40

cf - (कक्षा की कार्यवाही का संचयी फुट समीकरण) (7 - 1 0) = 36

$$\text{माध्य} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - C.F.}{f}\right) \times h$$

$$= 7 + \left(\frac{50-36}{40}\right) \times 3$$

$$= 7 + \left(\frac{14}{40}\right) \times 3$$

$$= 7 + 1.05$$

$$= 8.05$$

$$\therefore \text{माध्य} = 8.05$$

$$\text{उपनामों में अक्षरों की संख्या} = 8.05$$

चलिए कदम विचलन विधि का उपयोग करते हुए माध्य की गणना करते हैं:

अक्षरों की संख्या	उपनामों की संख्या f_i	कक्षा का आकर (x_i)	$u_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 11.5}{3}$	$f_i u_i$
1-4	6	2.5	-3	-18
4-7	30	5.5	-2	-60

7-10	40	8.5	-1	-40
10-13	16	11.5	0	0
13-16	4	14.5	1	4
16-19	4	17.5	2	8
				$\sum f_iu_i = -106$

इस उपनाम में अक्षरों की संख्या = 8.32 माध्य

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$= 11.5 + \left(\frac{-106}{100}\right) \times 3$$

$$= 11.5 - 3.18$$

$$= 8.32$$

अब हमें उपनामों के सामान्य आकार का पता लगाना होगा

अक्षरों की संख्या	उपनामों की संख्या f
1-4	6
4-7	30
7-10	40
10-13	16
13-16	4
16-19	4

यहाँ अधिकतम आवृत्ति 40 है। इस आवृत्ति के अनुरूप वर्ग 7 - 10 है।

l = मॉडल वर्ग की निचली सीमा = 7

मोडल वर्ग की आवृत्ति) f_1) = 40

मोडल वर्ग = 30 को आगे बढ़ाने वाले वर्ग की आवृत्ति) f_0)

आवृत्ति) f_2) वर्ग की सफल कक्षा मोडल = 16

वर्ग का आकार) h) = 3

$$\text{माध्य} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 7 + \left(\frac{40 - 30}{2(40) - 30 - 16}\right) \times 3$$

$$= 7 + \left(\frac{10}{80 - 30 - 16}\right) \times 3$$

$$= 7 + \left(\frac{10}{34}\right) \times 3 = 7 + 0.88$$

$$= 7.88$$

$\therefore$ उपनामों का मॉडल $= 7.88$

प्रश्न 7 नीचे दिया हुआ बंटन एक कक्षा के 30 विधार्थियों के भार दर्शा रहा है। विधार्थियों का माध्यक भार ज्ञात कीजिए:

भार (किलोग्राम में)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
विधयर्थियो की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

उत्तर-

वजन (किलोग्राम में)	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी आवृति
40-45	2	2
45-50	3	2 + 3 = 5
50-55	8	5 + 8 = 13
55-60	6	13 + 6 = 19
60-65	6	19 + 6 = 25
65-70	3	25 + 3 = 28
70-75	2	2 + 28 = 30

अब,

$$n = 30, = \frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

यहाँ अवलोकन कक्षा 55-60 में निहित है

निचली सीमा (I) = 55

f (माध्यिका वर्ग की आवृत्ति) = 6

cf (कक्षा की संचयी आवृत्ति मंझला वर्ग = 13 को आगे बढ़ाती है

$$\text{माध्य} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - C.F.}{f}\right) \times h$$

$$= 55 + \left(\frac{15 - 13}{6}\right) \times 5$$

$$= 55 + \left(\frac{5}{3}\right) \times 5$$

$$= 55 + 1.67$$

$$= 56.67 \text{ किलोग्राम}$$

प्रश्नावली 14.4 (पृष्ठ संख्या 320-321)

प्रश्न 1 निम्नलिखित बंटन किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों कि दैनिक आय दर्शाता है:

दैनिक आय (रुपयों में)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
श्रमिक की संख्या	12	14	8	6	10

'उपरोक्त बंटन को एक कम प्रकार' के संचयी बारंबारता बंटन में बदलिए और उसका तोरण खींचिए।

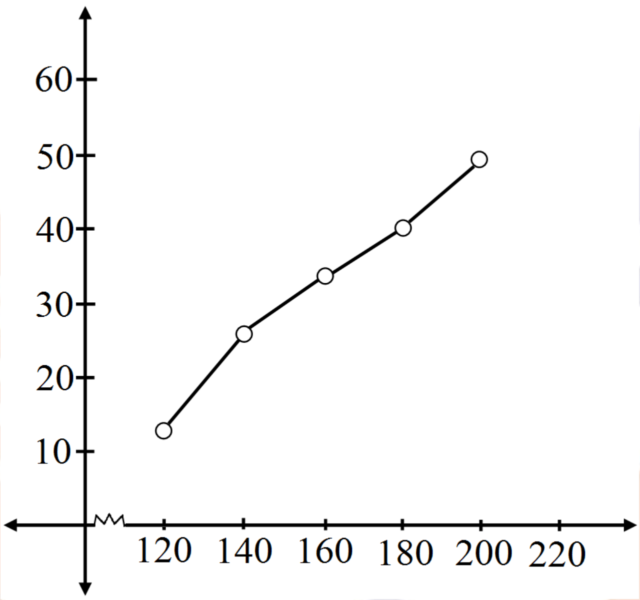
उत्तर- से कम प्रकार’ का संचयी बारंबारता बंटन सारणी:

दैनिक आय	श्रमिकों की संख्या	संचयी बारंबारता
120	12	12
140	14	26
160	8	34
180	6	40

800	10	50

'से कम प्रकार' के तोरण के लिए क्रमित युग्म) order pairs):

(120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) और) 200, 50)



प्रश्न 2 किसी कक्षा के 35 विधार्थियों कि मेडिकल जाँच के समय, उनके भार निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड किए गए:

भार (किलोग्राम में)	विद्यार्थियों की संख्या
38 से कम	0
40 से कम	3
42 से कम	5
44 से कम	9
46 से कम	14
48 से कम	28
50 से कम	32
52 से कम	35

उपरोक्त आँकड़ों के 'लिए कम प्रकार का तोरण' खींचिए। इसके बाद माध्यक भार ज्ञात कीजिए।

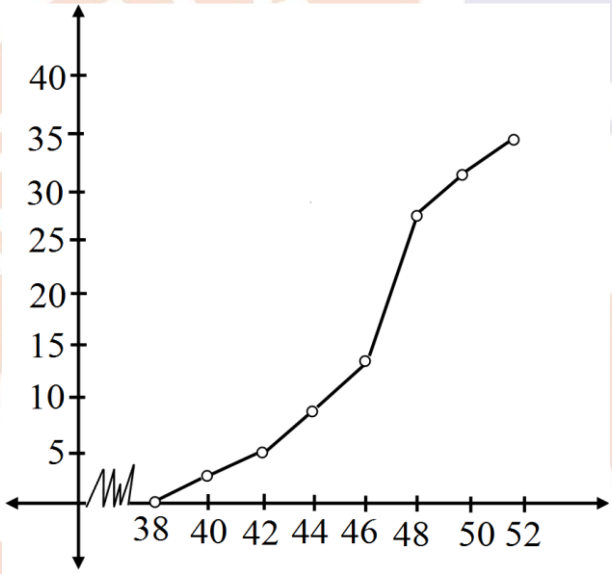
उत्तर- 'से कम प्रकार के' तोरण के लिए संचयी बारंबारता सारणी

भार (किलोग्राम में)	विद्यार्थियों की संख्या
38 से कम	0
40 से कम	3
42 से कम	5
44 से कम	9

46 से कम	14
48 से कम	28
50 से कम	32
52 से कम	35

से कम प्रकार' के तोरण के लिए के लिए क्रमित युग्म) Order pairs):

(38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32), (52, 35)



प्रश्न 3 निम्नलिखित सारणी किसी गाँव के 100 फार्मों में हुआ प्रति हेक्टेयर (ha) गेंहूँ का उत्पादन दर्शाते हैं:

उत्पादन (किलोग्राम/ हेक्टेयर)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
फार्मों की संख्या	2	8	12	24	38	16

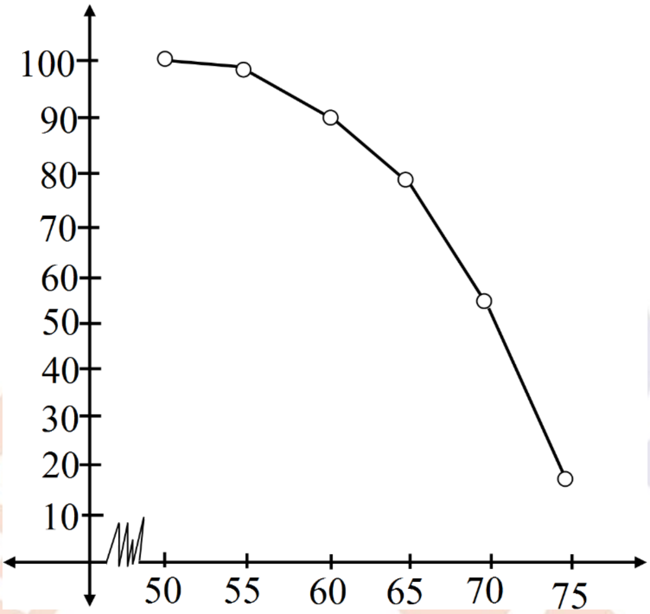
इस बंटन को 'अधिक के प्रकार के' बंटन में बदलिए और फिर उसका तोरण खींचिए।

उत्तर- 'से अधिक प्रकार के' तोरण के लिए संचयी बारंबारता सारणी:

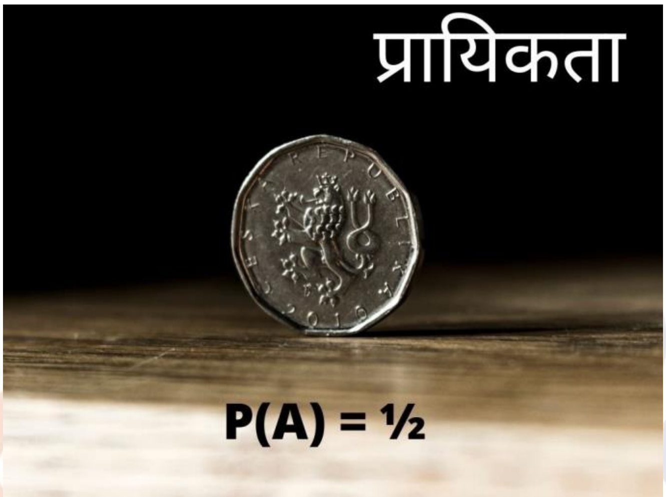
भार (किलोग्राम में)	**संचयी बारंबारता**
50	2 + 8 + 12 + 24 + 38 + 16 = 100
55	8 + 12 + 24 + 38 + 16 = 98
60	12 + 24 + 38 + 16 = 90
65	24 + 38 + 16 = 78
70	38 + 16 = 54
75	+ 16 = 16

'से अधिक प्रकार' के तोरण के लिए के लिए क्रमित युग्म) Order pairs):

(50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54), (75, 16)



प्रायिकता



किसी घटना के घटने या न घटने की सम्भाब्यता को उसकी प्रायिकता कहलाती है। उदाहरण के लिए यदि कोई सिक्का उछाला जाय तो या तो हेड आएगा या टेल आएगा। इस प्रकार 2 सम्भावना मे 1 हेड या 1 टेल आएगा। दोनों की ही प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होगी।

$$\text{प्रायिकता } P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटित हुई है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

परिभाषा

किसी भी घटना के घटित होने की संभावना को प्रायिकता के रूप में जाना जाता है। जब कोई घटना घटित होती है, तो अनुकूल परिणामों की संभावनाएँ प्रायिकता का मान होती हैं। उदाहरण के लिए, यदि हम एक सिक्के को उछालते हैं तो चित और पट आने की संभावना बराबर होती है। सिक्का उछालना एक प्रयोग है और चित या पट के आने की संभावना क्रमशः चित या पट के आने की प्रायिकता है। एक चित और एक पट प्राप्त करना इस प्रयोग की घटनाएँ हैं।

प्रायिकता का सूत्र (Formula of the Probability)

किसी भी घटना की प्रायिकता का सूत्र इस प्रकार दिया जाता है:

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित परिणामों की कुल संख्या}}$$

किसी घटना A के लिए, उपरोक्त सूत्र को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

घटना A की प्रायिकता, P (A) = घटना A के अनुकूल परिणामों की संख्या / घटना A के परिणामों की कुल संख्या

नोट – उपरोक्त सूत्र केवल सैद्धान्तिक प्रायिकता ज्ञात करने में सहायक है जिसे पारंपरिक प्रायिकता भी कहते हैं।

व्याख्या

प्रायिकता में, प्रत्येक प्रयोग के परिणामों को आदर्श स्थिति में समान माना जाता है। लेकिन व्यावहारिक रूप से हर प्रयोग के परिणाम समान नहीं होते हैं। यदि हम एक सिक्के को समतल सतह पर उछालते हैं तो परिणाम एक चित या एक पट होगा लेकिन यदि हम एक सिक्के को रेत पर उछालते हैं तो परिणाम समान नहीं होंगे क्योंकि सिक्का इसके किनारे के अनुदिश गिर सकता है। इस स्थिति में, तीन परिणाम होंगे लेकिन हम उन पर विचार नहीं करते हैं और आदर्श स्थिति के लिए केवल दो समान परिणामों (चित या पट) पर विचार करते हैं।

इसे स्पष्ट रूप से समझने के लिए हम एक और उदाहरण लेते हैं। एक बॉक्स है और बॉक्स में 5 पेंसिल और 2 पेन हैं और हमें एक पेंसिल या एक पेन निकालने की प्रायिकता ज्ञात करनी है। चूँकि बॉक्स में 5 पेंसिल और 2 पेन हैं इसलिए पेंसिल मिलने की संभावना पेन मिलने से ज्यादा है। इसका मतलब है कि इस प्रयोग के परिणाम समान नहीं हैं।

यह देखते हुए कि सभी प्रयोगों के परिणाम हमेशा समान नहीं होते हैं, इस कक्षा में, हम मान लेंगे कि सभी प्रयोगों के समान परिणाम हैं।

उदाहरण – एक सिक्के को एक बार उछालने पर चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल – इस उदाहरण में, एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है, इसलिए दो संभावित परिणाम होंगे चित या पट। मान लीजिए A चित आने की घटना है।

एक सिक्के को एक बार उछालने पर चित आने का परिणाम 1 होता है। इसका अर्थ है कि घटना A के अनुकूल परिणाम 1 है और कुल संभावित परिणाम 2 हैं।

इसलिए,

घटना A की प्रायिकता, P(A) = अनुकूल परिणामों की संख्या / संभावित परिणामों की कुल संख्या

$P(A) = \frac{1}{2}$

उत्तर

नोट -1) उपरोक्त उदाहरण में, एक पट प्राप्त करने की संभावना भी $\frac{1}{2}$ होगी क्योंकि पट प्राप्त करने का अनुकूल परिणाम भी 1 है। माना B पट प्राप्त करने की घटना है। तब

$P(A) = \frac{1}{2}$ और $P(B) = \frac{1}{2}$

अब दोनों प्रायिकताओं को जोड़ने पर, $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

उपरोक्त व्यंजक से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी प्रयोग की सभी घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 होता है।

2) उपरोक्त उदाहरण में, हमने एक चित आने की प्रायिकता ज्ञात की है लेकिन हम यह भी कह सकते हैं कि हमने पट न मिलने की प्रायिकता ज्ञात की है। दोनों प्रायिकताएँ समान हैं। A एक चित आने की

घटना है और माना A एक पट न आने की घटना है।

इसलिए, दो समान घटनाएँ P(A) और P(A`) हैं। दोनों घटनाओं को जोड़ने पर,

$P(A) + P(A`) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

जहाँ, P(A) = चित आने की प्रायिकता

P(A`) = पट न आने की प्रायिकता

सामान्य तौर पर, एक घटना E के लिए, हम लिख सकते हैं, P(E) + P(E`) = 1

जहाँ, P(E) = घटना E की प्रायिकता

P(E`) = घटना E की नहीं प्रायिकता

हम यह भी लिख सकते हैं, P(E) = 1 – P(E`) या P(E`) = 1 – P(E)

3) घटना E`, घटना E की पूरक है इसलिए घटना E और घटना E` को पूरक घटना (Complementary Event) कहा जाता है।

प्रायिकता से संबंधित पद (Terms Related to the Probability)

प्रयोग (Experiment) – प्रायिकता ज्ञात करने के लिए कार्य करना एक प्रयोग (Experiment) है। जैसे- एक सिक्का उछालना, पासा फेंकना, डिब्बे में से कोई वस्तु निकालना प्रयोग हैं।



घटना (Event) – किसी प्रयोग के परिणाम को घटना (Event) कहते हैं। उदाहरण के लिए – पासे को फेंकने के बाद कोई संख्या प्राप्त करना एक घटना है।

असंभव घटना (Impossible Event) – यदि किसी घटना की प्रायिकता 0 है तो वह असंभव घटना (Impossible Event) कहलाती है। इस प्रकार की घटना का घटित होना असंभव है।

उदाहरण – एक लकड़ी के बक्से में, 3 नीली गेंदें और 2 लाल गेंदें हैं। एक काली गेंद आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल – मान लीजिए कि एक काली गेंद प्राप्त होने की घटना A है, लेकिन जैसा कि हम देख सकते हैं कि लकड़ी के बक्से में केवल 3 नीली गेंदें और 2 लाल गेंदें हैं। इसमें कोई काली गेंद नहीं है।

अतः अनुकूल परिणामों की संख्या 0 होगी और संभावित परिणामों की कुल संख्या 3 + 2 = 5 है।

इसलिए,

एक काली गेंद मिलने की प्रायिकता, P(A) = अनुकूल परिणामों की संख्या / कुल संभावित परिणाम

$P(A) = 0/5$

$P(A) = 0$

यह एक असंभव घटना का उदाहरण है।

निश्चित घटना (Certain Event)– यदि किसी घटना की प्रायिकता 1 है तो वह घटना निश्चित घटना (Certain Event) कहलाती है। निश्चित घटना को Sure event भी कहा जाता है।

उदाहरण – एक पासे को एक बार फेंकने पर 0 से बड़ी और 7 से छोटी संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल – हम जानते हैं कि एक पासे के फलक पर अंकित अंक 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। हमें 0 से बड़ी और 7 से छोटी संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करनी है और पासे के फलक पर प्रत्येक अंक 0 से बड़ा और 7 से छोटा है। इसलिए, पासे के फलक पर प्रत्येक संख्या अनुकूल परिणाम है और 6 संख्याएँ हैं इसलिए 6 अनुकूल परिणाम होंगे।

मान लीजिए B, 0 से बड़ी और 7 से छोटी संख्या प्राप्त करने की घटना है और कुल परिणाम भी 6 हैं।

इसलिए, प्रायिकता $P(B) = 6/6 = 1$

यह एक निश्चित घटना का उदाहरण है।

नोट -1) उपरोक्त उदाहरणों से हम समझ सकते हैं कि प्रायिकता का न्यूनतम मान 0 हो सकता है और प्रायिकता का अधिकतम मान 1 हो सकता है। इसका अर्थ है कि किसी घटना E के लिए प्रायिकता का मान 0 और 1 के बीच होता है या हम लिख सकते हैं $0 \le P(E) \le 1$

2) क्योंकि प्रायिकता का मान 0 और 1 के बीच होता है इसलिए प्रायिकता के सूत्र में अंश (किसी घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या) हमेशा हर (संभावित परिणामों की कुल संख्या) से कम या उसके बराबर होता है।

सैद्धांतिक प्रायिकता

किसी घटना E की सैद्धांतिक प्रायिकता जिसे परंपरागत प्रायिकता भी कहा जाता है।ह P(E) निम्नलिखित रूप में परिभाषित की जाती है।

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की सख्ंया}}{\text{प्रयोग के सभी संभव परिणामों की सख्ंया}}$$

हल सहित उदाहरण

एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। साथ ही, एक पट प्राप्त करने की भी प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

एक सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग में, संभव परिणामों की संख्या 2 है: चित (H) और पट (T)। मान लीजिए घटना E 'चित प्राप्त करना' है। तब, E के अनुकूल (अर्थात् चित प्राप्त करने के अनुकूल) परिणाम 1 है। अतः,

P(E) = P (चित) = E के अनुकूल परिणामों की सख्ंया/ सभी संभव परिणामों की सख्ंया $= \frac{1}{2}$

इसी प्रकार, यदि घटना F पट प्राप्त करना है, तो P(F) = P (चित) $= \frac{1}{2}$

प्रारंभिक घटना

किसी प्रयोग की वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो प्रारंभिक घटना कहलाती है। उदाहरण 1 में दोनों घटनाएँ E और F प्रारंभिक घटनाएँ हैं।

ऊपर दिए गए उदाहरण में हम देखते हैं कि P(E) + P(F) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

नोट:

किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 है। यह व्यापक रूप में भी सत्य है।

अभ्यास के लिए प्रश्न

मान लीजिए हम एक पासे को एक बार फेंकते हैं।

(i) 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

(ii) 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

हल

(i) यहाँ मान लीजिए कि '4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना' घटना E है। सभी संभव परिणाम छः हैं, ये 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। स्पष्टतः, घटना E के अनुकूल परिणाम 5 और 6 हैं। अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या 2 है। इसलिए

P(E) = P (4 से बड़ी संख्या) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) मान लीजिए '4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त करना' घटना F है। सभी संभव परिणाम = 6 हैं।

घटना F के अनुकूल परिणाम 1, 2, 3 और 4 हैं।

अतः F के अनुकूल परिणामों की संख्या 4 है।

इसलिए $P(F) = \frac{4}{6}$

$$= \frac{2}{3}$$

क्या उपरोक्त उदाहरण में दी हुई घटना E और F प्रारंभिक घटनाएँ हैं? नहीं, ये प्रारंभिक घटनाएँ नहीं हैं, क्योंकि घटना E के 2 परिणाम हैं तथा घटना F के 4 परिणाम हैं।

स्मरणीय तथ्य

प्रायोगिक प्रायिकता (वास्तविक प्रयोगों के परिणामों पर आधारित थीं।) और सैद्धांतिक प्रायिकता (जिसे पारंपरिक प्रायिकता भी कहते हैं) में अंतर।

घटना E की सैद्धांतिक (या परंपरागत) प्रायिकता P(E) को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जाता है: $P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की सख्ंया}}{\text{सभी संभव परिणामों की सख्ंया}}$

जहाँ हम कल्पना करते हैं कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रायिक हैं।

पूरक घटना

घटना 'E नहीं' को निरूपित करने वाली घटना $\bar{E}$ घटना E की पूरक घटना कहलाती है। हम यह भी कहते हैं कि E और $\bar{E}$ परस्पर पूरक घटनाएँ हैं।

व्यापक रूप में, किसी घटना E के लिए यह सत्य है कि $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

असंभव घटना

उस घटना, जिसका घटित होना असंभव है, की प्रायिकता 0 होती है। ऐसी घटना को एक असंभव घटना कहते हैं।

हल सहित उदाहरण

(i) पासे को एक बार फेंकने पर संख्या 8 प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

(ii) पासे को एक बार फेंकने पर 7 से छोटी संख्या प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

हल:

(i) हम जानते हैं कि पासे को एक बार फेंकने पर केवल छः ही संभावित परिणाम हैं। ये परिणाम 1, 2,

3, 4, 5 और 6 हैं। चूँकि पासे के किसी भी फलक पर 8 अंकित नहीं है, इसलिए 8 के अनुकूल कोई भी परिणाम नहीं है, अर्थात् ऐसे परिणामों की संख्या शून्य (0) है। दूसरे शब्दों में, पासे को एक बार फेंकने पर, संख्या 8 प्राप्त करना असंभव है। अतः P(8 प्राप्त करना) $= \frac{0}{6} = 0$

अर्थात् उस घटना, जिसका घटित होना असंभव है, की प्रायिकता 0 होती है। ऐसी घटना को एक असंभव घटना कहते हैं।

(ii) चूँकि पासे के प्रत्येक फलक पर ऐसी संख्या लिखी है जो 7 से छोटी है, इसलिए पासे को एक बार फेंकने पर यह निश्चित है कि प्राप्त संख्या सदैव 7 से छोटी होगी। अतः, घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या सभी संभावित परिणामों की संख्या के बराबर होगी, जो 6 है।

इसलिए, P(E) = P(7 से छोटी संख्या प्राप्त करना) $= \frac{6}{6} = 1$

निश्चित घटना

अतः उस घटना, जिसका घटित होना निश्चित है, की प्रायिकता 1 होती है। ऐसी घटना को एक निश्चित या निर्धारित घटना कहते हैं।

टिप्पणी:

प्रायिकता P(E) की परिभाषा से, हम देखते हैं कि अंश (घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या) सदैव हर (सभी संभव परिणामों की संख्या) से छोटा होता है या उसके बराबर होता है। अतः,

$0 \le P(E) \le 1$

अभ्यास के लिए प्रश्न

अच्छी प्रकार से फेटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ता:

(i) एक इक्का होगा।

(ii) एक इक्का नहीं होगा।

हल

गड्डी को अच्छी प्रकार से फेटनें से परिणामों का समप्रायिक होना सुनिश्चित हो जाता है।

(i) एक गड्डी में 4 इक्के होते हैं। मान लीजिए घटना E 'एक इक्का होना' है।

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52 (क्यों?)

अतः $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) मान लीजिए घटना F 'एक इक्का नहीं' है।

माना F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 52 – 4 = 48 (क्यों?)

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52

अतः $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

टिप्पणी:

ध्यान दीजिए कि F और कुछ नहीं बल्कि $\bar{E}$ ही है। अतः, हम P(F) को इस प्रकार भी परिकलित कर सकते हैं:

$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

स्मरणीय तथ्य

- एक निश्चित (या निर्धारित) घटना की प्रायिकता 1 होती है।
- एक असंभव घटना की प्रायिकता 0 होती है।
- घटना E की प्रायिकता एक ऐसी संख्या P(E) है कि $0 \le P(E) \le 1$
- वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो एक प्रारंभिक घटना कहलाती है। किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकता का योग 1 होता है।
- किसी भी घटना E के लिए $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ होता है, जहाँ $\bar{E}$ घटना 'E नहीं' को व्यक्त करता है। E और $\bar{E}$ पूरक घटनाएँ कहलाती हैं।

उदाहरण:

1. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं | इस थैले में से एक गेंद यदृच्छया निकाली जाती है| इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद

(i) लाल हो

(ii) लाल नहीं हो ?

हल: थैले में गेंदों की कुल संख्या = 3 + 5 = 8

थैले में से एक गेंद निकालने की घटना के सभी संभव परिणामों की संख्या = 8

(*i*) चूंकि लाल गेंदों की संख्या = 3

⇒ अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$$\therefore P_{(\text{लाल गेंद निकालना})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{8}$$

$$\text{अत: } P_{(\text{लाल गेंद निकालना})} = \frac{3}{8}$$

(*ii*) चूंकि काली गेंदों की संख्या = 5

⇒ लाल गेंद नहीं वाले परिणामों की संख्या = 5

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$$\therefore P_{(\text{लाल गेंद नहीं निकालना})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{8}$$

2. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं | इस डिब्बे में से एक कंचा

(i) लाल है ?

(ii) सफेद है ?

(iii) हरा नहीं है ?

हल: डिब्बे में कंचों की संख्या = 5 लाल कंचे + 8 सफेद कंचे + 4 हरे कंचे = 17 कंचे।

डिब्बे में से एक कंचा निकालने की घटना के सम्भव परिणामों की संख्या = 17

(i) लाल गेंदों की संख्या = 5

डिब्बे में से निकाली गई गेंद का लाल होने की घटना के परिणामों की संख्या = 5

अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$$\therefore P_{(\text{लाल गेंद})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{17}$$

(ii) सफेद गेंदों की संख्या = 8

डिब्बे में से सफेद गेंद निकाली जाने की घटना के परिणामों की संख्या = 8

अनुकूल परिणामों की संख्या = 8

$$\therefore P_{(\text{सफेद गेंद})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{8}{17}$$

(iii) $\because$ डिब्बे में हरी गेंदों की संख्या = 4

$\therefore$ डिब्बे में 'हरी गेंद नहीं' की संख्या = 17 – 4 = 13

$\therefore$ डिब्बे में से निकाली गई गेंद का 'हरा नहीं' होने की घटना के परिणामों की संख्या = 13

अर्थात् अनुकूल परिणामों की संख्या = 13

$$\therefore P_{(\text{हरा गेंद नहीं निकालना})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{13}{17}$$

3. एक पिग्गी बैंक (piggy bank) में, 50 पैसे के सौ सिक्के है, 1 रू के पचास सिक्के हैं, 2 रू के बीस सिक्के गिरने के परिणाम समप्रायिक हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का

(i) 50 पैसे का होगा ?

(ii) 5 रू का नहीं होगा ?

हलः पिग्गी-बैंक में कुल सिक्कों की संख्या = 50 पैसे के सिक्के + 1 के सिक्के + 2र के सिक्के + 5 के सिक्के

= 100 + 50 + 20 + 10 = 180

पिग्गी बैंक से सिक्का निकलने की घटना के परिणामों की संख्या = 180

(i) 50 पै. के सिक्कों की संख्या = 100

पिग्गी बैंक से 50 पैसे का सिक्का गिरने की घटना की संख्या = 100

$$\Rightarrow \quad P_{(50 \text{ पैसे का सिक्का होना})} = \frac{\cancel{100}^{5}}{\cancel{180}_{9}} = \frac{5}{9}$$

(*ii*) $\because$ 5 ₹ के सिक्कों की संख्या = 10

$\therefore$ 5 ₹ के अतिरिक्त सिक्कों की संख्या = 180 – 10
= 170

$\therefore$ पिग्गी बैंक से गिरने वाले सिक्कों का '5 ₹ का सिक्का नहीं' होने की घटना के परिणामों की संख्या = 170

$$\Rightarrow \quad P_{(5 \text{ ₹ का सिक्का नहीं})} = \frac{\cancel{170}^{17}}{\cancel{180}_{18}} = \frac{17}{18}$$

4. गोपी अपने जल – जीव कुंड (aquarium) के लिए एक दुकान से मछली खरीदती है | दुकानदार एक टंकी, जिसमें 5 नर मछली और 8 मादा मछली है, में से एक मछली यादृच्छया उसे देने के लिए निकालती है (देखिए आकृति 15.4) | इसकी प्रायिकता है कि निकाली गई मछली नर मछली है?

हलः मछलियों की कुल संख्या = (नर मछलियों की संख्या) + (मादा मछलियों की संख्या) = 5 + 8 = 13

कुंड में से मछली निकालने की घटना के परिणामों की कुल संख्या = 13

संभव परिणामों की संख्या = 13

चूंकि नर मछलियों की संख्या = 5

अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$$\therefore P_{(\text{नर मछली का निकलना})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{13}$$

5. संयोग (chance) के एक खेल में, एक तीर को घुमाया जाता है, जो विश्राम में आने के बाद संख्याओं 1,2,3,4,5,6,7, और 8 में से किसी एक संख्या को इंगित करता है (देखिए आकृति 15.5) | यदि ये सभी परिणाम समप्रायिक हों तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह तीर इंगित

(i) 8 को करेगा ?

(ii) एक विषम संख्या को करेगा ?

(iii) 2 से बड़ी संख्या को करेगा ?

(iv) 9 से छोटी संख्या को करेगा ?

हलः चूंकि विश्राम में आने पर तीर 1 से 8 तक की किसी भी संख्या को इंगित करता है।

संभव परिणामों की संख्या = 8

(i) चूंकि चक्र पर 8 का एक अंक है।

अंक 8 को इंगित करने की घटना के परिणामों की संख्या = 1

अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$$\therefore P_{(\text{8 की ओर तीर इंगित होना})} = \frac{[\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}]}{[\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}]} = \frac{1}{8}$$

(ii) चूंकि विषम संख्याएँ 1, 3, 5 और 7 हैं।

$\therefore$ विषम संख्याओं की संख्या = 4

$\Rightarrow$ अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

$$\therefore P_{(\text{विषम संख्या की ओर तीर इंगित होना})} = \frac{[\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}]}{[\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}]} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{1}{2}$$

(iii) चूंकि 2 से बड़ी संख्याएँ: 3, 4, 5, 6, 7 और 8 हैं

$\therefore$ 2 से बड़ी संख्याओं की संख्या = 6

$\Rightarrow$ अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

$$\therefore P_{(\text{2 से बड़ी संख्या की ओर तीर इंगित होना})} = \frac{[\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}]}{[\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}]} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{3}{4}$$

(iv) 9 से छोटी संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8

$\Rightarrow$ अनुकूल परिणामों की संख्या = 8

$$\therefore P_{(\text{9 से छोटी संख्या की ओर तीर इंगित होना})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{8}{8} = 1$$

6. एक पासे को एक बार फेंका जाता है | निम्नलिखित को प्राप्त करने कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) एक अभाज्य संख्या

(ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या

(iii) एक विषम संख्या

हलः

(i) एक पासे पर अभाज्य संख्याएँ 2, 3 और 5 हैं।

माना कि घटना E" एक अभाज्य संख्या प्राप्त करना है।"

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

चूंकि पासे पर छः संख्याएँ [1, 2, 3, 45 और 6] होती हैं।

E के संभावित परिणामों की संख्या = 6

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{1}{2}$$

(ii) माना घटना E, पासे पर 2 और 6 के बीच की कोई संख्या प्राप्त करना है।

$\because$ 2 और 6 के बीच की संख्याएँ 3, 4 और 5 हैं।

$\therefore$ E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

E के कुल संभव परिणामों की संख्या = 6

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{1}{2}$$

(iii) माना घटना E "पासे पर एक विषम संख्या प्राप्त करना है।"

चूंकि पासे पर विषम संख्याएँ 1, 3 और 5 है।

$\therefore$ E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3, E के सभी संभव परिणामों की संख्या = 6

$$\Rightarrow P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{1}{2}$$

एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित है :

A	B	C	D	E	A

इस पासे को एक बार फेंका जाता है | इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) A प्राप्त हो ?

(ii) D प्राप्त हो ?

हलः चूंकि पासे के 6 फलकों पर अंकित अक्षर इस प्रकार हैं:

A	B	C	D	E	A

फेंके जाने पर एक अक्षर छः प्रकार से प्राप्त होता है।

सम्भव परिणामों की कुल संख्या = 6

(i) चूंकि दो फलकों पर अक्षर A अंकित है।

अक्षर A दो प्रकार से प्राप्त हो सकता है।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

माना घटना E "अक्षर A का प्राप्त होना" है,

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,3}} = \frac{1}{3}$$

(ii) चूंकि केवल एक फलक पर अक्षर D अंकित है।

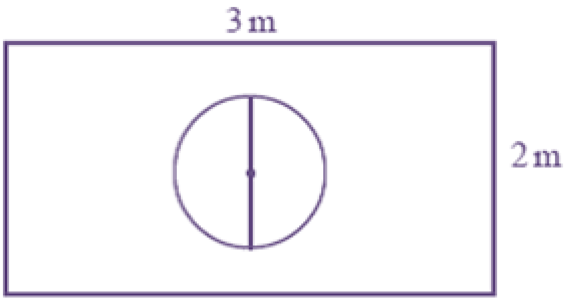
अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

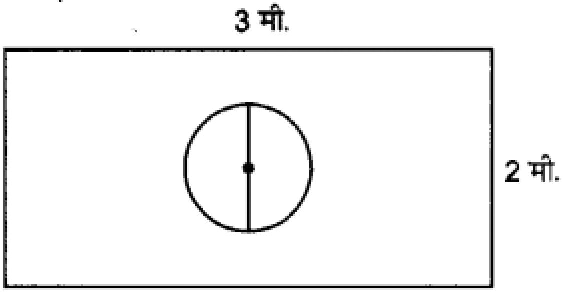
माना घटना E "अक्षर D वाला फलक प्राप्त हो" है,

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{1}{6}$$

7. मान लीजिये आप एक पासे को आकृति 15.6 में दर्शाए आयताकार क्षेत्र में यादृच्छया रूप से गिराते हैं | इसकी क्या प्रायिकता है कि वह पासा 1m व्यास वाले वृत्त के अन्दर गिरेगा?





हल: आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= 3$ मी. $\times 2$ मी. $= 6$ (मी.)^2

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$ मी.^{2} | व्यास = 1 मी. $\Rightarrow$ अर्धव्यास $= \frac{1}{2}$ मी.

$= \frac{\pi}{4}$ मी.^{2}

माना घटना E, 'पासे का वृत्त के अन्दर गिरना' है

$\therefore \quad P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल क्षेत्र का क्षेत्रफल}}{\text{पूरे क्षेत्र का क्षेत्रफल}}$

$= \frac{\text{वृत्र का क्षेत्रफल}}{\text{आयत का क्षेत्रफल}}$

$= \frac{\left[\frac{\pi}{4}\right]}{6} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{24}$

144 बाल पेनों के एक समूह में 20 बाल पेन खराब हैं और शेष अच्छे हैं | आप वाही पेन खरीदना चाहेंगे जो अच्छा हो, परन्तु खराब पेन आप खरीदना नहीं चाहेंगे | दुकानदार इन पेनों में से, यादृच्छया एक पेन निकालकर आपको देता है | इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) आप वह पेन खरीदेंगे ?

(ii) आप वह पेन नहीं खरीदेंगे ?

हल: बॉल पेनों की कुल संख्या = 144

1 पेन निकालने के संभावित परिणामों की संख्या = 144

(i) चूंकि खराब पेनों की संख्या = 20

अच्छे पेनों की संख्या = 144 – 20 = 124

अनुकूल परिणामों की संख्या = 124

माना घटना E, "अच्छा पेन खरीदना" है।

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{\cancel{124}^{31}}{\cancel{144}_{36}} = \frac{31}{36}$$

(ii) माना घटना $\bar{E}$, "एक अच्छा पेन नहीं खरीदना" है

$$\therefore \quad P_{(\bar{E})} = 1 - P_{(E)} = 1 - \frac{31}{36}$$

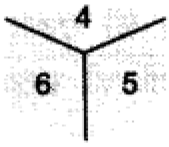
$$= \frac{36-31}{36} = \frac{5}{36}$$

उदाहरण 13 को देखिए | (i) निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

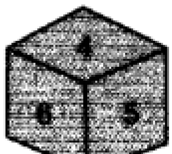
घटना दोनों पासों की संख्याओं का योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) एक विधार्थी यह तर्क देता है कि 'यहाँ कुल 11 परिणाम 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 और 12 है | अतः प्रत्येक कि प्रायिकता 1/11 है|' क्या आप इस तर्क से सहमत है ? सकारण उत्तर दीजिए |

हलः जब नीला पासा '1' दर्शाता है, तो सलेटी पासे पर संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी संख्या हो सकती है। यही तब भी होगा, जब नीले पासे पर '2', '3', '4', '5' या '6' होगा। इस प्रयोग के संभावित परिणामों को नीचे सारणी में दिया गया है। प्रत्येक क्रमित युग्म की पहली संख्या नीले पासे पर आने वाली संख्या है तथा दूसरी संख्या सलेटी पासे पर आने वाली संख्या है।



सलेटी



नीला

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ध्यान रहे कि युग्म (1, 4) और (4, 1) भिन्न है। इस प्रकार सभी संभव परिणाम $= 6 \times 6 = 36$

(1) **दोनों पासों की संख्याओं का योग 8**

घटना "दोनों पासों की संख्याओं का योग 8 है" को E से प्रकट करें तो,

E के अनुकूल परिणाम हैं; (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) और (6, 2) हैं। जैसा कि उक्त आकृति में दर्शाया गया है।

इन युग्मों की संख्या 5 है।

$\therefore P_E \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{36}$

(2) **दोनों पासों की संख्याओं का योग 13**

उक्त आकृति से स्पष्ट है कि ऐसा कोई भी परिणाम नहीं है जब दोनों पासों की संख्याओं का योग 13 हो।

यदि घटना "दोनों पासों की संख्याओं का 13 है" को F द्वारा व्यक्त किया जाता हो, तो

F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 0

$\therefore P_F = \frac{0}{36} = 0$

(3) दोनों पासों की संख्याओं का योग < 12

उक्त आकृति से स्पष्ट है कि दोनों पासों की संख्याओं के युग्मों की संख्याओं का योग 12 से कम है या 12 समान है। यदि उक्त घटना, "दोनों पासों की संख्याओं का योग < 12 है" को G व्यक्त करें, तो G के अनुकुल परिणामों की संख्या = 36

$\Rightarrow P_F = \frac{36}{36} = 1$

(4) **(a) दो पासों के अंकों का योग 3 होना**

चूंकि (1, 2) और (2, 1) ऐसे युग्म हैं जिनकी संख्याओं का योग 3 है। इन युग्मों (परिणामों) की संख्या 2 है।

यदि उक्त घटना को पत्र से प्रकट करें, तो H के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

$\Rightarrow P_{(H)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों को संख्या}} = \frac{2}{36}$

(b) दोनों पासों की संख्याओं का योग 4 है

चूंकि (1, 3), (2, 2), (3, 1) ऐसे युग्म हैं जिनकी संख्याओं का योग 4 है। इनकी संख्या 3 है।

यदि उक्त घटना को J, से व्यक्त करें, तो J के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$\Rightarrow P_{(J)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों को संख्या}} = \frac{3}{36}$

(c) दोनों पासों की संख्याओं का योग 5 है

स्पष्ट है कि ऐसे युग्मों की संख्या 4 है जिनमें संख्याओं का योग 5 है [.-.. (1, 4), (2, 3), (3, 2) और (4, 1)) की

संख्याओं का योग 5 है।

यदि उक्त घटना को k से व्यक्त करें, तो k के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

$\Rightarrow P_{(k)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{36}$

(d) दोनों पासों की संख्याओं का योग 6 है

मात्रा उक्त घटता को (L) से व्यक्त करते हैं।

$\therefore L$, के परिणाम हैं: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) और (5, 1)

$\therefore L$, के अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$\Rightarrow P_{(L)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{12}$

(e) दोनों पासों की संख्याओं का योग 7 है

उक्त आकृति से स्पष्ट है कि (1, 6) (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) और (6, 1) ऐसे 6 युग्म हैं जिनमें संख्याओं का योग 7 है;

यदि इस घटना को M से प्रकट करें, तो M के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

$$\Rightarrow P_{(M)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{6}{36}$$

(f) दोनों पासों की संख्याओं का योग 9 है

स्पष्ट है कि: (3, 6), (4, 5), (5, 4) और (6, 3) ऐसे 4 युग्म हैं जिनमें संख्याओं का योग 9 है।

* यदि इस घटना को (N) से व्यक्त करें, तो N अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

$$\Rightarrow P_{(N)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{36}$$

(g) दोनों पासों की संख्याओं का योग 10 है

चूंकि (4, 6), (5, 5), (6, 4) ऐसे 3 युग्म हैं जिनमें संख्याओं का योग 10 है।

इस घटना को यदि (p) से व्यक्त करें, तो p के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$$\Rightarrow P_{(p)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{36}$$

(h) दोनों पासों की संख्याओं का योग 11 है

स्पष्ट है कि: (5, 6) और (6, 5) केवल दो ही ऐसे युग्म हैं जिनमें संख्याओं का योग 11 है। यदि इस घटना को (Q) से व्यक्त करें, तो Q के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

$$\Rightarrow P_{(Q)} = \frac{2}{36}$$

इस प्रकार दी गई तालिका को हम निम्नांकित रूप से पूरा करते हैं:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(v) नहीं। चूंकि सभी संभव परिणामों की संख्या 36 है, 11 नहीं

∴ यह तर्क सही नहीं है।

एक पासे को दो बार फेंका जाता है | इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) 5 किसी भी बार में नहीं आएगा ?

(ii) 5 कम से कम एक बार आएगा ?

[संकेत : एक पासे को दो बार फेंकना और दो पासों को एक साथ फेंकना एक ही प्रयोग माना जाता है |]

हल: एक पासे को दो बार फेंकना या दो पासों को एक साथ फेंकना एक ही घटना है।

सभी संभव परिणाम इस प्रकार हैं:

$$\begin{array}{l}
(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6)\\
(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6)\\
(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6)\\
(4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6)\\
(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6)\\
(6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)
\end{array}$$

$\therefore$ सभी संभव परिणामों की संख्या = 36

(*i*) यदि घटना "5 किसी भी बार में नहीं आयेगा" को E से व्यक्त करें, तो

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 36 – [6 + 6 – 1] = 25

$$\Rightarrow \qquad P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{25}{36}$$

(*ii*) यदि घटना "5 कम से कम एक बार आयेगा" को F से व्यक्त करें, तो

F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6 + 6 – 1 = 11

$$\Rightarrow \qquad P_{(F)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{11}{36}$$

एक पासे के फलकों पर संख्याएँ 1,2,2,3,3, और 6 लिखी हुई हैं | इसे दो बार फेंका जाता है तथा दोनों बार प्राप्त हुई संख्याओं के योग लिख लिए जाते हैं | दोनों बार फेंकने के बाद, प्राप्त योग के कुछ संभावित मान निम्नलिखित सारणी में दिए हैं इस सारणी को पूरा कीजिए |

		पहली बार फेंकने के मान					
दूसरी बार फेंकने के मान	+	1	2	2	3	3	6
	1	2	3	3	4	4	7
	2	3	4	4	5	5	8
	2					5	
	3						
	3			5			9
	6	7	8	8	9	9	12

इसकी क्या प्रायिकता है कि कुल योग

(i) एक सम संख्या होगा ?

(ii) 6 है ?

(iii) कम से कम 6 है ?

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

∴ सभी संभावित परिणामों की संख्या = 36

(*i*) यदि घटना 'कुल योग एक समसंख्या होगा' को E से व्यक्त करें, तो

E के अनुकूल परिणाम = 18

[2, 4, 4, 4, 4, 8, 4, 4,, 8, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 8, 8 सम संख्याएँ हैं]

$$\Rightarrow \quad P_{(E)} = \frac{18}{36} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

(*ii*) यदि घटना 'कुलयोग 6 है' को F से व्यक्त करें, तो अनुकूल परिणामों की संख्या 4 है

$$\Rightarrow \quad P_{(F)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{36}_{9}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$$

(*iii*) यदि घटना 'कुल योग कम से कम 6 हैं' को G से व्यक्त करें, तो

G के अनुकूल परिणामों की संख्या = 15

[∵ 7, 8, 8, 6, 6, 9, 6, 6, 9, 7, 8, 7, 9, 9, 12 अनुकूल परिणाम हैं]

$$\Rightarrow \quad P_{(G)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{36}_{12}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$$

एक जार में 24 कंचे है जिनमे कुछ हरे हैं और शेष नीले हैं। यदि इस जार में से यादृच्छया एक कंचा निकाला जाता है तो इस कंचे के हरा होने कि प्रायिकता 2/3 है। जार में नीले कंचों कि संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः चूंकि जार में 24 कंचे हैं।

सभी संभव परिणामों की संख्या = 4

माना जार में नीले कचे x हैं।

जार में हरे कंचों की संख्या = 24 – x

यदि घटना "निकाला गया कंचा हरा है" को E से व्यक्त करें, तो

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = (24 – x)

$$\Rightarrow \quad P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{24-x}{24}$$

अब, शर्त के अनुसार, हमें प्राप्त है:

$$\frac{24-x}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3(24-x) = 2 \times 24 \Rightarrow 72 - 3x = 48$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 72 - 48 \Rightarrow 3x = 24$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{24}{3} = 8$$

इस प्रकार, जार में नीले कंचों की संख्या 8 है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 15.1 (पृष्ठ संख्या 337-341)

प्रश्न 1 निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए:

(i) घटना E की प्रायिकता + घटना 'E नहीं' की प्रायिकता = ________ है।

(ii) उस घटना कि प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती ________ है। ऐसी घटना ________ कहलाती है।

(iii) उस घटना कि प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित है ________ है। ऐसी घटना ________ कहलाती है।

(iv) किसी प्रयोग कि सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग ________ है।

(v) किसी घटना की प्रायिकता ________ से बड़ी या उसके बराबर होती है तथा ________ से छोटी या उसके बराबर होती है।

उत्तर-

(i) घटना E की प्रायिकता + घटना 'E नहीं' की प्रायिकता = **1** है।

(ii) उस घटना कि प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती **0** है। ऐसी घटना **असंभव घटना** कहलाती

है।

(iii) उस घटना कि प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित है <u>1</u> है। ऐसी घटना **<u>निश्चित घटना</u>** कहलाती है।

(iv) किसी प्रयोग कि सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग <u>1</u> है।

(v) किसी घटना की प्रायिकता <u>**0**</u> से बड़ी या उसके बराबर होती है तथा <u>**1**</u> से छोटी या उसके बराबर होती है।

प्रश्न 2 निम्नलिखित प्रयोगों में से किन-किन प्रयोगों के परिणाम समप्रायिक हैं? स्पष्ट कीजिए।

(i) एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है। कार चलना प्रारंभ हो जाती है या कार चलना प्रारंभ नहीं होती है।

(ii) एक खिलाड़ी बास्केटबौल को बास्केट में डालने का प्रयत्न करती है। वह बास्केट में बौल डाल पाती है या नहीं डाल पाती है।

(iii) एक सत्य – असत्य प्रश्न का अनुमान लगाया जाता है। उत्तर सही है या गलत होगा।

(iv) एक बच्चे का जन्म होता है। वह एक लड़का है या एक लड़की है।

उत्तर-

(i) समप्रायिक है।

(ii) समप्रायिक है।

(iii) समप्रायिक है।

(iv) समप्रायिक है।

प्रश्न 3 फुटबॉल के खेल को प्रांरभ करते समय यह निर्णय लेने के लिए कि कौन सी टीम पहले बौल लेगी, इसके लिए सिक्का उछलना एक न्यायसंगत विधि क्यों माना जाता है?

उत्तर- क्योंकि सिक्का उछालना एक समप्रायिक घटना है।

प्रश्न 4 निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?

a. $\frac{2}{3}$
b. -1.5
c. 15%
d. 0.7

उत्तर-

b. -1.5 [क्योंकि किसी भी प्रायिकता की सीमा 0 से 1 के बीच होती है|

प्रश्न 5 यदि P(E) = 0.05 है, तो 'E नहीं' कि प्रायिकता क्या है।

उत्तर- दिया है, (E) = 0.05

हम जानते हैं कि P(E) + P(E) नहीं = 1

⇒ 0.05 + P(E) नहीं = 1

⇒ P(E) नहीं = 1 – 0.05

⇒ P(E) नहीं = 0.95

प्रश्न 6 एक थैले में केवल नींबू कि महक वाली मीठी गोलियाँ हैं। मालिनी बिना थैले में झाँके उसमें से एक गोली निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह निकाली गई गोली

a. संतरे कि महक वाली है?
b. नींबू कि महक वाली है?

उत्तर- माना थैले में कुल गोलियों की संख्या = n

a. संतरे कि महक वाली है?

संतरे की महक वाली गोलियों की संख्या = 0

संतरे की महक वाली गोली निकलने की प्रायिकता।

b. चूंकि थैले में सभी गोलियाँ नींबू की महक वाली हैं।

थैले में से एक नींबू की महक वाली गोली निकालना एक निश्चित घटना है।

P(नीबू की महक वाली गोली) = 1

प्रश्न 7 यह दिया हुआ है कि 3 विधार्थियों के एक समूह में से 2 विधार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने कि प्रायिकता 0.9992 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विधार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो?

उत्तर- माना 2 विद्यार्थियों का एक ही दिन जन्मदिन होने की घटना E है।

माना 2 विद्यार्थियों का एक ही दिन जन्मदिन नहीं होने की घटना E है।

चूंकि P(E) + P(E नही = (1,

परन्तु,

P(E नही = (0.992

P(E नही + (0.992 = 1

P(E नही = (1 – 0.992 = 0.008

अत :2 विद्यार्थियों का एक ही दिन जन्मदिन होने की घटना की प्रायिकता 0.008 है।

प्रश्न 8 एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यदृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद

a. लाल हो
b. लाल नहीं हो?

उत्तर- थैले में गेंदों की कुल संख्या = 3 + 5 = 8

थैले में से एक गेंद निकालने की घटना के सभी संभव परिणामों की संख्या = 8

a. चूँकि लाल गेंदों की संख्या = 3

⇒ अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$$\therefore \; P_{(\text{लाल गेंद निकालना})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{8}$$

अतः P(लाल गेंद निकालना) = $\frac{3}{8}$

b. चूँकि काली गेंदों की संख्या = 5

⇒ लाल गेंद नहीं वाले परिणामों की संख्या = 5

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$$\therefore \; P_{(\text{लाल गेंद नहीं निकालना})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{8}$$

प्रश्न 9 एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा:

a. लाल है?
b. सफेद है?
c. हरा नहीं है?

उत्तर- डिब्बे में कंचों की संख्या = 5 लाल कंचे + 8 सफेद कंचे + 4 हरे कंचे = 17 कंचे।

डिब्बे में से एक कंचा निकालने की घटना के सम्भव परिणामों की संख्या = 17

a. लाल गेंदों की संख्या = 5

डिब्बे में से निकाली गई गेंद का लाल होने की घटना के परिणामों की संख्या = 5

अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$$\therefore \quad P_{(\text{लाल गेंद})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{17}$$

b. सफेद गेंदों की संख्या = 8

डिब्बे में से सफेद गेंद निकाली जाने की घटना के परिणामों की संख्या = 8

अनुकूल परिणामों की संख्या = 8

$$\therefore \quad P_{(\text{सफेद गेंद})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{8}{17}$$

c. ∵ डिब्बे में हरी गेंद की संख्या = 4

∴ डिब्बे में 'हरी गेंद नहीं' की संख्या = 17 - 4 = 13

∴ डिब्बे में से निकली गई गेंद का 'हरा नहीं' होने कि घटना के परिणामों की संख्या = 13

अर्थात् अनुकूल परिणामों की संख्या = 13

$$\therefore \quad P_{(\text{हरा गेंद नहीं निकालना})} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{13}{17}$$

प्रश्न 10 एक पिग्गी बैंक में, 50 पैसे के सौ सिक्के है, 1₹ के पचास सिक्के हैं, 2₹ के बीस सिक्के गिरने के परिणाम समप्रायिक हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का-

a. 50 पैसे का होगा?
b. 5₹ का नहीं होगा?

उत्तर- पिग्गी-बैंक में कुल सिक्कों की संख्या = 50 पैसे के सिक्के + 1 के सिक्के + 2₹ के सिक्के + 5 के सिक्के

= 100 + 50 + 20 + 10 = 180

पिग्गी बैंक से सिक्का निकलने की घटना के परिणामों की संख्या = 180

a. 50 पै. के सिक्कों की संख्या = 100

पिग्गी बैंक से 50 पैसे का सिक्का गिरने की घटना की संख्या = 100

⇒ P(50 पैसे का सिक्का होना) $= \frac{100}{80} = \frac{5}{9}$

b. ∵ 5₹ के सिक्कों की संख्या = 10

∴ 5₹ के अतिरिक्त सिक्को की संख्या = 180 - 10 = 170

∴ पिग्गी बैंक से गिरने वाले सिक्कों का '5₹ का सिक्का नहीं' होने की घटना के परिणामों की संख्या = 170

⇒ P(5₹ का सिक्का नहीं) $\frac{170}{180} = \frac{17}{18}$

प्रश्न 11 गोपी अपने जल-जीव कुंड (aquarium) के लिए एक दुकान से मछली खरीदती है। दुकानदार एक टंकी, जिसमें 5 नर मछली और 8 मादा मछली है, में से एक मछली यादृच्छया उसे देने के लिए निकालती है इसकी प्रायिकता है कि निकाली गई मछली नर मछली है?

उत्तर- मछलियों की कुल संख्या) = नर मछलियों की संख्या) + (मादा मछलियों की संख्या = (5 + 8 = 13

कुंड में से मछली निकालने की घटना के परिणामों की कुल संख्या = 13

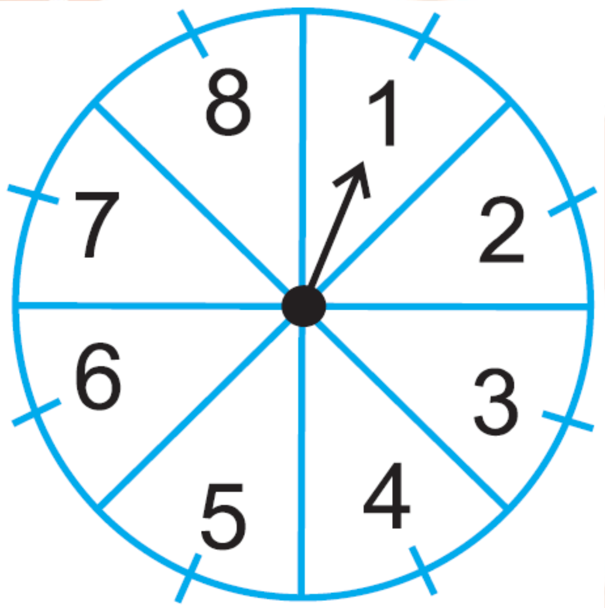
संभव परिणामों की संख्या = 13

चूंकि नर मछलियों की संख्या = 5

अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$\therefore$ $P_{(\text{नर मछली का निकलना})} = \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \dfrac{5}{13}$

प्रश्न 12 संयोग) chance) के एक खेल में, एक तीर को घुमाया जाता है, जो विश्राम में आने के बाद संख्याओं 1,2,3,4,5,6,7, और 8 में से किसी एक संख्या को इंगित करता है यदि ये सभी परिणाम समप्रायिक हों तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह तीर इंगित-



a. 8 को करेगा?
b. एक विषम संख्या को करेगा?
c. 2 से बड़ी संख्या को करेगा?
d. 9 से छोटी संख्या को करेगा?

उत्तर- चूंकि विश्राम में आने पर तीर 1 से 8 तक की किसी भी संख्या को इंगित करता है।

संभव परिणामों की संख्या = 8

a. चूंकि चक्र पर 8 का एक अंक है।

अंक 8 को इंगित करने की घटना के परिणामों की संख्या = 1

अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$\therefore$ $P_{(8 \text{ कि ओर तीर इंगित होना})} = \frac{[\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}]}{[\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}]}$

$= \frac{1}{8}$

b. चूँकि विषम संख्याएँ 1, 3, 5, और 7 है।

∴ विषम संख्याओं की संख्या = 4

⇒ अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

$\therefore$ $P_{(\text{विषम संख्या कि और तीर इंगित होना})} = \frac{[\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}]}{[\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}]} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c. चूँकि 2 से बड़ी संख्याएँ की संख्या = 6

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

⇒ अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

$\therefore$ $P_{(2 \text{ से बड़ी संख्या की ओर तीर इंगित होना})} = \frac{[\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}]}{[\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}]} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d. 9 से छोटी संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, और 8

⇒ अनुकूल परिणामों की संख्या = 8

$\therefore$ $P_{(9 \text{ से छोटी संख्या की ओर तीर इंगित होना})} = \frac{[\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}]}{[\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}]} = \frac{8}{8} = 1$

प्रश्न 13 एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

a. एक अभाज्य संख्या,
b. 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या,
c. एक विषम संख्या।

उत्तर-

a. एक पासे पर अभाज्य संख्याएँ 2, 3 और 5 हैं।

माना कि घटना E ''एक अभाज्य संख्या प्राप्त करना है।"

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

चूंकि पासे पर छः संख्याएँ [1, 2, 3, 45 और 6] होती हैं।

E के संभावित परिणामों की संख्या = 6

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b. माना घटना E, पासे पर 2 और 6 के बिच की कोई संख्या प्राप्त करना है।

∵ 2 और 6 के बिच की संख्याएँ 3, 4 और 5 है।

∴ E के कुल अनुकूल परिणामो की संख्या = 3

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c. माना घटना E ''पासे पर एक विषम संख्या प्राप्त करना है।''

चूँकि पासे पर विषम संख्याएँ 1, 3 और 5 है।

∴ E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3, E के सभी संभव परिणामों की संख्या = 6

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 14 52 पत्तों कि अच्छी प्रकार से फेटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

a. लाल रंग का बादशाह,
b. एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता,
c. लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता,
d. पान का गुलाम,
e. हुकुम का पत्ता,
f. एक ईंट कि बेगम।

उत्तर- चूंकि तास की एक गड्डी में 52 पत्ते होते हैं।

एक पत्ता 52 तरीकों से निकाला जा सकता है।

प्रत्येक अवस्था में सभी संभव परिणामों की संख्या = 52

a. माना घटना E, “लाल रंग का बादशाह प्राप्त करना है।

चूंकि एक गड्डी में लाल रंग के 2 बादशाह [1 पान (hearts) का और 1 ईंट (diamond) का]

अनुकूल परिणामों की संख्या = 2,

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52

$$\therefore\ P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

b. माना घटना E, ''एक फेस कार्ड प्राप्त करना है।

चूँकि एक गड्डी में 12 फेस कार्ड होते है।

[∵ एक रंग के तीन फेस कार्ड-बादशाह, बेगम और गुलाम होते है।

∴ चार रंगो के 3 × 4 = 12 फेस कार्ड होते है।]

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 12;

कुल परिणामो की संख्या = 52

$$\therefore\ P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

c. माना घटना E, ''लाल रंग की तस्वीर वाला पत्ता'' प्राप्त करना है।

चूँकि एक रंग में 3 पत्ते तस्वीर वाले (बादशाह, बेगम, गुलाम) होते है और ईंट तथा पान के पत्ते लाल रंग के होते है।

∴ तस्वीर वाले लाल रंग के कुल पत्ते = 2 × 3 = 6

∴ अनुकूल परिणामो की संख्या = 6

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$$

d. माना घटना E, ''पान का गुलाम'' प्राप्त करना है। चूँकि पान का केवल एक ही गुलाम है।

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{52}$$

e. माना घट्न E, "पान का गुलाम" प्राप्त करना है। चूँकि पान का केवल एक ही गुलाम होता है।

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 13

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

f. माना घटना E, "एक ईंट की बेगम" प्राप्त करना है।

चूँकि तास की गड्डी में ईंट की बेगम एक होती है।

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{52}$$

प्रश्न 15 ताश के पाँच पत्तों-ईंट का दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का-को पलट करके अच्छी प्रकार फेटा जाता है। फिर इनमें से यादृच्छया एक पत्ता निकाला जाता है।

i. इसकी क्या प्रायिकता है कि यह पत्ता एक बेगम है।
ii. यदि बेगम निकल आती है, तो उसे अलग रख दिया जाता है और एक अन्य निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दूसरा निकाला गया पत्ता (a) एक इक्का है? (b) एक बेगम है?

उत्तर- चूंकि कुल पत्ते (दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का) पाँच हैं।

i. माना घटना, E “निकाला गया पत्ता एक बेगम है” को प्रदर्शित करता है।

कुल परिणामों की संख्या = 5

चूंकि इन पत्तों में केवल एक ही बेगम है।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$$\rightarrow P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{5}$$

ii. चूंकि बेगम के पत्ते को निकालकर एक ओर रखने पर, हमारे पास केवल चार पत्ते बचते हैं।

सभी संभव परिणामों की संख्या = 4

a. चूंकि चार पत्तों में केवल 1 इक्का है।

घटना, E "निकाला गया पत्ता एक इक्का है" के लिए अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$$\rightarrow P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{4}$$

b. माना घटना E, "निकाला गया पत्ता एक बेगम है" को दर्शाता है।

P(E) = 0

प्रश्न 16 किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकले गए पेन कि अच्छा होने कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- कुल पेन] = अच्छे पेनों की संख्या] + [खराब पेनों की संख्या] = [132] + [12] = 144

अतः एक अच्छा पेन निकाले जाने के 144 परिणाम हो सकते हैं।

संभावित परिणामों की संख्या = 144

माना घटना E, "एक अच्छे पेन का निकलना "है।

और अच्छे पेनों की संख्या = 132

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 132

$$\rightarrow P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{132}{144} = \frac{11}{12}$$

प्रश्न 17

i. 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन कि अच्छा है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब होगा?
ii. मान लीजिए (i) में निकाला गया बल्ब ख़राब नहीं है और न ही इसे दुबारा बल्बों के साथ मिलाया जाता है। अब शेष बल्बों में से एक ख़राब बल्ब यद्दच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है की यह बल्ब ख़राब नहीं होगा?

उत्तर-

i. कुल बल्बों की संख्या = 20

सम्भावित परिणामों की संख्या = 20

खराब बल्बों की संख्या = 4

अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

माना घटना E, "निकाला गया बल्ब का खराब होना" है।

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

ii. चूंकि ऊपर निकाला गया बल्ब खराब नहीं है। और इसे दुबारा बल्बों के साथ नहीं मिलाया गया है।

शेष बल्बों की संख्या = 20 - 1 = 19;

खराब बल्बों की संख्या = 4

शेष बचे बल्बों में अच्छे बल्बों की संख्या = 19 - 4 = 15

इस प्रकार, एक अच्छे बल्ब के निकलने के लिए। अनुकूल परिणामों की संख्या = 15

चूंकि शेष बचे कुल बल्ब 19 है, इसलिए सभी संभव परिणामों की संख्या = 19

माना घटना E, 'निकाला गया बल्ब खराब नहीं है' को प्रदर्शित करता है।

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{15}{19}$$

प्रश्न 18 एक पेटी में 90 डिस्क (discs) हैं, जिन पर 1 से 90 तक संख्याएँ अंकित हैं। यदि इस पेटी में से

एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी:

a. दो अंकों कि एक संख्या
b. एक पूर्ण वर्ग संख्या
c. 5 से विभाज्य एक संख्या

उत्तर- पेटी में डिस्कों की संख्या = 90

एक डिस्क निकालने के 90 सम्भव परिणाम हो सकते हैं।

a. चूंकि प्रत्येक डिस्क पर एक अंक (1 से 90 तक) अंकित हैं।

ऐसी डिस्को की संख्या जिन पर 2 अंकों वाली संख्या अंकित हैं = 90 - (1 अंक वाली संख्याएँ) = 90 - 9 = 81

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 और 9 एक अंक वाली संख्याएँ हैं।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 81

माना घटना E "निकाली गई डिस्क पर दो अंकों वाली संख्या का अंकित होना" है।

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$$

b. चूंकि 1 से 90 तक की संख्याओं में 90 पूर्ण वर्ग अर्थात् 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 और 81 है।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 9

माना घटना E, 'निकाली गई डिस्क पर एक पूर्ण वर्ग अंकित होना है।'

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

c. चूंकि 1 से 90 तक की संख्याओं में 5 से विभाज्य संख्याएँ:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85 और 90 हैं।

जिनकी संख्या 18 है। माना घटना E, "निकाली गई डिस्क पर अंकित संख्या 5 से विभाज्य" है।

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

प्रश्न 19 एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित है:

A	B	C	D	E	A

इस पासे को एक बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि-

a. A प्राप्त हो?
b. D प्राप्त हो?

उत्तर- चूंकि पासे के 6 फलकों पर अंकित अक्षर इस प्रकार हैं:

A	B	C	D	E	A

फेंके जाने पर एक अक्षर छः प्रकार से प्राप्त होता है।

सम्भव परिणामों की कुल संख्या = 6

a. चूंकि दो फलकों पर अक्षर A अंकित है।

अक्षर A दो प्रकार से प्राप्त हो सकता है।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

माना घटना E "अक्षर A का प्राप्त होना" है,

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

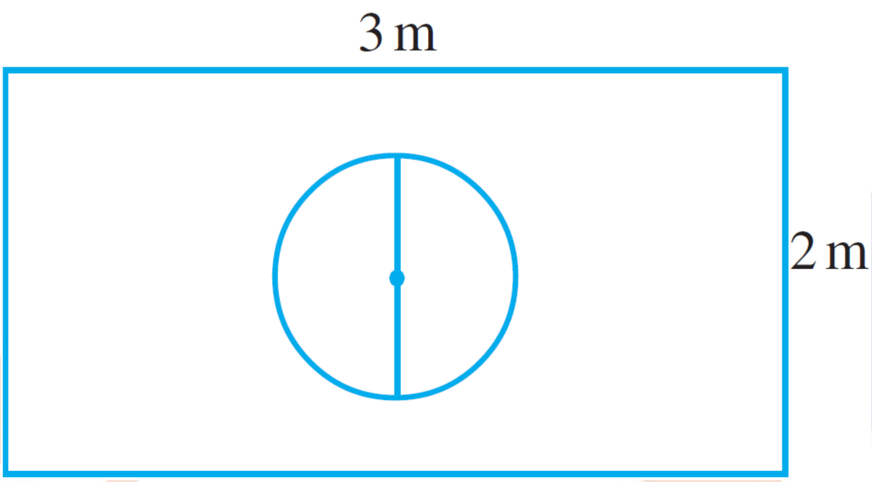
b. चूंकि केवल एक फलक पर अक्षर D अंकित है।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

माना घटना E "अक्षर D वाला फलक प्राप्त हो" है,

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{6}$$

प्रश्न 20 मान लीजिये आप एक पासे को आकृति 15.6 में दर्शाए आयताकार क्षेत्र में यादृच्छया रूप से गिराते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह पासा 1m व्यास वाले वृत्त के अन्दर गिरेगा?



उत्तर-

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 3मी. × 2मी. = 6(मी.)^2

वृत का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 m^2$$

$= \frac{\pi}{4}$ मी.^{2}

व्यास = 1मी.

$\Rightarrow$ अर्धव्यास $= \frac{1}{2}$ मी.

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल क्षेत्र का क्षेत्रफल}}{\text{पुरे क्षेत्र का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{\text{वृत का क्षेत्रफ़ल}}{\text{आयत का क्षेत्रफ़ल}}$$

$$= \frac{\left[\frac{\pi}{4}\right]}{6} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{\delta}{24}$$

प्रश्न 21 144 बाल पेनों के एक समूह में 20 बाल पेन खराब हैं और शेष अच्छे हैं। आप वाही पेन खरीदना चाहेंगे जो अच्छा हो, परन्तु खराब पेन आप खरीदना नहीं चाहेंगे। दुकानदार इन पेनों में से, यादृच्छया एक पेन निकालकर आपको देता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि-

a. आप वह पेन खरीदेंगे?
b. आप वह पेन नहीं खरीदेंगे?

उत्तर- बॉल पेनों की कुल संख्या = 144

1 पेन निकालने के संभावित परिणामों की संख्या = 144

a. चूंकि खराब पेनों की संख्या = 20

अच्छे पेनों की संख्या = 144 – 20 = 124

अनुकूल परिणामों की संख्या = 124

माना घटना E, “अच्छा पेन खरीदना” है।

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

b. माना घटना $\bar{E}$, "एक अच्छा पेन नहीं खरीदना" है-

$$\therefore P_{(\bar{E})} = 1 - P_E = 1 - \frac{31}{36}$$

$$= \frac{36-31}{36} = \frac{5}{36}$$

प्रश्न 22

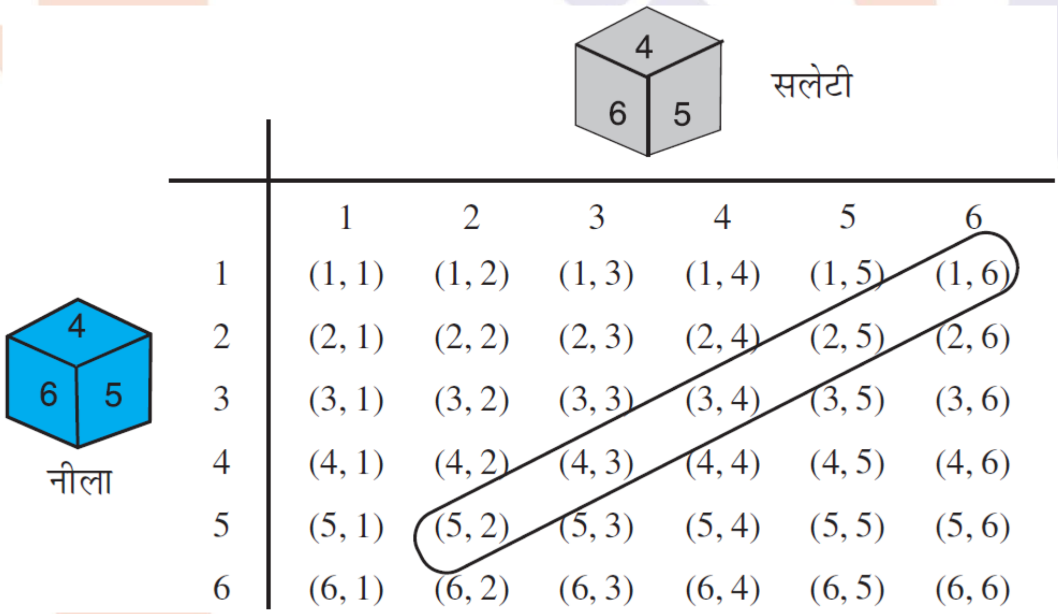
i. निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए:

घटना दोनों पासो की संख्याओं का योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

ii. एक विधार्थी यह तर्क देता है कि 'यहाँ कुल 11 परिणाम 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 है। अतः प्रत्येक कि प्रायिकता 111111 है।' क्या आप इस तर्क से सहमत है? सकारण उत्तर दीजिए।

उत्तर- जब नीला पासा' 1' दर्शाता है, तो सलेटी पासे पर संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी संख्या हो सकती है। यही

तब भी होगा, जब नीले पासे पर' 2', '3', '4', '5' या' 6' होगा। इस प्रयोग के संभावित परिणामों को नीचे सारणी में दिया गया है। प्रत्येक क्रमित युग्म की पहली संख्या नीले पासे पर आने वाली संख्या है तथा दूसरी संख्या सलेटी पासे पर आने वाली संख्या है।



ध्यान रहे कि युग्म (1, 4) और (4, 1) भिन्न है। इस प्रकार सभी संभव परिणाम = 6 × 6 = 36

i. दोनों पासों की संख्याओं का योग 8

घटना 'दोनों पासो की संख्या का योग 8 हैं।' को E से प्रकट करें तो,

E के अनुकूल परिणाम है: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) और (6, 2) है। जैसा कि उक्त आकृति में

दर्शाया गया है।

इन युग्मो की संख्या 5 है।

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{36}$$

ii. दोनों पासों की संख्याओं का योग 13

उक्त आकृति से स्पष्ट है कि ऐसा कोई भी परिणाम नहीं है जब दोनों पासों की संख्याओं का योग 13 हो।

यदि घटना 'दोनों पासों की संख्याओं का योग 13 है' को F द्वारा व्यक्त किया जाता हो, तो

F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 0

$\therefore P_{(G)} \frac{0}{36} = 0$

iii. दोनों पासों कि संख्याओं का योग ≤12

उक्त आकृति से स्पष्ट है कि दोनों पासों कि संख्याओं का योग 12 से कम है या 12 समान है। यदि उक्त घटना, "दोनों पासों की संख्याओं का योग ≤12 है" को G व्यक्त करें, तो G के अनुकूल परिणामों की संख्या = 36

$\Rightarrow P_{(G)} = \frac{36}{36} = 1$

iv.

a. दोनों पासों के अंको का योग 3 होना

चूँकि (1, 2) और (2, 1) ऐसे युग्म है जिनकी संख्याओं का योग 3 है। इन युग्मो (परिणामों) की संख्या 2 है।

यदि उक्त घटना का H से प्रकट करें, तो H के अनुकूल परिणामो की संख्या = 2

$$\therefore P_{(H)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{2}{36}$$

b. दोनों पासों की संख्याओं का योग 4 है।

चूँकि (1, 3), (2, 2), (3, 1) ऐसे युग्म है जिनकी संख्याओं का योग 4 है। इनकी संख्या 3 है।

यदि उक्त घटना को J से व्यक्त करें, तो अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$$\therefore P_{(J)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{36}$$

c. दोनों पासों की संख्याओं का योग 5 हैं।

स्पष्ट है कि ऐसे युग्मो की संख्या 4 है जिनमें संख्याओं का योग 5 है [∵ (1, 4), (2, 3), (3, 2) और (4, 1)] की संख्याओं का योग 5 हैं।

यदि उक्त घटना को K से व्यक्त करें, तो K के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

$$\therefore P_{(K)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{36}$$

d. दोनों पासों की संख्याओं का योग 6 है।

माना उक्त घटना को (L) से व्यक्त करते है।

∴ L के परिणाम है: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) और (5, 1)

∴ L के अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$$\therefore P_{(L)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{36}$$

e. दोनों पासों की संख्याओं का योग 7 हैं।

उक्त आकृति से स्पष्ट है कि (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) और (6, 1) ऐसे 6 युग्म है जिनमें संख्याओं। का योग 7 है:

यदि इस घट्न को M से प्रकट करें, तो M के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

$$\therefore P_{(M)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{6}{36}$$

f. दोनों पासो की संख्याओं का योग 9 है

स्पष्ट है कि: (3, 6), (4, 5), (5, 4) और (6, 3) ऐसे 4 युग्म है जिनमे संख्याओं का योग 9 है।

यदि इस घटना को (N) से व्यक्त करें, तो N के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

$$\therefore P_{(N)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{36}$$

g. दोनों पासों की संख्याओं का योग 10 है।

चूँकि (4, 6), (5, 5), (6, 4) ऐसे 3 युग्म है जिनमें संख्याओं का योग 10 हैं।

इस घटना को यदि (P) से व्यक्त करें, तो P के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$$\therefore P_{(p)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{36}$$

h. दोनों पासों की संख्याओं का योग 11 है।

स्पष्ट है कि: (5, 6) और (6, 5) केवल दो ही ऐसे युग्म है जिनमे संख्याओं का योग 11 है
यदि इस घटना को (Q) से व्यक्त करें, तो Q के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

$$\Rightarrow P_{(Q)} = \frac{2}{36}$$

इस प्रकार दी गई तालिका को हम निम्नांकित रूप से पूरा करते है:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

v. नहीं चूँकि सभी संभव परिणामों संख्या 36 है, 11 नहीं

चूँकि यह तर्क सही नहीं है।

प्रश्न 23 एक खेल में एक रूपए के सिक्के को तीन बार उछाला जाता है और प्रत्येक बार का परिणाम लिख लिया जाता है। तीनों परिणाम समान होने पर, अर्थात् तीन चित या तीन पट प्राप्त होने पर, हनीफ खेल में जीत जाएगा, अन्यथा वह हार जाएगा। हनीफ के खेल में हार जाने कि प्रायिकता परिकलित कीजिए।

उत्तर- एक सिक्के को उछालने पर, माना चित प्राप्त होना H और पट प्राप्त होना T है।

एक सिक्के को तीन बार उछालने पर हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त हो सकते हैं:

HHH, HHT, HTH, THH

TTH, THT, HTT और TTT

$\Rightarrow$ सभी संभव परिणामो की संख्या = 8

यदि इस घटना के E से व्यक्त करें, तो E के अनुकूल परिणामों है:

HHT, HTH, THT, THH, TTH, HTT

$\because$ चूँकि TTT या HHH प्राप्त होने पर वह जीतता है

$\therefore$ शेष परिणाम हारने के अनुकूल है।

$\therefore$ E के अनुकूल परिणामो की संख्या = 6

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

प्रश्न 24 एक पासे को दो बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि-

a. 5 किसी भी बार में नहीं आएगा?
b. 5 कम से कम एक बार आएगा?

[संकेत: एक पासे को दो बार फेंकना और दो पासों को एक साथ फेंकना एक ही प्रयोग माना जाता है।]

उत्तर- एक पासे को दो बार फेंकना या दो पासों को एक साथ फेंकना एक ही घटना है।

सभी संभव परिणाम इस प्रकार हैं:

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)

(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)

(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)

(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)

(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

∴ सभी संभव परिणामों की संख्या = 36

a. यदि "5 किसी भी बार में नहीं आएगा" को E से व्यक्त करें, तो E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 36 - [6 + 6 - 1] = 25

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{25}{36}$$

b. यदि घट्न "5 कम से कम बार आएगा" को F से व्यक्त करें, तो F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6 + 6 - 1 = 11

$$\therefore P_{(F)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{11}{36}$$

प्रश्न 25 निम्नलिखित में से कौन से तर्क सत्य है और कौन से तर्क असत्य है? सकारण उत्तर दीजिए।

a. यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो इसके तीन संभावित परिणाम-दो चित, दो पट या प्रत्येक एक बार हैं। अतः इनमें से प्रत्येक परिणाम कि प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है।
b. यदि एक पासे को फेंका जाता है, तो इसके दो संभावित परिणाम-एक विषम संख्या या एक सम संख्या हैं। अतः एक विषम संख्या ज्ञात करने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

उत्तर-

a. यह कथन असत्य है, [क्योंकि जब दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो 'प्रत्येक में से एक' दो प्रकार से परिणाम दे सकता है-पहले सिक्के से चित और दूसरे सिक्के पर पट या पहले सिके से पट और दूसरे से चित प्राप्त हो सकता है। इस प्रकार दो बार चित और दो बार पट आ सकता है] इस प्रकार प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। $\frac{1}{3}$ नहीं।
b. हाँ, यह कथन सत्य है।

प्रश्नावली 15.2 (पृष्ठ संख्या 341-342)

प्रश्न 1 दो ग्राहक श्याम और एकता एक विशेष दुकान पर एक ही सप्ताह में जा रहे हैं (मंगलवार से शनिवार तक) प्रत्येक द्वारा दुकान पर किसी दिन या किसी अन्य दिन जाने के परिणाम समप्रायिक है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों उस दुकान पर-

a. एक ही दिन जाएँगे?

b. क्रमागत दिनों में जाएँगे?
c. भिन्न-भिन्न दिनों में जाएँगे?

उत्तर- यदि मंगलवार को T से, बुधवार को W से, वीरवार को Th से, तथा शनिवार को S से प्रकट करें, तो ग्राहकों श्याम और एकता द्वारा एक विशेष दुकान पर एक ही सप्ताह (मंगलवार से शनिवार) में जाने के सभी संभव परिणाम निम्नांकित हो सकते हैं:

(T, T) (T, W) (T, TH) (T, F) (T, S)

(W, T) (W, W) (W, TH) (W, F) (W, S)

(TH, T) (TH, W) (TH, TH) (TH, F) (TH, S)

(F, T) (F, W) (F, TH) (F, F) (F, S)

(S, T) (S, W) (S, TH) (S, F) (S, S)

∴ सभी संभव परिणामों की संख्या = 25

a. यदि घटना "दो ग्राहक एक ही दिन जायेंगे" को E से व्यक्त करें, तो E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 5 [जो कि (T, T), (W, W), (TH, TH), (F, F) (S, S) है]

$$\therefore P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

b. यदि घटना "दो ग्राहक क्रमागत दिनों में जायेंगे" को R से व्यक्त करें, तो R के अनुकूल परिणामों की संख्या = 8

$$\begin{bmatrix} (T, W), (W, Th), (Th, F), (F, S) \\ (S, F), (W, T), (Th, W), (F, Th) \end{bmatrix}$$

$$P_{(R)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{8}{25}$$

c. यदि घटना "दो ग्राहक भिन्न-भिन्न दिनों में जाएंगें" को Q से व्यक्त करें, तो Q के अनुकूल परिणामों की संख्या = 20

$$P_{(Q)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

प्रश्न 2 एक पासे के फलकों पर संख्याएँ 1, 2, 2, 3, 3, और 6 लिखी हुई हैं। इसे दो बार फेंका जाता है तथा दोनों बार प्राप्त हुई संख्याओं के योग लिख लिए जाते हैं। दोनों बार फेंकने के बाद, प्राप्त योग के कुछ संभावित मान निम्नलिखित सारणी में दिए हैं इस सारणी को पूरा कीजिए-

पहली बार फेंकने के मान

दूसरी बार फेंकने के मान

+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

इसकी क्या प्रायिकता है कि कुल योग

a. एक सम संख्या होगा?
b. 6 है?
c. कम से कम 6 है?

उत्तर- पूरा करने पर सारणी इस प्रकार है:

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

∴ अभी संभावित परिणामों की संख्या = 36

(i) यदि घटना 'कुल योग एक समसंख्या होगा' E से व्यक्त करें, तो E के अनुकूल परिणामों = 18

[2, 4, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 8, 8 सम संख्याएँ है[

$\Rightarrow P_{(E)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

(ii) यदि घटना 'कुयोग 6 है' को F से व्यक्त करें, तो अनुकूल परिणामो की संख्या 4 है-

$$P_{(F)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

(iii) यदि घटना" कुलयोग कम से कम 6 है "को G से व्यक्त करें, तो G के अनुकूल परिणामों की संख्या = 15

[∵ 7, 8, 8, 6, 6, 9, 6, 6, 9, 7, 8, 7, 9, 9, 12 अनुकूल परिणामों है[

$$P_{(G)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

प्रश्न 3 एक थैले में 5 लाल गेंद और कुछ नीली गेंदे है यदि इस थैले में से नीली गेंद निकलने की प्रायिकता लाल गेंद निकालने की प्रायिकता कि दुगुनी है, तो थैले में गेंदों कि संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना थैले में नीली गेदों की संख्या x है-

सभी संभव परिणामों की संख्या) = लाल गेंदों की संख्या) + (नीली गेदों की संख्या) = (5 + x)

यदि घटना “थैले में से नीली गेंद निकालना ”को E से व्यक्त करें, तो

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = x

$$P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

पुनः यदि घटना "थैले मे से लाल गेंद निकलना" को F से व्यक्त करें, तो F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

$$P_{(F)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{5}{x+5}$$

चूँकि $P_{(E)} = 2(P_F)$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+5} = 2\left[\frac{5}{x+5}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{10}{x+5}$$

$$\Rightarrow x = 10$$

∴ नीली गेंदों की संख्या = 10

प्रश्न 4 एक पेटी में 12 गेंदे है, जिनमें से x गेंद काली है। यदि इसमें से एक गेंद यादृच्छया निकली जाती है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद काली है।

उत्तर- पेटी में गेदों की कुल संख्या = 12

सभी संभव परिणामों की संख्या = 12

अवस्था -I: यदि घटना" निकाली गई गेंद काली है "को E से व्यक्त करें, तो

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = x [पेटी में x काली गेंदे हैं।[

$$\Rightarrow P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

अवस्था - II: पेटी में 6 काली गेंद और डालने पर,

गेंदों की कुल संख्या = 12 + 6 = 18

⇒ सभी संभव परिणामों की संख्या = 18

अब काली गेंदों की संख्या = x + 6

यदि घटना" काली गेंद निकलना "को F से व्यक्त करें, तो F के अनुकूल परिणामों की संख्या = x + 6

$$\Rightarrow P_{(F)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{x+6}{18}$$

अब शर्त के अनुसार, हमें प्राप्त है:

$$\because \frac{x+6}{18} = 2\left(\frac{x}{12}\right)$$

$$\therefore 12(x+6) = 36x$$

$$\Rightarrow 12x + 72 = 36x$$

$$\Rightarrow 36x - 12x = 72$$

$$\Rightarrow 24x = 72$$

$$\Rightarrow x = \frac{72}{24} = 3$$

इस प्रकार, x का अभीष्ट मान 3 है।

प्रश्न 5 एक जार में 24 कंचे है जिनमे कुछ हरे हैं और शेष नीले हैं। यदि इस जार में से यादृच्छया एक कंचा निकाला जाता है तो इस कंचे के हरा होने कि प्रायिकता $\frac{2}{3}$ है। जार में नीले कंचों कि संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- चूंकि जार में 24 कंचे हैं।

सभी संभव परिणामों की संख्या = 4

माना जार में नीले कचे x हैं।

जार में हरे कंचों की संख्या = 24 - x

यदि घटना“ निकाला गया कंचा हरा है ”को E से व्यक्त करें, तो

E के अनुकूल परिणामों की संख्या) = 24 - x)

$$\Rightarrow P_{(E)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{24-x}{24}$$

अब, शर्त के अनुसार, हमें प्राप्त है:

$$\frac{24-x}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3(24 - x) = 2 \times 24$$

$$\Rightarrow 72 - 3x = 48$$

$$\Rightarrow 3x = 72 - 48$$

$$\Rightarrow 3x = 24$$

$$\Rightarrow x = \frac{24}{3} = 8$$

इस प्रकार, जार में नील कंचों की संख्या 8 है। s